



## THÈSE DE DOCTORAT

pour l'obtention du diplôme de

**DOCTEUR  
DE  
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES**

Spécialité : *Structure et Matériaux*

présentée par

**Gwendal CUMUNEL**

# **Extensomètres à fibre optique Longue Base (ELB) pour l'évaluation dynamique des structures**

soutenue le 14 février 2008

Devant le jury composé de :

Président :	<b>R. DUFOUR</b>
Rapporteurs :	<b>J. LARDIES</b> <b>F. THOUVEREZ</b>
Examineurs :	<b>H. LANCON</b> <b>P. RAY</b>
Directeur de thèse :	<b>P. ARGOUL</b>
Conseillère scientifique :	<b>S. LESOILLE</b>





*« A vaincre sans péril, on triomphe sans gloire. »*

Corneille (Le Cid).



# Remerciements

Je tiens à remercier tous les membres du jury pour l'attention qu'ils ont bien voulu porter à ce travail :

Monsieur Régis Dufour pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury,

Messieurs Joseph Lardies et Fabrice Thouverez pour avoir accepté la charge de rapporteurs. Qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance pour avoir pris une partie de leur temps pour lire ce volumineux mémoire et en faire une critique constructive,

Messieurs Hervé Lançon et Pascal Ray pour m'avoir fait l'honneur de l'examiner.

Je remercie également toutes les personnes sans qui ce travail n'aurait pu aboutir :

- Monsieur Pierre Argoul, qui a bien voulu diriger mes travaux pendant ces trois années, et Madame Sylvie Lesoille, qui a été ma conseillère tout au long de la thèse, pour le bon déroulement de celle-ci.
- Monsieur Dominique Siegert qui a su éveiller mon intérêt pour la recherche expérimentale durant mon stage de DEA au LCPC Paris.
- Toutes les personnes de la Division Métrologie et Instrumentation pour leur accueil et leur aide, notamment Jean-Marie Caussignac, Frédéric Bourquin, Louis-Marie Cottineau, François Derkx, Frédéric Taillade, Fabien Treyssède, Jean-Pierre Desroches, Michael Peigney, Amal Ghazi, Jean-Luc Bachelier, Gonzague Six, Eric Merliot, Stéphane Buttigieg et Maddly Frémont entre autres.
- Les doctorants du service Métrologie et Instrumentation, Vincent Lanticq, Alexandre Nassiopoulos, Meriem Debbabi, Jean-Philippe Seguin, pour toutes les discussions intéressantes que nous avons pu avoir.
- Toutes les personnes du service des Ouvrages d'art qui m'ont apporté leur aide au cours de la thèse, Dominique Siegert, Ludovic Lauvin, Marc Estivin, Jean-Claude Renaud.
- Christophe Périnelle, Mathieu Morrin et René-Stéphane Morelle pour les débats engagés et au combien passionnant que nous avons pu avoir durant ces trois années.
- Toutes les autres personnes que j'ai pu oublier et qui m'ont apporté leur aide durant la thèse.

Enfin, je ne saurais oublier mes parents pour leur soutien, et surtout ma chère et tendre compagne, Marie-Solange, pour sa patience, qui a été mise à rude épreuve, lors de la rédaction du présent mémoire.



# Acronymes

<i>A-A :</i>	Appuyée - Appuyée.
<i>CCV :</i>	Capteur à Corde Vibrante.
<i>CFO :</i>	Capteur à Fibre Optique.
<i>CI :</i>	Conditions initiales.
<i>CL :</i>	Conditions aux Limites.
<i>DDL :</i>	Degré De Liberté.
<i>DSP :</i>	Densité Spectrale de Puissance.
<i>E-E :</i>	Encastrée - Encastrée.
<i>EF :</i>	Elément Finis.
<i>E-L :</i>	Encastrée - Libre.
<i>ELB :</i>	Extensomètres Longue Base.
<i>ELB – CA :</i>	Extensomètres à fibre optique Longue Base Continûment Attaché.
<i>ENPC :</i>	Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
<i>EOLBUS :</i>	Extensomètre Optique de Longue Base de mesure Uniformément Sensible.
<i>FBG :</i>	Fiber Bragg Grating.
<i>FO :</i>	Fibre Optique.
<i>FRF :</i>	Fonction de Réponse en Fréquence.
<i>G :</i>	Général.
<i>ISL :</i>	Intervalle Spectral Libre.
<i>L :</i>	Linéaire.
<i>LCPC :</i>	Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.
<i>L-L :</i>	Libre - Libre.
<i>LVDT :</i>	Linear Variable Differential Transducer.
<i>MIMO :</i>	Multi Input - Multi Output.
<i>NL :</i>	Non Linéaire.
<i>PPV :</i>	Principe des Puissances Virtuelles.
<i>SHM :</i>	Structural Health Monitoring.
<i>SIMO :</i>	Single Input - Multi Output.
<i>SISO :</i>	Single Input - Single Output.
<i>SLED :</i>	Super Luminescent Electrical Diode.
<i>SMF :</i>	Single Mode Fiber.
<i>SOFO :</i>	Surveillance des Ouvrages par Fibres Optiques.
<i>TF :</i>	Transformée de Fourier.
<i>TO :</i>	Transformées en Ondelettes.
<i>TOC :</i>	Transformée en Ondelettes Continues.



# Table des matières

<b>Glossaire</b>	<b>i</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1 Les différentes technologies des extensomètres à fibre optique . . . . .	1
1.1.1 Les extensomètres à fibres optiques ponctuels . . . . .	3
1.1.2 Les capteurs à fibre optique répartis (continus) . . . . .	4
1.1.3 Les extensomètres à fibre optique de longue base de mesure . . . . .	4
1.2 Plan de la thèse . . . . .	8
1.3 Bibliographie . . . . .	11
<b>I Mesure de l'ELB-CA : appareils et calcul analytique</b>	<b>15</b>
<b>2 Description des appareils de mesure optique utilisés</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 Rappels d'optique . . . . .	19
2.2.1 Lumière : onde électromagnétique . . . . .	19
2.2.2 Chemin optique . . . . .	20
2.2.3 Polarisation . . . . .	20
2.2.4 Cohérence d'une source lumineuse . . . . .	22
2.2.5 Phénomènes d'interférence . . . . .	23
2.2.6 Interférométrie . . . . .	26
2.2.7 Fibre optique : guide d'onde . . . . .	29
2.3 Système de mesure SMARTEC . . . . .	33
2.3.1 Présentation du système de mesure . . . . .	33
2.3.2 Tests de l'appareil et problèmes rencontrés . . . . .	37
2.3.3 Avantages et inconvénients du système SMARTEC . . . . .	38
2.4 Prototype FOGALE Nanotech . . . . .	39
2.4.1 Présentation du système de mesure . . . . .	39
2.4.2 Caractéristiques de la mesure réalisée par l'appareil . . . . .	43
2.4.3 Problèmes et limites de l'appareil . . . . .	51
2.4.4 Avantages et inconvénients du prototype FOGALE . . . . .	59
2.5 Amélioration de la mesure réalisée par l'appareil FOGALE . . . . .	60
2.5.1 Traitement du signal de mesure . . . . .	60
2.5.2 Résolution des problèmes de mesure . . . . .	62
	<b>iii</b>

2.6	Conclusion . . . . .	67
2.7	Bibliographie . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Calcul analytique de la mesure réalisée par un ELB-CA</b>	<b>69</b>
3.1	Introduction . . . . .	71
3.2	Définition de la mesure réalisée par un ELB-CA . . . . .	71
3.2.1	Détermination de la variation d'abscisse curviligne . . . . .	72
3.2.2	Détermination de l'indice de réfraction : effet photoélastique . . . . .	72
3.2.3	Influence de l'enrobage de la fibre optique . . . . .	75
3.2.4	Influence de la température . . . . .	75
3.2.5	Résumé . . . . .	77
3.3	Application au cas d'une poutre droite d'Euler-Bernoulli . . . . .	77
3.3.1	Calcul de la déformation et de la variation d'abscisse curviligne . . . . .	78
3.3.2	Calcul de l'indice de réfraction . . . . .	80
3.3.3	Calcul de la mesure d'un ELB-CA . . . . .	82
3.4	Hypothèses simplificatrices . . . . .	82
3.4.1	Hypothèse des petites déformations . . . . .	82
3.4.2	Définition des différentes hypothèses sur les rotations des sections de la poutre	83
3.4.3	Hypothèse des rotations modérées : cas Général . . . . .	85
3.4.4	Hypothèse des petites rotations : cas Linéaire . . . . .	86
3.4.5	Décomposition de la mesure d'un ELB-CA . . . . .	86
3.5	Lien avec l'état de l'art . . . . .	87
3.5.1	Lien entre la mesure d'un ELB-CA et la courbure . . . . .	87
3.5.2	Combinaisons des mesures de deux ELB-CA . . . . .	88
3.5.3	Mesure d'un ELB-CA dans l'état de l'art . . . . .	89
3.6	Autre calcul de la mesure d'un ELB-CA : déformation d'une ligne . . . . .	90
3.7	Conclusion . . . . .	92
3.8	Bibliographie . . . . .	92
<b>II</b>	<b>Mesure de l'ELB-CA en linéaire</b>	<b>95</b>
<b>4</b>	<b>Les ELB-CA : outils pour l'analyse modale expérimentale</b>	<b>97</b>
4.1	Introduction . . . . .	99
4.2	Réponse impulsionnelle d'une poutre instrumentée par différents types de capteurs	99
4.2.1	Capteurs ponctuels : déplacement, vitesse, accélération . . . . .	100
4.2.2	Capteur longue base : ELB-CA . . . . .	102
4.3	Notions de noeuds et de ventres des modes pour les ELB-CA . . . . .	105
4.3.1	Noeuds d'un mode . . . . .	106
4.3.2	Ventre d'un mode . . . . .	108
4.4	Filtrage de plusieurs modes . . . . .	109
4.5	Influence du placement des ELB-CA . . . . .	112
4.6	Analyse modale de signaux numériques . . . . .	114
4.6.1	ELB-CA « longue base » . . . . .	114
4.6.2	ELB-CA « ponctuels » . . . . .	117
4.7	Obtention des déformées modales à partir des ELB-CA . . . . .	120
4.8	Confrontation théorie-expérience : analyse modale expérimentale d'une poutre	124



## TABLE DES MATIÈRES

---

4.8.1	Poutre E-E . . . . .	124
4.8.2	Poutre E-L . . . . .	129
4.9	Notion de FRF pour les ELB-CA . . . . .	134
4.10	Conclusion . . . . .	141
4.11	Bibliographie . . . . .	142
<b>5</b>	<b>Détection de défauts à partir d'ELB-CA : méthode de la courbure modale</b>	<b>145</b>
5.1	Introduction . . . . .	147
5.2	Méthode de la courbure modale . . . . .	147
5.2.1	Utilisation de capteurs ponctuels « classiques » . . . . .	149
5.2.2	Utilisation d'ELB-CA . . . . .	149
5.3	Cas d'application : poutre E-L entaillée . . . . .	150
5.3.1	Présentation du modèle . . . . .	150
5.3.2	Modèle EF et endommagements . . . . .	151
5.4	Simulations numériques . . . . .	152
5.4.1	Evolution des fréquences propres avec le défaut . . . . .	152
5.4.2	Evolution des déformées modales avec le défaut . . . . .	153
5.4.3	Courbure modale obtenue à partir de capteurs ponctuels . . . . .	156
5.4.4	Intégrale de la courbure modale obtenue à partir des ELB-CA . . . . .	157
5.4.5	Comparaison ELB-CA/capteurs ponctuels . . . . .	159
5.4.6	Influence de la normalisation des vecteurs propres . . . . .	159
5.4.7	Influence de la configuration des ELB-CA . . . . .	161
5.5	Confrontation théorie-expérience . . . . .	166
5.6	Conclusion . . . . .	168
5.7	Bibliographie . . . . .	169
<b>6</b>	<b>Cas Linéaire : simulations numériques et comparaison théorie-expérience</b>	<b>171</b>
6.1	Introduction . . . . .	173
6.2	Simulations numériques . . . . .	173
6.2.1	ELB-CA situé à la surface d'une poutre . . . . .	173
6.2.2	ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre . . . . .	176
6.3	Confrontation théorie - expérience . . . . .	179
6.3.1	Description du dispositif expérimental . . . . .	179
6.3.2	Matériels utilisés . . . . .	182
6.3.3	Condition d'acquisition des signaux . . . . .	184
6.3.4	Etude dynamique . . . . .	186
6.3.5	Etude statique . . . . .	188
6.4	Conclusion . . . . .	190
6.5	Bibliographie . . . . .	190
<b>III</b>	<b>Mesure de l'ELB-CA en non-linéaire</b>	<b>193</b>
<b>7</b>	<b>Etudes statique et dynamique d'une poutre mince en rotations modérées</b>	<b>195</b>
7.1	Introduction . . . . .	197
7.2	Présentation de quelques outils de calcul . . . . .	197
7.2.1	Code de calcul Matlab . . . . .	197

7.2.2	Logiciel COMSOL . . . . .	204
7.2.3	Logiciel MSC Adams . . . . .	205
7.3	Etude numérique en statique . . . . .	207
7.3.1	Comparaison des outils de calcul . . . . .	208
7.3.2	Cas de la poutre E-E . . . . .	211
7.3.3	Cas de la poutre A-A . . . . .	212
7.3.4	Cas de la poutre E-L . . . . .	213
7.3.5	Comparaison entre les cas Linéaire et Général en statique . . . . .	213
7.4	Etude numérique en dynamique . . . . .	215
7.4.1	Choix de l'outil de calcul . . . . .	215
7.4.2	Influence de la discrétisation de la poutre . . . . .	218
7.4.3	Etudes temporelle et fréquentielle en fonction du nombre de modes trans- verses $N_v$ et axiaux $N_u$ choisis dans la base linéaire . . . . .	220
7.4.4	Influence du niveau de force sur les déplacements axial et transverse . . . . .	228
7.4.5	Influence du lieu d'excitation . . . . .	232
7.4.6	Comparaison entre les cas L et G . . . . .	232
7.4.7	Autres cas de CL . . . . .	233
7.4.8	Calcul analytique simplifié du déplacement axial pour une poutre E-E en flexion	234
7.5	Conclusion . . . . .	238
7.6	Bibliographie . . . . .	238
<b>8</b>	<b>Mesure d'un ELB-CA pour une poutre mince en rotations modérées</b>	<b>241</b>
8.1	Introduction . . . . .	243
8.2	Rappels : Mesure de l'ELB-CA pour une poutre en flexion . . . . .	243
8.2.1	Mesure de l'ELB-CA . . . . .	243
8.2.2	Hypothèse des petites déformations . . . . .	243
8.3	Simplification de la mesure de l'ELB-CA pour des rotations modérées . . . . .	244
8.3.1	Calcul numérique de la mesure de l'ELB-CA . . . . .	244
8.3.2	Vérification de l'hypothèse des petites déformations . . . . .	246
8.3.3	Etude des termes composant la mesure de l'ELB-CA . . . . .	248
8.4	Mesure de l'ELB-CA pour une poutre en rotations modérées en statique . . . . .	252
8.4.1	Cas de la poutre E-E . . . . .	253
8.4.2	Autres cas de CL . . . . .	258
8.4.3	Confrontation théorie-expérience : poutre E-L . . . . .	259
8.5	Mesure de l'ELB-CA pour une poutre en rotations modérées en dynamique . . . . .	259
8.5.1	Mesure dynamique locale de la déformation . . . . .	260
8.5.2	Intégration de la mesure de déformation : l'ELB-CA . . . . .	265
8.5.3	Apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF des ELB-CA . . . . .	267
8.5.4	Comparaison de la mesure de l'ELB-CA obtenue à partir des différentes for- mulations . . . . .	270
8.5.5	Comparaison de la mesure de l'ELB-CA avec les données numériques de déplacement, vitesse et accélération . . . . .	272
8.5.6	Autres cas de CL . . . . .	276
8.5.7	Confrontations théorie-expérience . . . . .	277
8.6	Conclusion . . . . .	291
8.7	Bibliographie . . . . .	291

<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>293</b>
<b>IV Annexes</b>	<b>297</b>
<b>A Mesure obtenue à partir d'un interféromètre de Michelson double étage</b>	<b>299</b>
A.1 Calcul de la mesure fournie par un Michelson double étage . . . . .	299
A.2 Multiplexage en série . . . . .	303
A.3 Intensité réfléchie pour des ELB multiplexés en série . . . . .	304
A.4 Multiplexage en parallèle . . . . .	305
<b>B Différents calculs de la déformation pour une poutre d'Euler-Bernoulli</b>	<b>307</b>
B.1 Poutre droite - distance de l'ELB-CA à l'axe neutre constante . . . . .	308
B.1.1 Méthode dite du « $ds$ » . . . . .	309
B.1.2 Calcul à partir du tenseur des déformations . . . . .	310
B.1.3 Déformation d'un fil . . . . .	311
B.2 Poutre droite - distance de l'ELB-CA à l'axe neutre variable . . . . .	311
B.2.1 Méthode dite du « $ds$ » . . . . .	313
B.2.2 Calcul à partir du tenseur des déformations . . . . .	313
B.2.3 Déformation d'un fil . . . . .	315
B.3 Poutre courbe - distance de l'ELB-CA à l'axe neutre constante . . . . .	315
B.3.1 Méthode dite du « $ds$ » . . . . .	317
B.3.2 Calcul à partir du tenseur des déformations . . . . .	318
B.3.3 Déformation d'un fil . . . . .	319
<b>C Autres applications des ELB</b>	<b>321</b>
C.1 Capteur modal . . . . .	321
C.2 ELB tendu entre deux points . . . . .	324
<b>D Transformées en Ondelettes Continues</b>	<b>329</b>
D.1 Application aux signaux modulés en fréquence . . . . .	329
D.1.1 Base théorique . . . . .	329
D.1.2 TOC de signaux modulés en fréquence et caractérisation d'arêtes . . . . .	331
D.2 Identification modale des systèmes mécaniques linéaires . . . . .	332
D.2.1 Réponses libres des systèmes amortis à plusieurs degrés de liberté . . . . .	332
D.2.2 Relation entre les données mesurées et les paramètres modaux . . . . .	333
D.3 Aspects pratiques de la TOC . . . . .	335
D.3.1 Ondelette mère . . . . .	335
D.3.2 Effet de bords . . . . .	336
D.3.3 Découplage des modes : choix du paramètre de l'ondelette mère . . . . .	338
D.4 Bibliographie . . . . .	339
<b>E Etude dynamique d'une poutre mince en rotations modérées</b>	<b>341</b>
E.1 Cas de la poutre A-A . . . . .	341
E.2 Cas de la poutre E-L . . . . .	346

<b>F</b>	<b>Mesure de l'ELB-CA pour une poutre mince en rotations modérées</b>	<b>353</b>
F.1	Etude statique . . . . .	353
F.1.1	Cas de la poutre A-A . . . . .	353
F.1.2	Cas de la poutre E-L . . . . .	359
F.2	Etude dynamique . . . . .	364
F.2.1	Cas de la poutre A-A . . . . .	364
F.2.2	Cas de la poutre E-L . . . . .	370
	<b>Résumés</b>	<b>377</b>

# Nomenclature

$A, B :$	Emplacement d'un miroir partiel dans l'ELB-CA, sans dimension.
$\vec{B} :$	Champ magnétique, en $T$ (Tesla).
$C :$	Courbure de la poutre, sans dimension.
$D :$	Tenseur diélectrique.
$\vec{E} :$	Champ électrique, en $V.m^{-1}$ .
$E :$	Module d'Young de la poutre, en $GPa$ .
$F :$	Amplitude de la force d'excitation $g(x, t)$ , en $N$ .
$I :$	Inertie de la section de la poutre, en $m^4$ .
$L :$	Longueur de la poutre, en $m$ .
$M :$	Point de l'axe neutre de la poutre.
$N :$	Nombre de modes propres compris dans la réponse vibratoire de la poutre, sans dimension.
$O :$	Origine du repère de coordonnées cartésiennes.
$P :$	Point d'une section droite de la poutre situé à la distance $d$ du point de l'axe neutre $M$ .
$Q :$	Paramètre de filtrage de la TOC, sans dimension.
$S :$	Section de la poutre, en $m^2$ .
$X :$	Position initiale du miroir mobile, en $m$ .
$M' :$	Position du point $M$ après déformation de la poutre.
$P' :$	Position du point $P$ après déformation de la poutre.
$D_{AB}(t) :$	Mesure physique temporelle de l'ELB-CA entre les points $A$ et $B$ , en $m$ .
$D_{AB}^y(t) :$	Composante de la mesure $\Delta D_{AB}(t)$ dépendant de la courbure au niveau de l'ELB-CA situé à une hauteur $y$ par rapport à l'axe neutre de la poutre, en $m$ .
$D_{opt}(t) :$	Mesure optique temporelle de l'ELB-CA entre les points $A$ et $B$ , en $m$ .
$F_k :$	Projection de la force $g(x, t)$ sur la $k^{\text{ème}}$ déformée modale de la poutre.
$\mathcal{M}_{T_C}(x), \mathcal{M}_{T_{axe}}(x) :$	Moyenne du terme $T_C$ (resp. $T_{axe}$ ) au niveau de l'ELB-CA, sans dimension.
$F_u, F_v :$	Composante axiale (resp. transverse) de la force, en $N$ .
$H_{ij} :$	Fonction de transfert avec $i$ l'indice du point de mesure et $j$ celui du point d'excitation.
$I_C(x_i) :$	Indicateur d'endommagement pour des capteurs ponctuels.
$I_C^{\text{ELB}}(i) :$	Indicateur d'endommagement pour des ELB-CA.
$I_D :$	Intensité de la source lumineuse, en $cd$ (candela).
$L_c :$	Longueur de cohérence temporelle de la source lumineuse, en $m$ .
$N_{ab} :$	Nombre de points de la poutre discrétisée compris entre $a$ et $b$ , sans dimension.

$N_e$ :	Nombre d'éléments finis pour discrétiser la poutre, sans dimension.
$N_p$ :	Nombre de points de la poutre discrétisée, sans dimension.
$N_t$ :	Nombre de points de l'intervalle de temps discrétisé $[t_0, t_f]$ , sans dimension.
$N_{TOC}$ :	Nombre de points de discrétisation fréquentielle choisi pour la TOC, sans dimension.
$N_u, N_v$ :	Nombre de modes axiaux (resp. transverses) pris en compte dans la modélisation EF.
$T_C(x, t), T_{axe}(x, t)$ :	Composante de la mesure $D_{AB}(t)$ liée à la courbure (resp. à la déformation de l'axe neutre) de la poutre, sans dimension.
$\Delta D_{AB}(t)$ :	Différence entre la mesure $D_{AB}(t)$ à l'instant $t$ et la mesure à l'instant initial $t = 0$ , en $m$ .
$\Delta D_{AB}^{axe}(t)$ :	Composante de la mesure $\Delta D_{AB}(t)$ dépendant de la déformation de l'axe neutre, en $m$ .
$\Delta D_{opt}(t)$ :	Différence entre la mesure $D_{opt}(t)$ à l'instant $t$ et la mesure à l'instant initial $t = 0$ , en $m$ .
$\Delta X$ :	Variation de la position du miroir mobile, en $m$ .
$a, b$ :	Borne d'intégration inférieure (resp. supérieure) de la mesure de l'ELB-CA, à l'emplacement d'un miroir partiel, en $m$ .
$c$ :	Célérité de la lumière dans le vide, en $m.s^{-1}$ .
$e$ :	Épaisseur de la poutre, en $m$ .
$\vec{f}(x, t)$ :	Fonction d'une courbe paramétrée égale au vecteur déplacement $\overrightarrow{OP'}(x, t)$ .
$g(x, t)$ :	Force d'excitation, en $N$ .
$h$ :	Hauteur de la poutre, en $m$ .
$\vec{n}$ :	Vecteur unitaire normal à l'axe neutre de la poutre.
$n$ :	Indice de réfraction de l'onde optique dans la fibre optique, sans dimension.
$\vec{r}$ :	Vecteur position d'un point.
$s$ :	Abscisse curviligne, en $m$ .
$\vec{t}$ :	Vecteur unitaire tangent à l'axe neutre de la poutre.
$t$ :	Variable temporelle, en $s$ .
$u, v$ :	Déplacement axial (resp. transverse) de la poutre, en $m$ .
$x$ :	Variable d'espace, en $m$ .
$y$ :	Distance de l'ELB-CA, par rapport à l'axe neutre de la poutre, supposée constante, en $m$ .
$\vec{f}'(x, t)$ :	Dérivée par rapport à $x$ du vecteur déplacement $\overrightarrow{OP'}(x, t)$ .
$u', v'$ :	Dérivée par rapport à $x$ du déplacement axial (resp. transverse) de la poutre, sans dimension.
$u'', v''$ :	Dérivée seconde par rapport à $x$ du déplacement axial (resp. transverse) de la poutre, en $m$ .
$b_k(t)$ :	Réponse de la poutre à la force $F_k(t)$ , en $s$ .
$ds$ :	Variation d'abscisse curviligne, en $m$ .
$f_{ech}$ :	Fréquence d'échantillonnage, en $Hz$ .
$f_k$ :	Fréquence du $k^{\text{ème}}$ mode de la poutre, en $Hz$ .
$n_0$ :	Composante constante de l'indice de réfraction optique $n$ , sans dimension.

$n_\varepsilon$ :	Composante de l'indice de réfraction optique $n$ dépendant de la déformation, sans dimension.
$n_x, n_y$ :	Composante axiale (resp. transverse) du vecteur $\vec{n}$ normal à l'axe neutre de la poutre, en $m$ .
$n_\epsilon$ :	Composante de $n_{opt}$ dépendant de la déformation.
$p_{11}, p_{12}$ :	Constantes photoélastiques, sans dimension.
$p_{ijkl}$ :	Tenseur des constantes photoélastiques.
$r_i$ :	Coefficient de réflexion d'un miroir, sans dimension.
$t_0$ :	Instant de l'excitation (choc), en $s$ .
$t_f$ :	Durée du signal de mesure $D_{AB}(t)$ , en $s$ .
$v_{max}$ :	Flèche maximale de la poutre, en $m$ .
$x_0$ :	Lieu de l'excitation (choc), en $m$ .
$x_k$ :	Abscisse du $k^{\text{ème}}$ point de la poutre discrétisée, en $m$ .
$\Delta$ :	Pas du réseau de Bragg, en $\mu m$ .
$\Delta\lambda_{1/2}$ :	Largeur spectrale à mi-hauteur, en $nm$ .
$\Delta\nu$ :	Largeur de bande de la source lumineuse, en $nm$ .
$\Phi_k$ :	Intégrale entre les bornes $a$ et $b$ de l'ELB-CA de la $k^{\text{ème}}$ courbure modale de la poutre.
$\beta$ :	Coefficient de restitution de la déformation au niveau du CFO, sans dimension.
$\delta$ :	Impulsion de Dirac, sans dimension.
$\phi$ :	Phase de l'onde lumineuse, sans dimension.
$\xi$ :	Taux d'amortissement choisi constant pour les modes de la poutre, sans dimension.
$\nu$ :	Coefficient de poisson de la fibre optique, sans dimension ; ou fréquence de l'onde lumineuse, en $Hz$ .
$\rho$ :	Masse volumique de la poutre, en $kg \cdot m^{-3}$ .
$\chi$ :	Rapport de $M_{T_c}$ sur $M_{T_r}$ , sans dimension.
$\alpha_k$ :	Constante de normalisation de la $k^{\text{ème}}$ déformée modale de la poutre, sans dimension.
$\beta_k L$ :	$k^{\text{ème}}$ solution de l'équation transcendante aux valeurs propres de la poutre, sans dimension.
$\delta_{ij}$ :	Symbole de Kronecker égal à 1 pour $i = j$ et à 0 sinon, sans dimension.
$\delta_u, \delta_v$ :	Champ de déplacement virtuel axial (resp. transverse), sans dimension.
$\varepsilon_{ij}$ :	Tenseur des déformations.
$\varepsilon_{xx}^M(x, t)$ :	Déformation de la poutre au point M suivant l'axe $Ox$ , sans dimension.
$\phi_k(x)$ :	$k^{\text{ème}}$ déformée modale de la poutre.
$\phi'_k(x)$ :	Dérivée première de la $k^{\text{ème}}$ déformée modale de la poutre.
$\phi''_k(x)$ :	Courbure modale ou dérivée seconde de la $k^{\text{ème}}$ déformée modale de la poutre.
$\lambda_0$ :	Longueur d'onde dans le vide, en $m$ .
$\lambda_k$ :	Valeur propre, sans dimension.
$\eta_{ij}$ :	Tenseur de perméabilité.
$\sigma_0$ :	Nombre d'onde, en $nm^{-1}$ .
$\sigma_{ij}$ :	Tenseur des contraintes.
$\tau_c$ :	Temps de cohérence de la source lumineuse, en $s$ .

$\omega_k :$	$k^{\text{ème}}$ pulsation propre de la poutre, en $rad \cdot s^{-1}$ .
$\tilde{\omega}_k :$	$k^{\text{ème}}$ pulsation réduite de la poutre, en $rad \cdot s^{-1}$ .
$\xi_k :$	Taux d'amortissement du $k^{\text{ème}}$ mode de la poutre, sans dimension.
$\zeta_c :$	Energie cinétique, en $J$ .
$\zeta_p :$	Energie potentielle, en $J$ .



# Chapitre 1

## Introduction générale

L'instrumentation fait désormais partie du cahier des charges des ouvrages de grandes dimensions tel le viaduc de Millau, durant les périodes de construction, mais aussi pour leur suivi [1]. Plusieurs entreprises d'instrumentation pour le génie civil, telles DYNAOPT ou ADVITAM, ont ainsi été créées en France durant la dernière décennie alors qu'elles étaient peu nombreuses jusqu'alors (SITES, Sol Data). Le contrôle de santé des structures, plus couramment désigné par le sigle anglais SHM (Structural Health Monitoring), requiert des capteurs pérennes en grands nombres. Les Capteurs à Fibre Optique (CFO) sont pour cette application des outils exceptionnels [2].

Ce mémoire porte sur un type particulier de CFO, nouveau au commencement de la thèse et donc peu utilisé, qui ouvrait des perspectives attrayantes dans le domaine de l'instrumentation : l'Extensomètre à fibre optique de Longue Base de mesure (ELB). En particulier, son utilisation en dynamique permet d'envisager de nouvelles perspectives pour la surveillance des ouvrages, notamment pour la détection d'endommagements.

Plutôt que de nous intéresser aux différentes méthodes permettant de déterminer les caractéristiques des structures, nous allons porter notre intérêt sur l'aspect mesure et étudier le choix des capteurs et de leur placement, *i.e* le plan d'instrumentation. Dans un premier temps, l'état de l'art des extensomètres à fibre optique en génie civil et plus particulièrement celui des extensomètres de longue base de mesure est dressé, puis le plan de la thèse est présenté.

### 1.1 Les différentes technologies des extensomètres à fibre optique

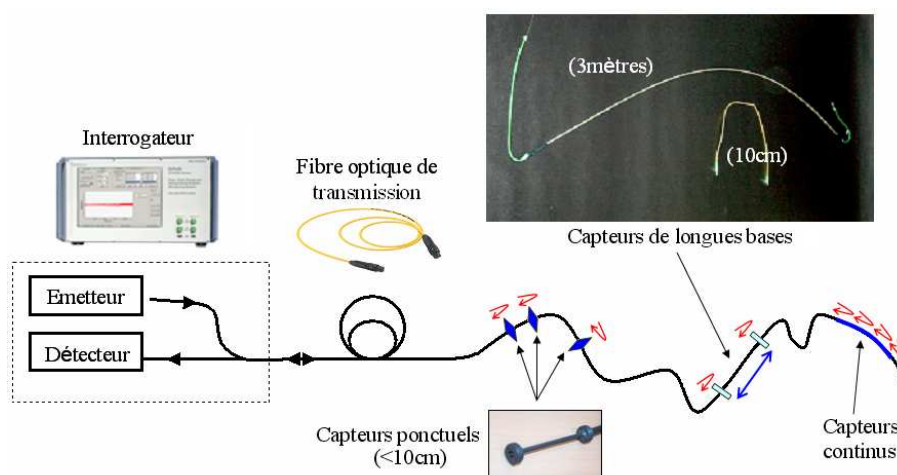
Les premiers CFO sont apparus dès les années 70, avec les toutes premières Fibres Optiques (FO). Bien que les concepts qui prévalent encore de nos jours, ainsi que les démonstrations de faisabilité, remontent à la décennie 80 [3], il a fallu près de 20 ans de développements pour que les performances des CFO égales celles des capteurs traditionnels. Même dans ces conditions, en l'an 2000, le seul CFO ayant débouché sur une commercialisation à grande échelle était le gyroscope à fibre optique. Les extensomètres à fibre optique restaient peu répandus. Pourquoi ?

Un premier élément de réponse est le coût de la chaîne de mesure. Si le capteur en lui-même est abordable, le système d'interrogation optoélectronique représente un investissement significatif. Pour amortir ce coût, les CFO doivent être nombreux. C'est pourquoi les capteurs à réseaux de Bragg (voir plus loin en 1.1.1) notamment s'imposent face à l'instrumentation traditionnelle lorsque le nombre de voies de mesure dépasse plusieurs dizaines [4]. Par ailleurs, le coût des CFO a commencé à se réduire sensiblement et cette tendance devrait continuer grâce aux plus grands volumes de production liés à une demande plus forte.

Deuxièmement, la réponse des capteurs dans leur milieu d'emploi ne correspond pas toujours aux prédictions théoriques, ni même aux courbes d'étalonnage expérimentales fournies avec les capteurs. Une thèse [5] a permis de comprendre l'influence de l'enrobage mécanique de la fibre optique (choix et forme des matériaux qui l'enrobent) sur les mesures délivrées par les CFO. Cet aspect a longtemps été négligé par les fournisseurs, sociétés spécialistes en optoélectronique et non en mécanique, et est à l'origine de contre-performances une fois les capteurs installés en conditions réelles d'emploi [6]. Désormais, cette difficulté fait la force des produits développés par certains industriels qui mettent à profit la capacité des CFO à s'intégrer au sein des matériaux pendant leur fabrication.

Durant les 20 dernières années, les CFO se sont développés pour des applications «niches», très spécifiques où les capteurs traditionnels ne peuvent pas être utilisés, notamment l'instrumentation de sites où la neutralité électromagnétique est cruciale. Des difficultés de fiabilité, résolues en se limitant presque exclusivement à des techniques interférométriques, ont dans le passé porté préjudice aux CFO. Toutefois, depuis 2002, des produits insérant des FO au coeur de nouveaux matériaux tels des composites ou des géotextiles sont en plein essor. Forts des résultats ainsi obtenus ces dernières années, les CFO réussissent désormais à convaincre de grandes entreprises qui lancent des campagnes d'évaluation, notamment lorsque les capteurs sont suffisamment nombreux pour que leur multiplexage rende les coûts attractifs. Les CFO deviennent un outil incontournable du Structural Health Monitoring (SHM) [7][8][9].

On distingue traditionnellement les différents types de CFO suivant la grandeur d'influence [10], qui peut être l'intensité du signal, sa longueur d'onde, sa phase ou sa polarisation... Historiquement, les premiers CFO étaient fondés sur l'étude des variations d'intensité du signal lumineux avec, par exemple, les capteurs à microcourbures [11] qui ont, entre autre, permis le pesage en marche de véhicule par instrumentation d'appareils d'appui de ponts. Or, la difficulté majeure est de disposer d'une référence d'intensité stable. Aujourd'hui, le codage de l'information est essentiellement interférométrique [10]. On peut alors distinguer trois grandes familles d'extensomètres à fibre optique suivant que leurs mesures soient ponctuelles, réparties (c'est-à-dire continues tout le long de la fibre optique) ou longue base.



**FIGURE 1.1:** Schéma d'un système de mesure par FO : un appareil d'acquisition est connecté à une FO contenant des capteurs et véhiculant leur information. Les capteurs sont ponctuels (losanges bleus), ou bien de longues bases (le capteur correspond à la distance entre les rectangles), ou bien répartis (la fibre elle-même devient capteur : plus besoin de points spécifiques).

### 1.1.1 Les extensomètres à fibres optiques ponctuels

Dans les CFO ponctuels, la mesure ne s'effectue qu'en des points spécifiques sièges de traitements particuliers, tels des cavités Fabry-Pérot ou des réseaux de Bragg. Commercialement, des extensomètres interférométriques ponctuels de type Fabry-Pérot ont été parmi les premiers CFO commercialisés [12] mais la technologie qui a rencontré le plus de succès est sans conteste celle fondée sur les réseaux de Bragg. Un réseau de Bragg consiste en une modulation submicronique de l'indice de réfraction (rapport de la vitesse de propagation de la lumière dans la matière par rapport au vide, noté  $n$ ) du coeur de la FO sur quelques millimètres. Si cette modulation est effectuée suivant une géométrie spécifique dénommée «réseau de Bragg», elle présente un pouvoir réflecteur pour une bande spectrale très étroite centrée à la longueur d'onde  $\lambda_B$  (Fig. 1.2) directement proportionnelle au pas du réseau  $\Lambda$  ( $\approx 0.5 \mu m$ ) et à l'indice de réfraction  $n$ . Tout allongement ou rétractation décale donc  $\lambda_B$  dont le suivi spectral permet de remonter aux phénomènes inducteurs. Plus précisément, les dépendances de la longueur d'onde de Bragg sont proportionnelles à la température, à la variation de longueur et à la pression. Il ne reste alors qu'à prévoir des systèmes spécifiques, tels des couples de réseaux de Bragg dont un est isolé dans un capillaire, pour décorréler l'influence de la température et des contraintes mécaniques.

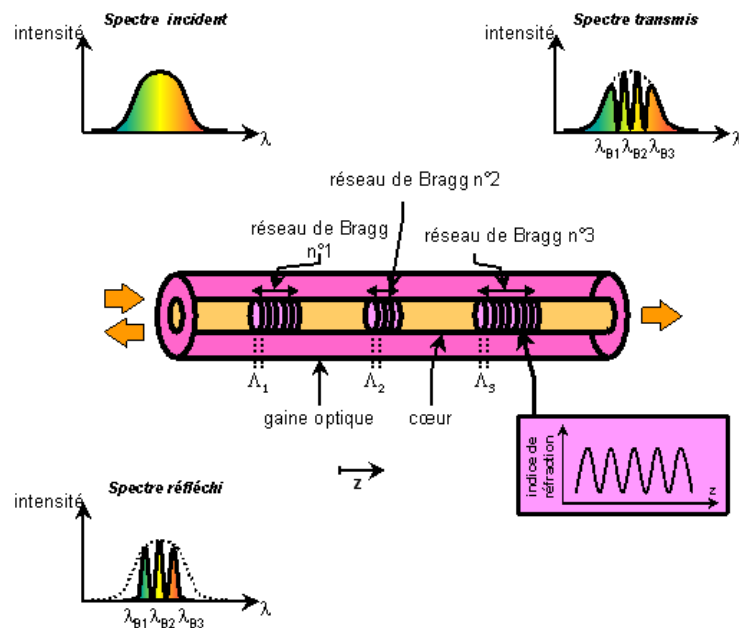


FIGURE 1.2: Principe des réseaux de Bragg, d'après [5].

Les sensibilités et résolutions atteintes sont très intéressantes :  $1 \mu\epsilon$  et  $0.1^\circ C$  sont des valeurs usuelles. Les fréquences d'acquisition dépassent le  $kHz$ . Si ces performances s'apparentent à celles des capteurs LVDT, un atout essentiel est la grande simplicité de mise en oeuvre liée à la réduction significative des câbles et à l'adressage automatique des capteurs. Comme schématisés sur la figure 1.2, plusieurs réseaux de Bragg sont facilement multiplexés sur une même FO, quelle que soit le mesurande (température ou allongement). Il suffit pour cela de cascader des réseaux dont le pas  $\Lambda$  est légèrement différent. La lumière incidente est successivement réfléchi à  $\lambda_{Bi}$  par les différents réseaux. La seule limitation est que chaque capteur adresse une fenêtre spectrale spécifique. Néanmoins, même s'il est possible ainsi de disposer aisément d'un grand nombre de points de mesure

[13], il reste que le positionnement des capteurs doit être judicieux puisque la FO qui les relie n'est pas sensible, elle ne permet que la transmission des données.

Pour le génie civil, l'extensomètre le plus utilisé en dynamique est le CFO à réseaux de Bragg, notamment en géotechnique [14][15], pour la surveillance d'ouvrages [13][16][17] et la détection d'endommagements [18][19][20].

Par ailleurs, à partir de CFO à réseaux de Bragg ponctuels, il est également possible de réaliser des CFO de longue base de mesure. Ce procédé a été utilisé en 2000 [21] pour des mesures dynamiques car les seuls CFO permettant de réaliser ce type de mesure à cette époque étaient les CFO ponctuels. En effet, le développement de système optique permettant d'interroger des extensomètres de longue base de mesure en dynamique est survenu seulement quelques années plus tard. Nous reviendrons sur ce type de CFO lorsque nous traiterons les extensomètres de longue base de mesure en 1.1.3.

### 1.1.2 Les capteurs à fibre optique répartis (continus)

Le terme «capteur réparti» désigne le cas où la fibre optique devient elle-même capteur [22]. Différentes techniques peuvent être mises à profit pour réaliser un système de mesure continûment distribuée dans une FO. La plus courante est l'OTDR (Optical Time Domain Reflectometry) [23] qui est une technique de pulse-écho optique : une impulsion laser est injectée et, au bout du temps  $\Delta t$  correspondant à un aller-retour de l'impulsion entre l'entrée et un point donné de la fibre situé à  $c/(2n\Delta t)$  de l'entrée, on mesure l'intensité rétro-diffusée.

Au démarrage de la thèse, en 2004, ces techniques n'en étaient qu'à leurs débuts et non utilisables en dynamique. Depuis, elles ont connu un essor important et des interrogateurs sont proposés en dynamique permettant l'acquisition jusqu'à une fréquence d'échantillonnage de 10 Hz.

### 1.1.3 Les extensomètres à fibre optique de longue base de mesure

Il existe principalement deux configurations pour les Extensomètres de «Longue Base» de mesure (ELB) :

- Dans la première configuration, illustrée sur la figure 1.3(a), le capteur est constitué de deux FO possédant un miroir à leur extrémité et reliées à un coupleur. L'une sert de référence et l'autre, fixée à la structure, réalise la mesure. Suivant les applications, la fibre de référence est dissociée de la fibre de mesure comme sur le schéma de la figure 1.3(a) ou conditionnée avec elle, par exemple dans un tube (Fig. 1.3(c)). Dans ce dernier cas, la fibre de référence est libre dans le tube afin de ne pas subir les déformations (Fig. 1.3(e)) et la fibre de mesure est tendue entre les deux points d'ancrage du capteur.
- Pour la seconde, illustrée sur la figure 1.3(b), des traitements spécifiques sont réalisés à cœur de la FO pour créer des miroirs semi-réfléchissants. Le capteur est alors constitué d'une FO et de deux miroirs semi-réfléchissants formant une cavité Fabry-Pérot. La mesure réalisée permet alors de déterminer la longueur de la FO entre les deux miroirs.

Si ce type d'extensomètre à fibre optique s'apparente à des cordes vibrantes (CCV), sa longueur peut atteindre plusieurs mètres sans dégrader la précision de mesure. De tels extensomètres sont très sensibles, jusqu'à 1  $\mu m$  de résolution quelle que soit la longueur de l'extensomètre. Un tel équivalent réalisé sans FO par des technologies purement électroniques n'était jusqu'ici disponible qu'en laboratoire [24], mais est désormais commercialisé par la société française DYNAOPT.

## 1.1 Les différentes technologies des extensomètres à fibre optique

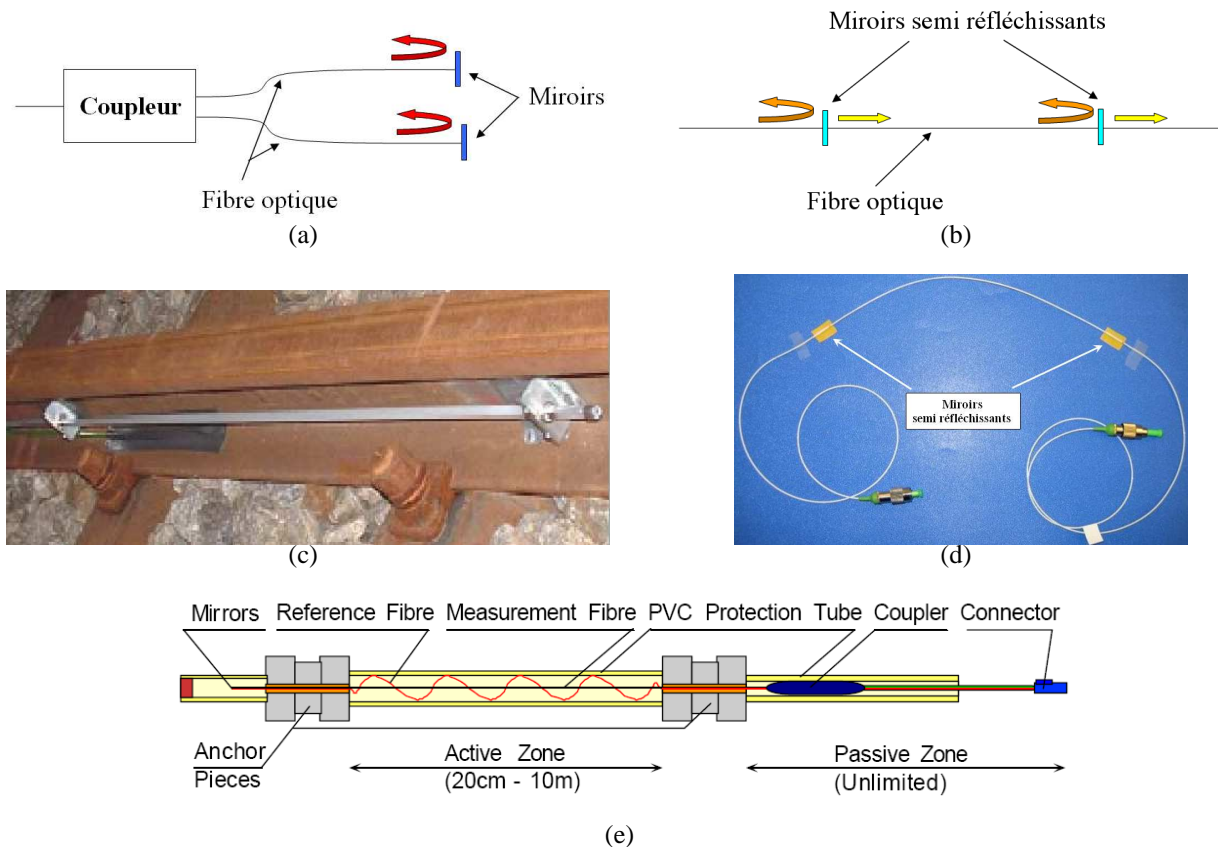


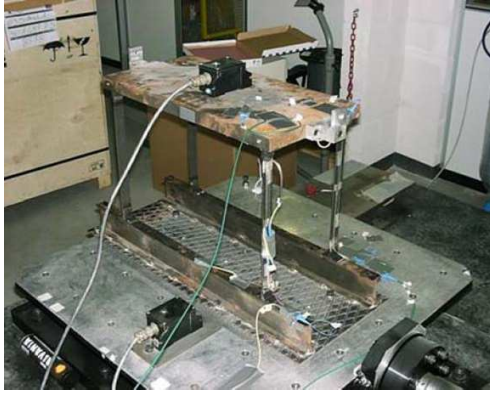
FIGURE 1.3: Principales configurations d'ELB.

Le système de mesure le plus classique permettant d'interroger les ELB est basé sur un interféromètre de Michelson et les mesures sont réalisées en quasi-statique (une mesure toutes les 5 à 8 s suivant les fournisseurs). Le produit SOFO Reading Unit de chez SMARTEC, dont le fonctionnement est basé sur un Michelson double étage [25], s'est largement imposé durant les dix dernières années [26][27] et est installé sur de nombreux ouvrages comme le viaduc de Millau [1]. Il permet notamment de déterminer la flèche des ouvrages à partir de la mesure de la courbure [28].

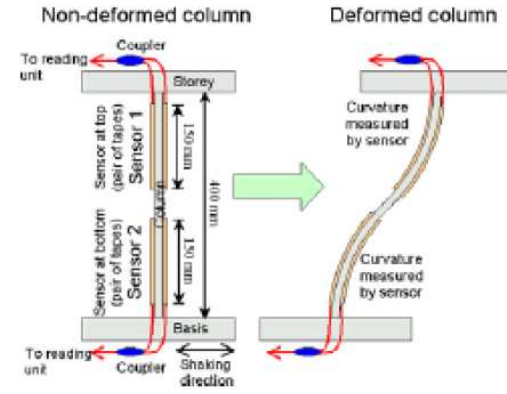
D'autres sociétés proposent également des produits comparables (CFO + appareil de mesure), par exemple FOGALE nanotech [29] et FOX-TEK. Le système de FOX-TEK a notamment été utilisé dans [30][31] pour obtenir la contrainte maximale d'une poutre en acier de 5 m de long à partir de la mesure d'un ELB recouvrant entièrement la poutre. L'objectif était de pouvoir détecter des dépassements de seuils critiques dans les ouvrages. L'Université de l'Illinois (Chicago) a également développé un système de mesure similaire [32], basé sur un Michelson double étage.

En 2003-2004, l'entreprise SMARTEC a développé et commercialisé un nouvel appareil de mesure [33], comprenant huit voies d'acquisition (SOFO Dynamic Reading Unit) et permettant d'interroger les capteurs SOFO en dynamique avec une fréquence d'échantillonnage allant jusqu'à 1 kHz (10 kHz actuellement). C'est ce passage de la quasi-statique à la dynamique qui est à l'origine de la thèse et permet d'envisager des perspectives intéressantes pour l'utilisation des ELB en dynamique. Des premiers essais ont notamment été réalisés avec ce nouvel appareil pour détecter des endommagements en laboratoire [34][35] et sur un pont [36]. Dans [34], le pied d'une table vibrante en acier (Fig.

1.4), instrumenté avec deux capteurs SOFO et deux accéléromètres, est entaillé à différents endroits. L'étude semble montrer que les ELB sont plus sensibles aux défauts que les accéléromètres.



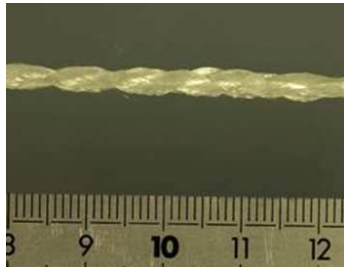
(a) Table vibrante



(b) Schéma de l'expérience

**FIGURE 1.4: Application du système de mesure SOFO en dynamique.**

Les dernières recherches sur les ELB, présentés jusqu'à présent, portent sur des enrobages de la FO permettant de conserver sa souplesse et d'assurer un accrochage continu au milieu d'emploi [37][38] (resp. Fig. 1.5(a) et Fig. 1.5(b)), même sur des surfaces courbes telles qu'un réservoir (Fig. 1.5(c)).



(a) Enrobage tressé - LCPC



(b) SOFO SMARTape



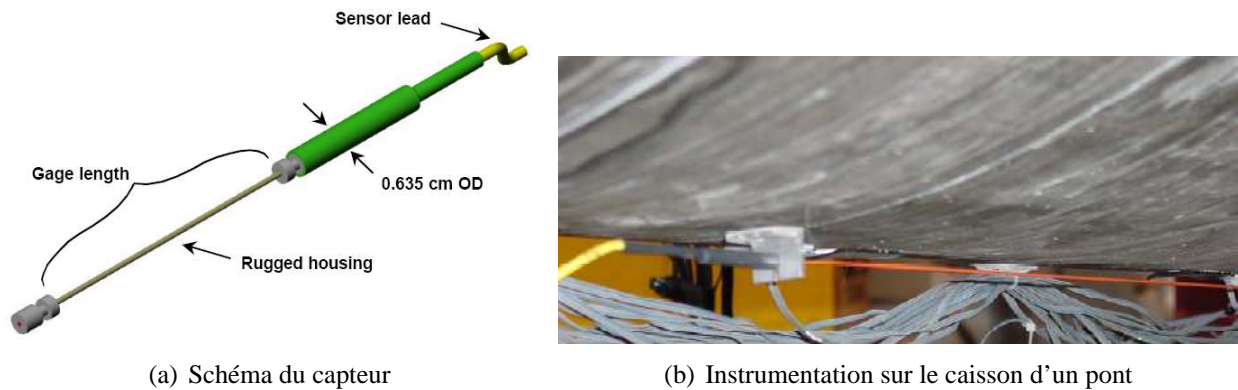
(c) SOFO SMARTape sur un réservoir

**FIGURE 1.5: Nouveaux types d'enrobage des ELB.**



## 1.1 Les différentes technologies des extensomètres à fibre optique

En marge des deux types d'ELB présentés ci-avant (Fig. 1.3), il en existe un autre type dérivé des CFO ponctuels à réseau de Bragg présenté en 1.1.1. Comme nous l'avons mentionné précédemment, en 2000, les seuls CFO permettant de réaliser des mesures dynamiques étaient les CFO ponctuels, le système de mesure de SMARTEC n'arrivant sur le marché qu'en 2003-2004. Alors, pour allonger la base de mesure, un réseau de Bragg est inséré dans une FO qui est ensuite tendue entre deux points. La base de mesure sensible est ainsi allongée et passe de 1 *cm* à la distance entre les deux points de fixation de la FO. L'entreprise américaine Blue Road Research, en partenariat avec l'Université de Californie (Los Angeles), est l'une des premières à avoir développé ce type d'ELB (2000) (Fig. 1.6).



**FIGURE 1.6: ELB de type Bragg développé par Blue Road Research, tiré de [39].**

La partie sensible de l'ELB où le réseau de Bragg est inséré, c'est-à-dire entre les deux points d'ancrage, est protégée par un tube (Fig. 1.6(a)). La base de mesure proposée pour ce type de capteur peut aller jusqu'à 1.5 *m* [40] et ils sont utilisés en dynamique avec une fréquence d'échantillonnage allant jusqu'à 1 *kHz* [21].

Ces capteurs ont notamment été utilisés pour du pesage en marche [41][42] et de la détection d'endommagements [40]. Dans [40], quatre ELB de 1 *m* multiplexés en parallèle, ainsi que sept accéléromètres, sont instrumentés sur le caisson d'un pont (Fig. 1.6(b)). Des essais dynamiques (avec pot vibrant et marteau) sont effectués entre différents cycles de chargement-déchargement réalisés sur le caisson, ceci afin de suivre l'évolution des caractéristiques modales du caisson et ainsi de détecter d'éventuels endommagements. Les résultats obtenus avec les accéléromètres et les ELB en fonction du niveau d'endommagement du caisson sont concordants.

Au début de la thèse, en 2004, le DIMS (Department of Mechanical and Structural Engineering) de l'Université de Trente (Italie) a également développé un ELB à partir de réseau de Bragg [43], ainsi que l'appareil de mesure permettant d'interroger les capteurs, en vue de réaliser des éléments de structure (en béton armé) préfabriqués intelligents qui permettraient la surveillance en temps réel de la santé des ponts.

Sur la figure 1.7(a), le réseau de Bragg (non visible sur la photo) est inscrit dans la FO, qui est ensuite gâchée, située entre les deux points d'ancrage constitués d'une tige en acier filetée et de deux écrous de serrage. Les ELB (Fig. 1.7(a)) sont ainsi directement intégrés au sein de l'élément de structure : tendus entre des fixations ajoutées sur l'armature métallique de l'élément, une rainure ayant été réalisée dans le béton afin de permettre le passage des CFO (Fig. 1.7(b)).

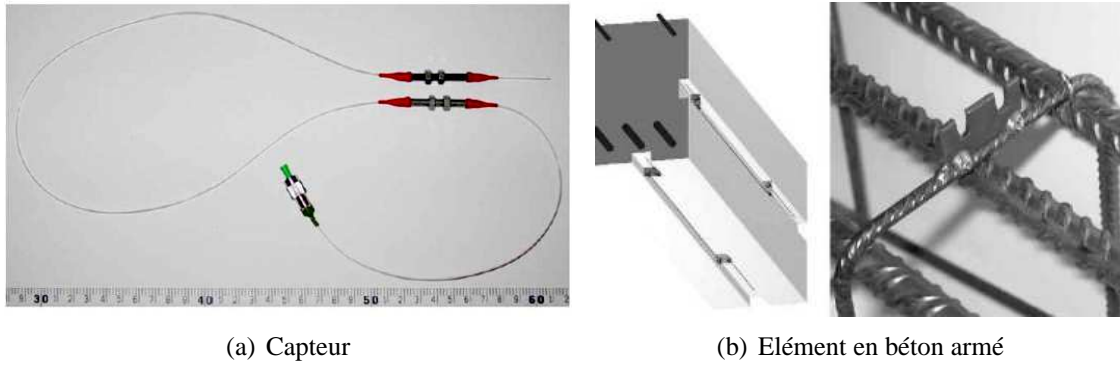


FIGURE 1.7: Élément de structure en béton armé intelligent avec son ELB intégré.

Le système d'acquisition développé permet de réaliser les mesures à partir de ces ELB en statique et en dynamique avec une fréquence d'échantillonnage de  $625\text{ Hz}$ . La précision de la mesure est de l'ordre de  $1\text{ }\mu\text{ε}$ , comme pour les capteurs à réseaux de Braggs ponctuels.

Dans [44], une étude de détection d'endommagements est réalisée sur un élément de structure préfabriqué de  $5.6\text{ m}$  de long intégrant huit ELB de  $60\text{ cm}$  répartis continûment le long de l'élément. Il est également instrumenté avec 19 accéléromètres afin de comparer les résultats obtenus à partir des ELB et des accéléromètres. Différents cas de chargement sont appliqués sur l'élément reposant sur appuis (flexion trois points) et une analyse modale expérimentale est réalisée après chaque cas. Ensuite, la méthode de détection de défaut basée sur les courbures modales est appliquée. Les résultats de l'étude montrent que les ELB sont plus sensibles aux défauts que les accéléromètres.

Cet état de l'art montre que l'utilisation des ELB en dynamique est très récente et très peu répandue. En effet, à ce jour, seulement deux sociétés, SMARTEC et Blue Road Research, commercialisent des ELB et le système de mesure permettant de les interroger en dynamique. De plus, étant donné le coût de l'instrumentation, peu de personnes investissent dans ce type de produit (seulement deux appareils dynamique SOFO vendus dans le monde). La littérature est donc très pauvre sur le sujet et le peu existant, généralement des actes de conférences disponibles sur les sites internet des sociétés SMARTEC et Blue Road Research, relate surtout d'expériences où l'appareil est utilisé en «boîte noire». Il existe très peu d'articles portant sur des études théoriques de la mesure réalisée par les ELB [28][30][31] et de plus elles sont exclusivement en statique.

## 1.2 Plan de la thèse

Le travail effectué durant la thèse consiste, le sujet étant novateur et quasiment vierge (notamment en dynamique), à dresser un premier panorama des capacités des ELB pour l'évaluation dynamique des structures. L'autre particularité du CFO que nous avons étudié au cours de la thèse réside dans son type d'accroche aux structures, réalisé de manière continue et non tendu entre deux points.

Par ailleurs, afin de pouvoir confronter les résultats théoriques de la thèse à l'expérience, il était nécessaire d'acquérir un appareil de mesure permettant d'interroger des ELB en dynamique. Pour des raisons de budget (de l'ordre de  $20\text{ k€}$  contre  $100\text{ k€}$  pour l'appareil SOFO de SMARTEC), la réalisation d'un prototype d'appareil de mesure, basé sur les principes développés dans [29][45], a été commandée par le LCPC à la société française FOGALE nanotech au début de la thèse. Le type d'ELB interrogé par cet appareil est celui présenté sur la figure 1.3(b). Cette société, spécialisée



dans les systèmes de mesures optiques pour divers champs d'application, avait déjà participé avec le LCPC, dans le cadre du projet EOLBUS, au développement d'un système de mesure optique en statique (interrogateur optique + capteur à fibre optique) pour la surveillance des ouvrages d'art.

Ce mémoire est constitué de huit Chapitres organisés en trois parties :

Le premier Chapitre a permis d'introduire et de situer le contexte de l'étude.

La première partie comprend deux Chapitres et détaille la mesure réalisée par l'ELB-CA.

Le deuxième Chapitre présente les deux systèmes de mesure optique qui ont été utilisés au cours de la thèse, en mettant en avant leurs avantages et leurs inconvénients. Ces deux systèmes étant basés sur l'interférométrie et les CFO, plusieurs rappels d'optique sont effectués. L'un des deux systèmes est un appareil commercial de la société suisse SMARTEC et l'autre est un prototype acquis par le LCPC et réalisé par la société française FOGALE nanotech. L'un des principaux objectifs de la thèse étant l'extraction du signal de mesure obtenu avec le système FOGALE, son fonctionnement ainsi que les différents problèmes rencontrés et les solutions proposées pour les résoudre sont présentés plus en détail.

Le troisième Chapitre s'attache à formuler, de manière analytique, la mesure réalisée par les ELB-CA afin d'anticiper leur réponse et d'évaluer leur capacité pour l'évaluation dynamique des structures. Pour cela, le calcul analytique complet de la mesure réalisée par un ELB-CA fixé à une structure quelconque, sans hypothèses simplificatrices, est effectué. L'expression générale de la mesure obtenue est ensuite appliquée au cas de la flexion dans un plan d'une poutre droite de type Euler-Bernoulli. Afin de simplifier celle-ci, plusieurs hypothèses sont effectuées suivant le niveau de flèche de la poutre, aboutissant à deux modèles simplifiés : le cas Linéaire et le cas Général (non-linéaire). Le lien est fait entre ces modèles et la formule traditionnellement utilisée dans l'état de l'art. Enfin, un autre calcul de la mesure réalisée par l'ELB-CA est proposé dans l'optique de simulations numériques réalisées, pour des structures plus complexes, à partir de données provenant de modélisations par éléments finis.

Ensuite, la seconde partie va s'articuler autour de trois Chapitres et traitera de la mesure réalisée par l'ELB-CA en linéaire.

Dans le quatrième Chapitre, nous nous sommes intéressés aux particularités des ELB-CA pour l'analyse modale expérimentale et plus particulièrement à la réponse d'une poutre soumise à un impact. Dans un premier temps, les paramètres modaux obtenus à partir de la mesure des ELB-CA pour une poutre soumise à un choc sont déterminés. Les notions de noeuds et de ventres de vibrations pour ce type de capteur sont alors dégagées, ainsi que l'influence de la configuration de l'ELB-CA, c'est-à-dire de sa longueur et de son placement, sur la TF de la mesure. Les signaux de mesure numériques d'ELB-CA sont ensuite traités à l'aide d'une méthode d'analyse modale, la Transformée en Ondes-lettes Continues (TOC), et les résultats sont comparés avec ceux des capteurs ponctuels classiques (accéléromètres, capteurs de vitesse ou de déplacement). Des confrontations théorie-expérience réalisées sur deux cas de poutre (E-E et E-L) avec les deux systèmes de mesure optique présentés au Chapitre 2 sont présentées. Enfin, nous avons fait l'étude de l'application des notions de FRFs, définies classiquement pour les capteurs ponctuels, aux ELB-CA.

Le cinquième Chapitre présente une application des ELB-CA, où les caractéristiques de la mesure déterminées au Chapitre 4 permettent d'améliorer des résultats obtenus classiquement avec des accéléromètres : la méthode de détection de défauts par la courbure modale. Des simulations numé-

riques sont réalisées et permettent de comparer les résultats obtenus pour la méthode de la courbure modale à partir de mesure de capteurs ponctuels (capteurs de déplacement, de vitesse ou accéléromètres) et d'ELB-CA. L'influence de la normalisation (par rapport à la masse ou au maximum) et de la configuration des ELB-CA sur la détection de l'endommagement est ensuite étudiée.

Dans le sixième Chapitre, nous nous sommes intéressés à la limite de l'hypothèse de linéarité, c'est-à-dire au cas Linéaire défini au Chapitre 3. Pour cela, nous avons reporté l'approximation linéaire, en dynamique, de la flèche d'une poutre soumise à un choc dans l'expression de la mesure simplifiée de l'ELB-CA obtenue au Chapitre 3 pour le cas Linéaire. Deux positions d'ELB-CA sont alors choisies, en surface de la poutre et au niveau de l'axe neutre, et étudiées en détail pour le cas de la poutre E-E et plus brièvement pour d'autres cas de CL (A-A, E-L et L-L). Enfin des confrontations théorie-expérience sont réalisées en dynamique et en statique sur un dispositif expérimental dont le choix des caractéristiques est explicité. L'instrumentation utilisée et l'acquisition des signaux de mesure sont également présentées. Ce Chapitre permet de faire le lien avec la partie suivante qui traite de la mesure de l'ELB-CA en non-linéaire.

Dans la troisième et dernière partie, composée de deux Chapitres, nous nous intéresserons à la mesure réalisée par l'ELB-CA en non linéaire.

Le septième Chapitre est consacré à l'analyse statique et dynamique d'une poutre mince soumise à des rotations modérées. Le phénomène étudié est celui des non linéarités géométriques et on s'intéresse à la modélisation de ce phénomène par différents outils de calcul. Un code de calcul développé sous Matlab dans le cadre d'une thèse a été utilisé et comparé à deux logiciels commerciaux. Les outils de calcul utilisés pour la résolution du problème de la poutre soumise à des rotations modérées sont présentés et comparés, en statique et en dynamique, sur le cas d'une poutre E-E. Ensuite, l'un d'entre eux est choisi pour étudier plus en détails ce cas et d'autres cas de CL (A-A et E-L), notamment l'influence du niveau de force appliqué sur le couplage entre les déplacements axial et transverse. Enfin, un modèle simplifié de la TF du déplacement axial pour la poutre E-E est défini en linéaire. Par ailleurs, les déplacements axial et transverse obtenus dans ce Chapitre, en statique et en dynamique, sont utilisés au Chapitre suivant afin de calculer la mesure réalisée par un ELB-CA en non linéaire.

Le huitième et dernier Chapitre présente l'étude de la mesure réalisée par les ELB-CA pour une poutre soumise à des rotations modérées. A partir des déplacements axial et transverse étudiés au Chapitre précédent, les différents termes composant la mesure de l'ELB-CA sont calculés. Ainsi, les termes prépondérants de la mesure sont déterminés et des expressions simplifiées de la mesure de l'ELB-CA sont proposées, en statique et en dynamique, suivant les différents cas de CL de la poutre. A partir de ces expressions, des études numériques statique et dynamique sont réalisées pour les différentes CL de la poutre. Une étude dynamique numérique d'autres types de mesure ponctuelle (déplacement, vitesse et accélération) est également réalisée et les résultats sont comparés à ceux obtenus pour l'ELB-CA. Conjointement aux études numériques statique et dynamique, des confrontations théorie-expérience sont présentées. Les expériences sont réalisées avec les deux systèmes de mesure optique présentés au Chapitre 2 : sur une poutre E-E en acier en dynamique avec le système de mesure SMARTEC et sur une poutre E-L en plexiglas avec le système de mesure FOGALE en statique et en dynamique.

Enfin, le manuscrit est clos par une conclusion générale et différentes perspectives envisageables à cette étude.

### 1.3 Bibliographie

- [1] Lançon H., Brouillac P., *Viaduc de Millau : les structures du viaduc sous haute surveillance*, Travaux n°816 (2005).
- [2] Merzbacher C.I., Kersey A.D., Friebele E.J., *Fiber optic sensors in concrete structures : a review*, Smart Mater. Struct., 5(1996) 196-208.
- [3] Ferretti M., *Capteurs à fibre optique*, Techniques de l'ingénieur R415 (1986).
- [4] The economist, *From dumb pipes to smart sensors*, juillet 2005.
- [5] Dupont J., *Comportements de capteurs à fibres optiques, noyés ou fixés en surface d'ouvrage en béton*, Thèse, ENPC, Paris/Marne la Vallée, 2002.
- [6] Mahut B., Caussignac J.M., Lavigne J., Martin J., *Mesure de déformations à l'aide de fibres optiques noyées dans le béton. Enseignements tirés d'une application expérimentale sur un pont*, Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées., 14(1997).
- [7] Li H.N., Li D.S., Song G.B., *Recent application of fiber optic sensors to health monitoring in civil engineering*, Engineering Structures, 26(2004) 1647-1657.
- [8] Mufti A.A., *FRPs and FOSs lead to innovation in Canadian civil engineering structures*, Construction and Building Materials, 17(2003) 379-387.
- [9] Del Grosso A., Inaudi D., Pardi L., *Overview of European activities in the health monitoring of bridges*, in Proceedings of the First International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management, Barcelone, Espagne, 2002.
- [10] Lopez-Higuera J.M., *Handbook of Optical Fibre Sensing Technology*, John Wiley & Sons, 2002.
- [11] Berthold J. W., *Historical Review of Microbend Fiber-Optic Sensors*, Journal of Lightwave Technology, 13(7)(1995) 1193-1199.
- [12] Choquet P., Leroux R., Juneau F., *New Fabry-perot fiber-optic sensors for structural and geotechnical monitoring applications*, Transportation research Board 76th annual Meeting, 1997.
- [13] Iwaki H., Shiba K., Takeda N., *Structural health monitoring system using FBG-based sensors for a damage tolerant building*, Smart Structures and Materials, Proceedings of SPIE, Vol. 5057 (2003).
- [14] Liu J.G., Schmidt-Hattenberg C., Borm G., *Dynamic strain measurement with a fibre Bragg grating sensor system*, Measurement, 32(2002) 151-161.
- [15] Wu X.D., Schmidt-Hattenberger C., Krüger K., Chen J., *Temperature-controlled fiber bragg grating dynamic strain detection system*, Sensors and Actuators A, 119(2005) 68-74.
- [16] Davis M.A., Bellemore D.G., Berkoff T.A., Kersey A.D., Putnam M.A., Idriss R.L., *Fiber Optic Sensor System for Bridge Monitoring with Both Static Load and Dynamic Modal Sensing Capabilities*, Proceedings of SPIE, Vol. 2946, 1996.
- [17] Seim J.M., Schulz W.L., Udd E., Corona-Bittick K., Dorr J., Slattery K.T., *Low-Cost High-Speed Fiber Optic Grating Demodulation System for Monitoring Composite Structures*, Proceedings of SPIE, Vol. 3326, 1998, pp 390.
- [18] Capoluongo P., Ambrosino C., Campopiano S., Cutolo A., Giordino M., Bovio I., Lecce L., Cusano A., *Modal analysis and damage detection by Fiber Bragg grating sensors*, Sensors and Actuators A, 133(2)(2007) 415-424.

- [19] Betz D.C., Thursby G., Culshaw B., Staszewski W.J., *Identification of structural damage using multifunctional Bragg grating sensors : I. Theory and implementation*, Smart Mater. Struct., 15(2006) 1305-1312.
- [20] Betz D.C., Staszewski W.J., Thursby G., Culshaw B., *Structural damage identification using multifunctional Bragg grating sensors : II. Damage detection results and analysis*, Smart Mater. Struct., 15(2006) 1313-1322.
- [21] Udd E., Calvert S., Kunzler M., *Usage of fiber grating sensors to perform critical measurement of civil infrastructure*, Proceedings of OFS-16, Nara, Japan, 2003.
- [22] Rogers A., *Distributed optical-fibre sensing*, Measurement Science Technology R75-R99 (1999).
- [23] Derickson D., *Fiber Optic Test and Measurement*, OTDRs and Backscatter Measurements, Prentice Hall PTR chapitre 11 par Beller J. (1998).
- [24] Bourquin F., Joly M., *A magnet-based vibrating wire sensor : design and simulation*, Smart Mater. Struct., 14(2005) 247-256.
- [25] Inaudi D., Elamari A., Pflug L., Gisin N., Breguet J., Vurpillot S., *Low-coherence deformation sensors for the monitoring of civil-engineering structures*, Sensors and Actuators A, 44(1994) 125-130.
- [26] Glisic B., Simon N., *Monitoring of concrete at very early age using stiff SOFO sensor*, Cement & Concrete Composites, 22(2000) 115-119.
- [27] Glisic B., Inaudi D., *Long-gage fiber optic sensors for global structural monitoring*, First International Workshop on Structural Health Monitoring of Innovative Civil Engineering Structures, Winnipeg, Canada, 2002.
- [28] Inaudi D., Vurpillot S., Casanova N., Kronenberg P., *Structural monitoring by curvature analysis using interferometric fiber optic sensors*, Smart Mater. Struct., 7(1998) 199-208.
- [29] Courteville A., Delaveau M., Lesoille S., Quételet L., Gautier Y., Dumoulin J., Dubroca S., *New concept of low intrusion, quasi-distributed optical fibre extensometer*, Photonics Europe, Proceedings of SPIE, Vol. 6189, 2006.
- [30] Park H.S., Jung S.M., Lee H.M., Kwon Y.H., Seo J.H., *Analytical models for assessment of the safety of multi-span steel beams based on average strains from long gage optic sensors*, Sensors and Actuators A, 137(2007) 6-12.
- [31] Park H.S., Jung S.M., Lee H.M., Kwon Y.H., Seo J.H., *Mathematical models for assessment of the safety of steel beams based on average strains from long gage optic sensors*, Sensors and Actuators A, 125(2006) 109-113.
- [32] Zhao Y., Ansari F., *Quasi-distributed white light fibre optic strain sensor*, Optics Communications, 196(2001) 133-137.
- [33] Inaudi D., Posenato D., *Dynamic demodulation of long-gauge interferometric strain sensors*, 11th SPIE's Annual Symposium on Smart Structures and Materials, San Diego, USA, 2004.
- [34] Casciati F., Domaneschi M., Inaudi D., Figini A., Glisic B., Gupta A., *Long-gauge fiber-optic sensors : a new approach to dynamic system identification*, Proceedings of the Third European Conference on Structural Control, Vienna, Austria, 2004.
- [35] Chung W., Kim S., Kim N.S., Lee H., *Deflection estimation of a full scale prestressed concrete girder using long-gauge fiber optic sensors*, Construction and Building Materials, 22(3)(2008) 394-401.

- [36] Reynders E., De Roeck G., *Measurement of modal curvature using optical fiber strain sensors and application to damage identification using vibration monitoring*, Proceedings of the 17th International Conference on Optical Fiber Sensors, 2005, p. 1076-1079.
- [37] Delepine-Lesoille S., Merliot E., Boulay C., Quétel L., Delaveau M., Courteville A., *Quasi-distributed Optical Fibre Extensometers for Continuous Embedding into Concrete : Design and Realization*, Smart Mater. Struct., 15(2006) 931-938.
- [38] Glisic B., Inaudi D., *Integration of long-gage fiber-optic sensor into a fiber-reinforced composite sensing tape*, International Symposium on Smart Structures and Materials, San Diego, USA, 2003.
- [39] Shulz W.L., Conte J.P., Udd E., *Long Gage Fiber Optic Bragg Grating Strain Sensors to Monitor Civil Structures*, Proceedings of SPIE, Vol. 4330, 2001.
- [40] Calvert S., Conte J.P., Moaveni B., Schulz W.L., de Callafon R., *Real time damage assessment using fiber optic grating sensors*, Proceedings of SPIE, Vol. 5278, 2003.
- [41] Udd E., Kunzler M., Laylor M., Schulz W., Kreger S., *Fiber Grating Systems for Traffic Monitoring*, Proceedings of SPIE, Vol. 4337, 2001.
- [42] Kunzler M., Udd E., Taylor T., Kunzler W., *Traffic Monitoring Using Fiber Optic Grating Sensors On the I-84 Freeway & Future Uses in WIM*, Proceedings of SPIE, Vol. 5278, 2003.
- [43] Zonta D., Bursi O.S., Pozzi M., *Development of an FBG-based Dynamic Measurement System for Real-time Monitoring of RC Elements*, Proceedings of the 2nd European Workshop on Structural Health Monitoring, Munich, 2004, p. 862-869.
- [44] Zonta D., Pozzi M., Bursi O.S., *Performance evaluation of smart prefabricated concrete elements*, Smart Structures and Systems, 4(3)(2007).
- [45] Zhao Y., Ansari F., *Quasi-distributed fibre-optic strain sensor : principle and experiment*, Applied Optics, 40(19)(2001) 3176-3181.



## **Première partie**

### **Mesure de l'ELB-CA : appareils et calcul analytique**





## Chapitre 2

# Description des appareils de mesure optique utilisés

---

**C**ET CHAPITRE est consacré à la présentation des deux systèmes de mesure optique utilisés au cours de la thèse, un système étant constitué d'un extensomètre de longue base de mesure et d'un interrogateur.

Dans un premier temps, des rappels d'optique sont effectués afin de mieux appréhender les phénomènes mis en jeu dans la mesure. Ensuite les avantages et inconvénients des deux systèmes sont dégagés.

Le premier, développé et commercialisé par SMARTEC, la société de référence en CFO pour le génie civil, a une fréquence d'échantillonnage réglable pouvant aller jusqu'à 10 kHz, une très grande précision (0.01  $\mu\text{m}$ ) et une plage de mesure importante ( $\pm 5 \text{ mm}$ ). Par contre, la base de mesure des capteurs n'est pas connue précisément et la technologie des capteurs ne permet pas leur mise en série.

Le deuxième, un prototype de la société FOGALE nanotech, a une fréquence d'échantillonnage plutôt faible (100 Hz) et un bruit de mesure élevé ( $\approx 1 \mu\text{m}$ ). Cependant, sa plage de mesure est importante ( $\pm 2 \text{ mm}$ ) et la technologie des capteurs permet de les mettre en série sur une même fibre, c'est-à-dire de les multiplexer en série.

---

## Plan du Chapitre 2

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Rappels d'optique</b>	<b>19</b>
2.2.1	Lumière : onde électromagnétique	19
2.2.2	Chemin optique	20
2.2.3	Polarisation	20
2.2.4	Cohérence d'une source lumineuse	22
2.2.5	Phénomènes d'interférence	23
2.2.6	Interférométrie	26
2.2.7	Fibre optique : guide d'onde	29
<b>2.3</b>	<b>Système de mesure SMARTEC</b>	<b>33</b>
2.3.1	Présentation du système de mesure	33
2.3.2	Tests de l'appareil et problèmes rencontrés	37
2.3.3	Avantages et inconvénients du système SMARTEC	38
<b>2.4</b>	<b>Prototype FOGALE Nanotech</b>	<b>39</b>
2.4.1	Présentation du système de mesure	39
2.4.2	Caractéristiques de la mesure réalisée par l'appareil	43
2.4.3	Problèmes et limites de l'appareil	51
2.4.4	Avantages et inconvénients du prototype FOGALE	59
<b>2.5</b>	<b>Amélioration de la mesure réalisée par l'appareil FOGALE</b>	<b>60</b>
2.5.1	Traitement du signal de mesure	60
2.5.2	Résolution des problèmes de mesure	62
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>67</b>
<b>2.7</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>68</b>

---

## 2.1 Introduction

Dans ce Chapitre, nous allons présenter les deux systèmes de mesure optique qui ont été utilisés au cours de la thèse. Les principes de ces deux systèmes étant basés sur l'interférométrie et les CFO, plusieurs rappels d'optique sont effectués dans la première partie du Chapitre afin de mieux appréhender les phénomènes mis en jeu.

Ensuite les systèmes de mesure optique sont présentés en mettant en avant leurs avantages et leurs inconvénients. Le premier est un appareil commercial de la société suisse SMARTEC qui a été loué une semaine en 2006. Le second est un prototype acquis par le LCPC en fin d'année 2006 et réalisé par la société française FOGALE nanotech. L'un des principaux objectifs de la thèse étant l'extraction du signal de mesure obtenu avec l'appareil FOGALE, nous présenterons plus en détail son fonctionnement ainsi que les différents problèmes rencontrés et les solutions proposées pour les résoudre.

## 2.2 Rappels d'optique

### 2.2.1 Lumière : onde électromagnétique

La lumière est une onde électromagnétique (Fig. 2.1) dont les champs électrique et magnétique, respectivement  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , satisfont les équations de Maxwell. Celles-ci se combinent pour aboutir à l'équation de propagation dans le vide :

$$\Delta \vec{E} - c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

où  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  est la célérité de la lumière dans le vide, égale à  $3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

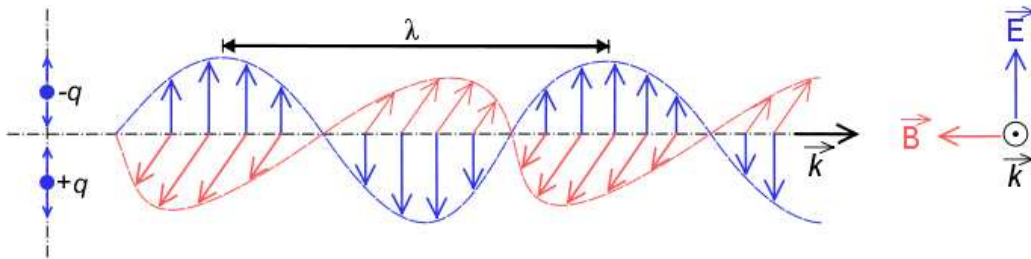


FIGURE 2.1: Onde électromagnétique : oscillation couplée du champ électrique et du champ magnétique, modèle du dipôle vibrant (trièdre  $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$  direct).

Cette équation admet comme solution une onde plane monochromatique définie par :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \cdot \vec{E}_0 \quad (2.2)$$

où  $\vec{r}$  est le vecteur position du point considéré,

$\vec{k} = \frac{2\pi n}{\lambda} \vec{u}$  le vecteur d'onde,  $\lambda$  étant la longueur d'onde et  $n$  l'indice optique,

$\varphi$  la phase à l'origine.

A la place de l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  définie en (2.2), on utilise fréquemment la forme complexe :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)} \cdot \vec{E}_0 \quad (2.3)$$

On obtiendra alors les grandeurs physiques, réelles, en prenant la partie réelle de cette forme complexe.

### 2.2.2 Chemin optique

Comme toute onde électromagnétique, dans le vide illimité, la lumière se propage à la célérité  $c$ . On peut alors associer à chaque fréquence  $\nu$ , une longueur d'onde  $\lambda_0$ , appelée longueur d'onde dans le vide et qui correspond à la couleur de la lumière. Dans un milieu transparent linéaire homogène isotrope, la vitesse de propagation de la lumière devient  $v = c/n$  où  $n$  est l'indice optique du milieu. L'indice  $n$  est, au premier ordre, une constante qui ne dépend que du matériau. Cependant, comme nous le montrerons au Chapitre 3, il varie en fait avec la température, la déformation (ou contrainte) et même avec la longueur d'onde de la lumière (notion de dispersion).

Considérons une source  $S$  émettant au point  $O$  de l'espace, pris comme origine, une onde lumineuse d'amplitude  $a(O) = a_0 \cdot e^{i\omega t}$ . L'onde se propage pour aller de  $O$  en un point  $M$ . Les variations temporelles de l'onde lumineuse ne peuvent pas être instantanément transmises en  $M$  : l'amplitude en  $M$  doit présenter un retard de phase par rapport à l'amplitude en  $O$ , retard dû au temps de propagation nécessaire pour aller de  $O$  à  $M$ . Ce retard dépend lui-même de la vitesse de l'onde dans le milieu considéré et de la distance à parcourir entre  $O$  et  $M$ . Par conséquent, l'amplitude reçue en  $M$  sera de la forme :

$$a(M) = a_0 \cdot e^{i\omega(t-\tau)} = a_0 \cdot e^{i\omega t - i\phi(M)} \quad (2.4)$$

avec

$$\phi(M) = \omega\tau = \frac{\omega r}{v} = \frac{2\pi\nu r}{v} = \frac{2\pi\nu nr}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} nr = \frac{2\pi}{\lambda_0} [OM] \quad (2.5)$$

On appelle chemin optique  $[OM]$  le produit de la distance  $r = OM$  par l'indice  $n$  du milieu. Plus généralement encore, pour un milieu éventuellement inhomogène, où l'indice  $n(M)$  varie suivant le point  $M$ , le chemin optique associé à une courbe quelconque  $\Gamma$  reliant deux points  $A$  et  $B$  est défini par :

$$L(\Gamma) = \int_{\Gamma} n(M) dl \quad (2.6)$$

Une interprétation physique simple du chemin optique nous est donnée en remarquant que  $[OM] = c\tau$ . Le chemin optique est donc la distance parcourue dans le vide par l'onde pendant le même temps  $\tau$  qu'elle met à parcourir le chemin réel dans le milieu.

### 2.2.3 Polarisation

La polarisation correspond à la direction et à l'amplitude du champ électrique  $\vec{E}$ . Pour une onde non polarisée, ou naturelle,  $\vec{E}$  tourne autour de son axe de façon aléatoire et imprévisible au cours du temps. On peut considérer que le champ électrique d'une onde plane est la somme vectorielle de deux composantes orthogonales, habituellement choisies suivant les axes horizontal et vertical, respectivement  $E_x$  et  $E_y$ . Ces deux composantes sont caractérisées par leur amplitude et leur différence de phase. Une onde électromagnétique plane peut être complètement polarisée, partiellement polarisée

ou complètement non polarisée. Si nous observons l'onde dans sa direction de propagation, la pointe du vecteur du champ électrique d'une onde complètement polarisée trace une courbe régulière dont la forme la plus générale est l'ellipse (polarisation elliptique). Les autres états de polarisation, linéaire et circulaire, sont des cas limites des polarisations elliptiques.

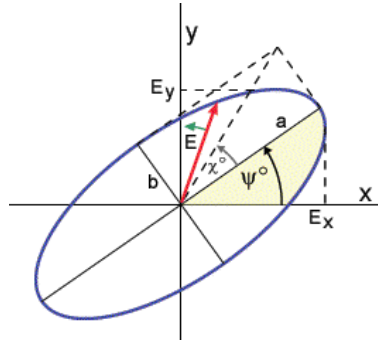


FIGURE 2.2: Etat de polarisation de la lumière.

Pour modifier la polarisation de la lumière, on utilise des lames à retard, souvent du quartz ou du spath d'Islande. L'état de polarisation de la lumière à la sortie de la lame dépend de l'état à l'entrée. Cet effet vient de la biréfringence du cristal dans lequel est faite la lame. Un matériau biréfringent présente un axe privilégié appelé axe optique. La lumière est alors décomposée en deux : une composante  $E_x$ , parallèle à l'axe optique, et l'autre  $E_y$ , perpendiculaire. Ces deux axes particuliers de la lame, les axes lent et rapide, sont caractérisés par deux indices différents, l'indice de réfraction ordinaire  $n_o$  et extraordinaire  $n_e$ , respectivement perpendiculaire et parallèle à l'axe d'anisotropie du matériau. Chaque composante ne se propage pas à la même vitesse (Fig. 2.3). La biréfringence est définie par la valeur sans dimension  $\Delta n = n_e - n_o$ .

La plupart des lames à retard sont taillées de façon à ce que l'axe optique soit parallèle à la face de la lame, les axes lent et rapide étant alors également parallèles à la face de la lame. Lorsque les deux ondes vont se recombiner dans un milieu isotrope, un nouveau déphasage va apparaître : une lame à retard permet donc de retarder une composante par rapport à l'autre. Ce déphasage dépend du matériau utilisé, de la différence entre les indices de réfraction  $n_e$  et  $n_o$ , de l'épaisseur de la lame, et de la longueur d'onde de l'onde lumineuse considérée.

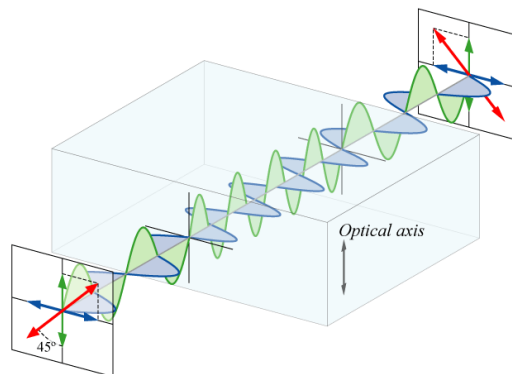


FIGURE 2.3: Lame demi-onde : la lumière entrant dans la lame peut être décomposée en deux polarisations perpendiculaires (en bleu et vert). À l'intérieur de la lame, la polarisation verte prend un retard par rapport à la bleue. La lumière en sortie est alors polarisée différemment.

Il existe plusieurs types de lames à retard, caractérisées par le déphasage qu'elles produisent entre les deux composantes de la lumière :

- La lame demi-onde, également notée lame  $\lambda/2$ , crée un déphasage valant  $180^\circ$ , c'est-à-dire un retard d'une moitié de longueur d'onde. L'onde sortant d'une telle lame présente une polarisation symétrique de l'onde entrante par rapport à l'axe optique.
- La lame quart d'onde, également notée lame  $\lambda/4$ , crée un déphasage de  $90^\circ$ , c'est-à-dire un retard d'un quart de longueur d'onde. Elle permet de passer d'une polarisation rectiligne à une polarisation elliptique ou circulaire, et vice-versa.

Il est alors possible d'utiliser plusieurs lames d'onde en série pour régler la polarisation de la lumière. Le polariseur que nous avons utilisé au cours des expériences réalisées pendant la thèse est fibré. Il est constitué de plusieurs enroulements de FO, qui sont équivalents à des lames d'onde ou lames à retard de phase  $\lambda/4$  et  $\lambda/2$ . Le polariseur présenté sur la figure 2.4 comprend trois enroulements de fibre. Les trois enroulements de fibre sont mobiles autour d'un axe et il est possible de trouver une configuration permettant d'annuler le déphasage dû à la biréfringence créée par la déformation subie par l'ELB-CA.



FIGURE 2.4: Correcteur de polarisation ou polariseur.

Le polariseur va donc permettre, en jouant sur le positionnement des enroulements de fibre, de faire varier à volonté la phase de l'onde se propageant dans la FO.

### 2.2.4 Cohérence d'une source lumineuse

Pour une source lumineuse, on définit deux types de cohérence : la cohérence spatiale et la cohérence temporelle.

La cohérence spatiale concerne les sources de grandes dimensions ce qui n'est pas le cas des systèmes de mesure utilisés dans la thèse qui utilisent des SLED (diode laser super luminescente).

La cohérence temporelle d'une onde est liée à la largeur de bande spectrale de la source. Une onde réellement monochromatique (une seule fréquence) aurait, en théorie, un temps et une longueur de cohérence infinis. En pratique, aucune onde n'est réellement monochromatique (car cela requiert un

train d'ondes de durée infinie), mais, en général, le temps de cohérence de la source est inversement proportionnel à sa largeur de bande  $\Delta\nu$ . On définit le temps de cohérence  $\tau_c$  de la source par l'inverse de la largeur spectrale :  $\tau_c = 1/\Delta\nu$ . La longueur de cohérence temporelle est :  $L_c = v\tau_c$ , où  $v$  est la vitesse de propagation de l'onde. Si les différents chemins suivis par l'onde diffèrent d'une longueur supérieure à  $L_c = v\tau_c$ , il n'y aura pas d'interférences. Ce phénomène sera largement mis à profit dans les systèmes de mesure optique utilisés. Dans la suite du Chapitre, la «cohérence» des sources lumineuses désignera la cohérence temporelle.

Détaillons maintenant le phénomène d'interférence.

### 2.2.5 Phénomènes d'interférence

#### Ondes monochromatiques

La superposition d'ondes planes monochromatiques (de même longueur d'onde ou fréquence) ne conduit pas à la sommation des intensités des différentes composantes pour le calcul de l'intensité lumineuse. En effet, comme les équations de Maxwell sont linéaires, on somme les champs électriques définis par  $\vec{E}_i = a_i \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r} + \varphi_i)} \vec{e}_i = b_i \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_i$  où  $b_i = a_i \cdot e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \varphi_i)}$ . Alors, en tout point de l'espace, le champ électrique  $\vec{E}$  résultant s'écrit :

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \left( \sum_i b_i \vec{e}_i \right) e^{-i\omega t} \quad (2.7)$$

L'intensité totale  $I$  reçue en ce point est égale au carré de la norme du vecteur  $\vec{E}$ , soit  $I = \|\vec{E}\|^2$ . Pour le cas d'une interférence à deux ondes, il vient :

$$\begin{aligned} I &= (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) \cdot (\overline{b_1 \vec{e}_1} + \overline{b_2 \vec{e}_2}) \\ &= b_1 \overline{b_1} + b_2 \overline{b_2} + (b_1 \overline{b_2} + b_2 \overline{b_1}) \cdot \vec{e}_1 \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + 2\text{Re}(b_1 \overline{b_2}) \cdot \vec{e}_1 \vec{e}_2 \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos(\phi) \cdot \vec{e}_1 \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec  $I_i = b_i \overline{b_i}$ .

La phase  $\phi$  s'exprime également par

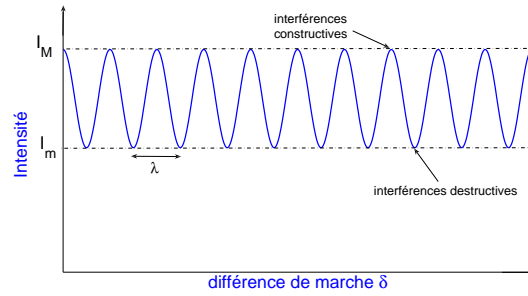
$$\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \quad (2.10)$$

où  $\delta$  est la différence de marche qui représente la différence de chemins optiques.

Il y aura effectivement des interférences si :

- les ondes ne sont pas perpendiculaires, sinon le terme d'interférence serait identiquement nul.
- les deux sources lumineuses sont cohérentes.

La solution la plus simple pour satisfaire la première contrainte consiste à utiliser deux ondes lumineuses qui se déplacent parallèlement. Dans ce cas, le produit scalaire est unitaire et le terme d'interférence s'écrit  $2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos(\phi)$ . On obtient alors l'allure de la courbe d'intensité en fonction de la différence de marche  $\delta$  représentée sur la figure 2.5.


 FIGURE 2.5: Intensité des interférences en fonction de la différence de marche  $\delta$ .

On définit le contraste  $C$  (ou visibilité) pour des ondes monochromatiques par :

$$C = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} \quad (2.11)$$

où  $I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$  et  $I_m = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$

D'après sa définition, le contraste est un nombre sans dimension toujours compris entre 0 et 1. Avec les valeurs ci dessus, on obtient :

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \quad (2.12)$$

Il apparaît alors que si l'une des intensités propres est très grande devant l'autre (par exemple  $I_2 \gg I_1$ ),  $C = 2\sqrt{I_1/I_2}$  est alors très faible : on a un mauvais contraste, le phénomène d'interférence est peu visible. Au contraire si  $I_1 = I_2$ ,  $C = 1$ , le contraste est maximal.

On peut donc retenir qu'un phénomène d'interférence à deux ondes est d'autant plus contrasté que les intensités propres (donc les amplitudes) des deux ondes sont proches.

### Limite du cas des ondes monochromatiques : source peu cohérente

Aucune onde n'étant réellement monochromatique dans la réalité, regardons le signal d'intensité obtenu à partir de deux ondes électromagnétiques comportant deux longueurs d'onde, soient les deux nombres d'onde suivant  $\sigma_0 = 1/\lambda_0$  et  $\sigma_0 + \varepsilon$ . Pour simplifier, supposons qu'elles ont la même intensité  $I_1 = I_2 = I_0$ . Il n'y a pas d'interférence entre les ondes lumineuses de longueur d'onde différente d'une source polychromatique : pour le calcul d'intensité, on ajoute les intensités dues à chaque longueur d'onde. D'après (2.9), il vient alors pour l'intensité  $I$  :

$$\begin{aligned} I(\delta) &= 2I_0(2 + \cos(2\pi\sigma_0\delta) + \cos[2\pi(\sigma_0 + \varepsilon)\delta]) \\ &= 4I_0(1 + \cos[\pi(2\sigma_0 + \varepsilon)\delta] \cdot \cos(\pi\varepsilon\delta)) \\ &\approx 4I_0(1 + \cos[2\pi\sigma_0\delta] \cdot \cos(\pi\varepsilon\delta)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

car  $\varepsilon \ll \sigma_0$ .

On observera alors un phénomène de battements entre les deux longueurs d'ondes, le terme d'interférence étant modulé par  $\cos(\pi\varepsilon\delta)$ .

Intéressons nous maintenant au cas des spectres réels d'émission plus large de type gaussien, comme celui des diodes laser qui sont présentes dans les deux appareils de mesure optique. Le spectre



## 2.2 Rappels d'optique

est centré sur  $\sigma_0$  et a une largeur totale  $\Delta\sigma$  à la hauteur  $1/e$ . Nous aurons donc pour  $I$ , de la même manière que précédemment :

$$I(\delta) = 2I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\sigma)[1 + \cos(2\pi\sigma\delta)]d\sigma \quad (2.14)$$

avec

$$\phi(\sigma) = e^{-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{\Delta\sigma/2}\right)^2} \quad (2.15)$$

soit

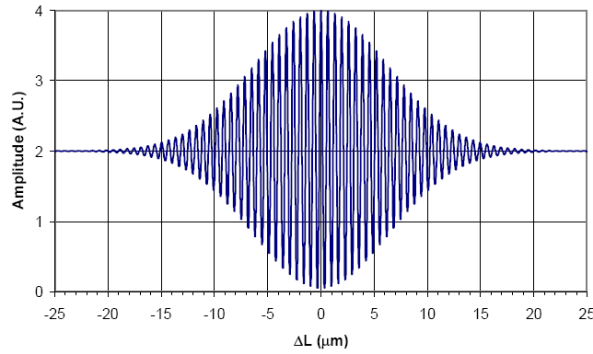
$$I(\delta) = 2I_0 \left[ 1 + \cos(2\pi\sigma_0\delta) \cdot e^{-\pi^2(\Delta\sigma/2)^2\delta^2} \right] \quad (2.16)$$

La longueur de cohérence d'une source lumineuse ayant un spectre d'émission gaussien est définie par [9] :

$$L_c = \frac{2\ln(2)}{\pi} \cdot \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_{1/2}} \quad (2.17)$$

où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde de la source lumineuse et  $\Delta\lambda_{1/2}$  est la largeur à mi-hauteur du spectre, égale à  $\Delta\nu_{1/2}$ , exprimée en longueur d'onde.

La figure 2.6 présente le signal d'interférence obtenue pour une source de longueur d'onde centrale  $\lambda_0=1310 \text{ nm}$  et de largeur spectrale  $\Delta\lambda_{1/2}=50 \text{ nm}$ , soit une longueur de cohérence de la source  $L_c=14.9 \text{ }\mu\text{m}$ .



**FIGURE 2.6: Exemple de signal d'interférence obtenue pour une source peu cohérente de longueur d'onde  $\lambda=1310 \text{ nm}$  et de largeur spectrale à mi-hauteur  $\Delta\lambda_{1/2}=50 \text{ nm}$ , tiré de [11].**

### Résumé :

Pour une source monochromatique, la période de modulation de l'intensité en fonction de la différence de marche est égale à la longueur d'onde. L'amplitude de la modulation est constante et maximale (Fig. 2.7(b)).

Pour une source polychromatique ou d'une certaine largeur spectrale, ce qui est le cas pour les appareils étudiés, on obtient bien, en sommant les composantes monochromatiques, une interférence constructive pour une différence de marche nulle. En s'éloignant de cette position, les sommes ne sont plus ni totalement constructives, ni complètement destructives (Fig. 2.7(d)). La taille de l'enveloppe des franges est dépendante de la largeur spectrale de la source lumineuse.

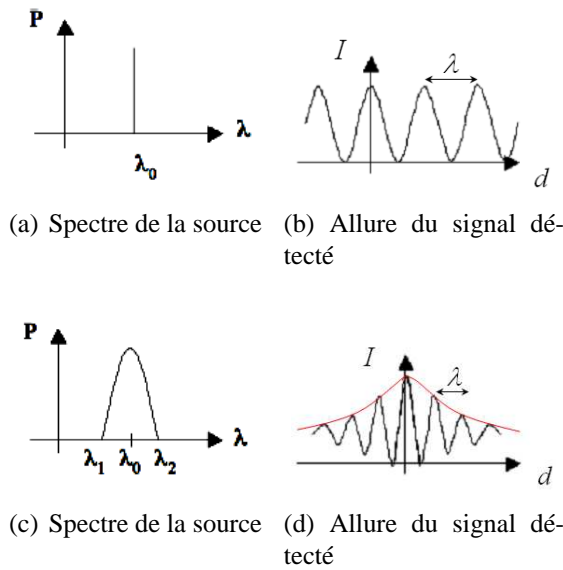


FIGURE 2.7: Spectres monochromatique ((a) et (b)) et polychromatiques ((c) et (d)).

## 2.2.6 Interférométrie

L'interférométrie est une méthode de mesure qui exploite les interférences intervenant entre plusieurs ondes cohérentes entre elles. La condition de cohérence est assurée en utilisant une source lumineuse qui, par différents moyens (miroirs de Fresnel, fentes ou trous d'Young, lame séparatrice, coupleur), donne naissance à deux sources secondaires en phase. Pour les appareils de mesure optique utilisés au cours de la thèse, un coupleur est utilisé afin de séparer (en deux pour l'appareil FOGALE, en huit pour l'appareil Smartec) la lumière provenant d'une diode laser.

Les interféromètres sont des systèmes optiques qui permettent de remonter à l'information de phase. Présentons brièvement les interféromètres classiques qui sont utilisés dans les deux appareils de mesure optique présentés dans ce Chapitre : l'interféromètre de Michelson, l'interféromètre de Mach-Zehnder et l'interféromètre de Fabry-Pérot.

### Interféromètre de Michelson

L'interféromètre de Michelson est constitué de deux miroirs  $M1$  et  $M2$  et d'une lame semi-réfléchissante appelée séparatrice. Ces trois éléments sont orientables et  $M1$  peut se déplacer en translation. La figure 2.8 illustre un Michelson utilisé en lame d'air.

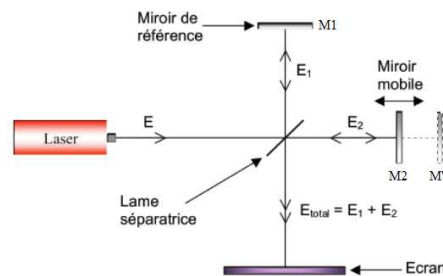


FIGURE 2.8: Interféromètre de Michelson en lame d'air.

La source de lumière envoie un rayon (d'intensité  $I$ ) vers la séparatrice. Ce rayon est divisé en deux rayons d'intensité  $I/2$ .  $M1'$  représente l'image du miroir  $M1$ , symétrique par rapport à la séparatrice ; le trait pointillé représente donc un trajet virtuel équivalent au trajet réel de la lumière vers le miroir  $M1$ . La différence de longueur  $d$  des bras de l'interféromètre induit une différence de marche  $\delta$  entre les deux rayons égale à  $2d$ . L'intensité obtenue à partir de l'interféromètre est alors :

$$I = I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{4\pi nd}{\lambda} \right) \right] \quad (2.18)$$

Ainsi le signal détecté est une fonction sinusoïdale du déphasage qui dépend de la différence de longueur  $d$  entre les deux bras de l'interféromètre. Suivant la nature de la source utilisée, on obtiendra des résultats différents pour la figure d'interférence (cf Fig. 2.6 et 2.7). Les deux systèmes de mesure optique utilisés au cours de la thèse possèdent un interféromètre de Michelson fibré.

### Interféromètre de Mach-Zehnder

Un autre type d'interféromètre, qui est utilisé dans l'appareil SMARTEC, permet d'observer des interférences entre deux ondes et de remonter à la différence de marche entre celles-ci : l'interféromètre de Mach-Zehnder, qui existe en espace libre ou fibré (Fig. 2.9).

En espace libre, il est constitué de deux miroirs et de deux miroirs semi-réfléchissants.

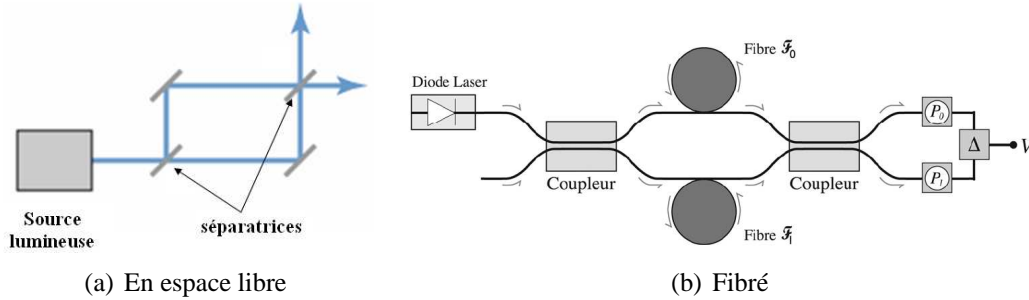


FIGURE 2.9: Interféromètre de Mach-Zehnder.

Comme le montre la figure 2.9(a), un faisceau lumineux est divisé en deux, puis ces deux faisceaux sont alors recombinés à l'aide d'un miroir semi-réfléchissant (coupleur pour le cas fibré). Ils vont donc pouvoir interférer entre eux. Cette fois-ci, la différence de marche  $\delta$  est égale à la différence de longueur  $d$  des bras de l'interféromètre. L'intensité obtenue à partir de l'interféromètre est alors :

$$I = I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi nd}{\lambda} \right) \right] \quad (2.19)$$

Si l'un des deux bras est pris comme référence, il est alors possible de détecter les variations du deuxième bras (dus notamment à la température et à la déformation) en comptant le nombre de franges dont la figure d'interférence s'est décalée.

L'interféromètre de Mach-Zehnder est plus efficace que l'interféromètre de Michelson car il peut récupérer, sur deux voies en opposition de phase, deux interférogrammes. La totalité des photons émis est ainsi utilisée (aux réflexions et transmissions près), contrairement à l'interféromètre de Michelson qui renvoie la moitié des photons vers la source. Il est très utilisé en astronomie.

### Interféromètre de Fabry-Pérot

L'interféromètre de Fabry-Pérot n'est pas directement utilisé dans un appareil de mesure mais comme capteur. C'est un interféromètre optique constitué de deux surfaces partiellement réfléchissantes planes (réflexion généralement supérieure à 95 %). La lumière entrante effectue de multiples aller-retour à l'intérieur de cette cavité et ressort partiellement à chaque réflexion. Les différents rayons lumineux sortants interfèrent entre eux, donnant lieu à une figure d'interférence à ondes multiples. Pour simplifier l'étude, on suppose que l'interféromètre est éclairé par une source de lumière monochromatique. On peut représenter un rayon en particulier (Fig. 2.10) et calculer sa contribution à la lumière sortante.

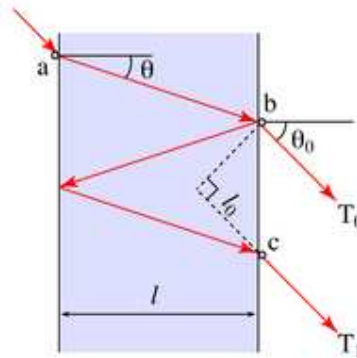


FIGURE 2.10: Schéma de principe d'un interféromètre de Fabry-Perot : un rayon lumineux est réfléchi à l'intérieur de la cavité, et en ressort partiellement.

Les rayons lumineux sortant par la deuxième surface aux points  $b$  et  $c$  n'ont pas parcouru le même chemin optique. Ainsi, ils présentent un déphasage  $\phi$  l'un par rapport à l'autre, dépendant de l'angle  $\theta$ . Ces deux rayons interfèrent entre eux ainsi qu'avec tous les autres rayons qui auront été réfléchis plusieurs fois entre les deux surfaces réfléchissantes. On peut alors montrer que, selon la valeur de  $\theta$ , le rayon est transmis ou pas. On s'aperçoit en fait que seules quelques valeurs de  $\theta$  permettent de transmettre la lumière du rayon incident.

La transmittance de l'interféromètre est donnée par l'expression suivante :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right)} \quad (2.20)$$

dans laquelle  $\delta = 2nl \cos(\theta)$  est la différence de marche subie par la lumière après un aller-retour dans l'étalon,  $R$  est le produit des coefficients de réflexion de chaque interface ( $= r_1 \cdot r_2$ ),  $n$  est l'indice de réfraction du milieu présent entre les deux surfaces réfléchissantes et  $\theta$  est l'angle d'incidence interne. Seules quelques longueurs d'ondes sont transmises : la transmittance  $T$  en fonction de  $\lambda$  présente des pics séparés de  $\delta\lambda$  et d'une largeur  $\Delta\lambda$  (Fig. 2.11). L'intervalle  $\delta\lambda$  est appelé Intervalle Spectral Libre (ISL).

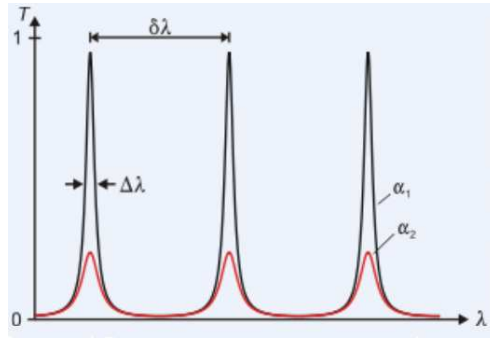


FIGURE 2.11: Courbes de la transmittance  $T$  de l'interféromètre de Fabry-Pérot en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ .

Une cavité Fabry-Pérot peut alors se caractériser par rapport à sa finesse définie par :

$$\mathcal{F} = \frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\pi}{2 \cdot \arcsin(1/\sqrt{F})} \quad (2.21)$$

avec  $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$ , le coefficient de finesse.

Dans notre cas, contrairement au critère recherché habituellement qui consiste à affiner la sélectivité du filtre par rapport à l'ISL (réduire  $\Delta\lambda$  par rapport à  $\delta\lambda$ ), le coefficient de réflexion est choisi assez faible (de l'ordre de 10 à 30 %) afin de pouvoir mettre plusieurs CFO en série. La finesse de l'interféromètre Fabry-Pérot, utilisé en tant que CFO, sera donc faible (Fig. 2.12).

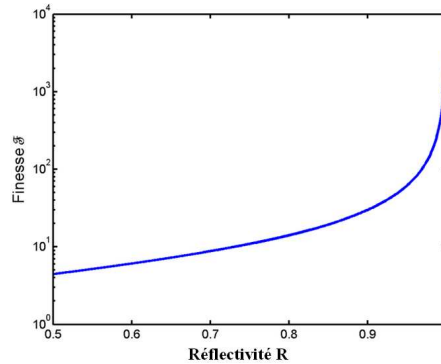


FIGURE 2.12: Courbe représentant la finesse d'un interféromètre de Fabry-Pérot en fonction du coefficient de réflexion des miroirs formant la cavité.

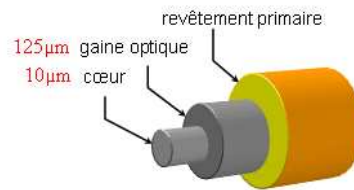
### 2.2.7 Fibre optique : guide d'onde

#### Composants

La FO classique, la plus couramment rencontrée, cylindrique à symétrie de révolution, est constituée de différents éléments (Fig. 2.13) : un coeur et une gaine optique, avec généralement l'adjonction d'un revêtement primaire. Ces différents éléments ont des rôles bien définis :

- Le coeur : milieu diélectrique, généralement du verre (silice), où est confinée la plus grande partie de l'onde lumineuse véhiculée dans la FO.

- La gaine optique : milieu entourant le coeur, où une partie non négligeable de l'onde lumineuse peut se propager, et possédant des propriétés optiques comparables à celles du coeur. Comme pour tout guide d'onde, pour assurer le guidage, l'indice de réfraction (rapport de la vitesse de la lumière dans le matériau sur celle dans le vide) doit être supérieur dans le coeur. Suivant la différence d'indice et les dimensions, un ou plusieurs modes propres coexistent. La plupart des CFO utilisent des fibres optiques monomodes car les pertes de propagation sont très inférieures.
- Le revêtement primaire : constitué d'une ou plusieurs couches concentriques de matériaux, donnant ainsi à la FO une protection et une meilleure résistance mécanique.

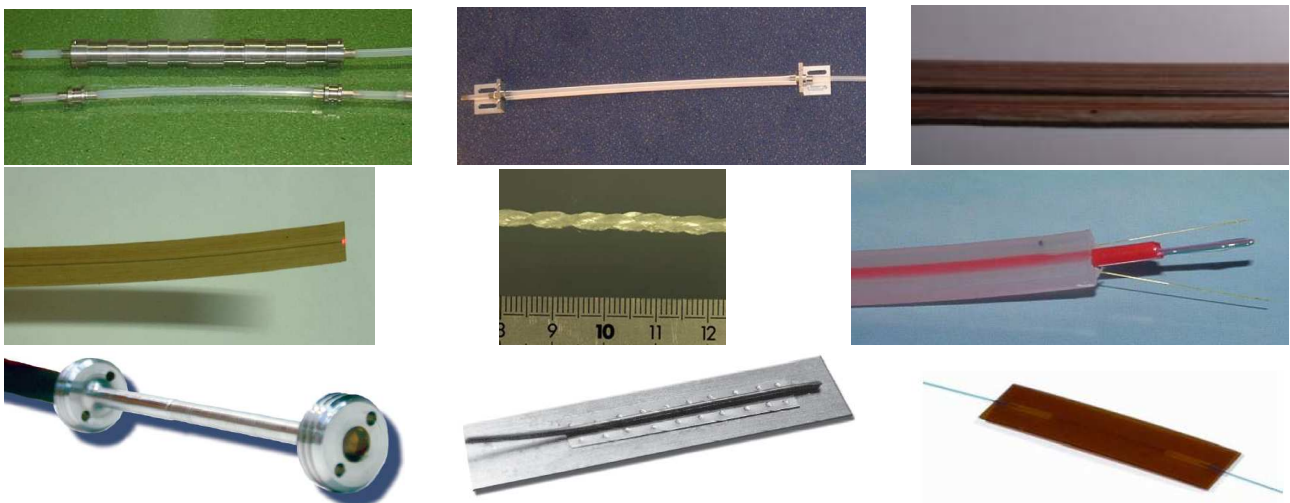


**FIGURE 2.13: Schéma d'une fibre optique.**

Dans le cadre des CFO, la FO est rarement utilisée seule. Un revêtement secondaire lui est adjoint, la gaine mécanique, qui est de nature variable (dimensions, géométrie, matériau) et est souvent liée au revêtement primaire par collage. Ce revêtement supplémentaire a pour fonction d'apporter une protection complémentaire de celle donnée par le revêtement primaire et d'assurer :

- l'accrochage avec le milieu hôte
- le transfert des déformations
- une protection chimique

Suivant le type d'application visée, il existe une multitude de revêtement pour réaliser un CFO (Fig. 2.14).



**FIGURE 2.14: Exemples de CFO gainés.**

### Propagation

Suivant le type de FO, la lumière peut se propager de manière très différente. En effet, les dimensions de la fibre ainsi que l'indice optique des matériaux qui la compose vont permettre la propagation d'un ou plusieurs modes optiques (Fig. 2.15).

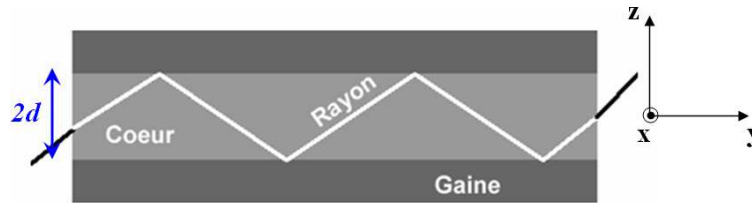


FIGURE 2.15: Guide d'ondes.

Les FO peuvent être classées en deux catégories selon leur diamètre et la longueur d'onde utilisée (Fig. 2.16) :

- Les fibres multimodes (à saut d'indices et à gradient d'indices) ont été les premières sur le marché. Elles ont pour caractéristique de transporter plusieurs modes (trajets lumineux) simultanément, chaque mode ayant une vitesse de propagation propre (suivant l'axe de propagation). Elles sont caractérisées par un diamètre de cœur de plusieurs dizaines à plusieurs centaines de micromètres.
- La FO la plus utilisée, car installée sous les océans pour les communications trans-atlantiques, est la fibre monomode (dites SMF, pour Single Mode Fiber). Un seul mode de propagation est sélectionné et se propage au voisinage de l'axe. Les fibres monomodes sont caractérisées par un diamètre de cœur d'environ  $10\ \mu m$ . Généralement, pour ce type de fibre, on utilise comme source lumineuse des diodes laser. **Les deux systèmes de mesures présentés dans ce Chapitre utilisent ces fibres.**

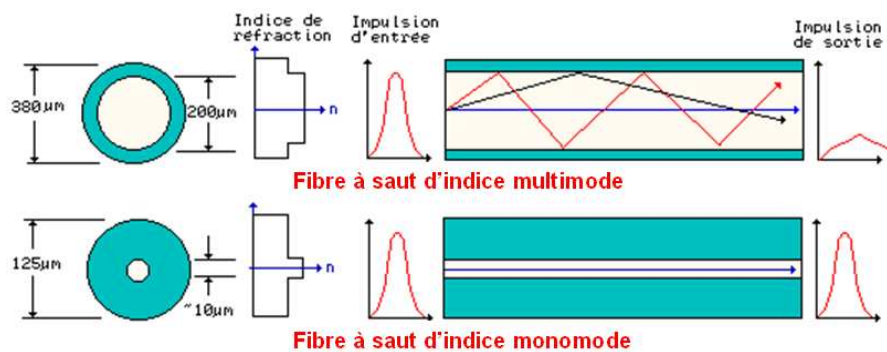


FIGURE 2.16: Modes de propagation dans une FO.

La fibre présente dans les appareils de mesure optique et les CFO utilisés durant la thèse est la SMF28. Elle est utilisée avec une source de longueur d'onde  $\lambda=1550\ nm$  pour l'appareil SMART-TEC et  $\lambda=1310\ nm$  pour l'appareil FOGALE. Ces longueurs d'onde sont les deux longueurs d'onde usuelles de télécommunication. La longueur d'onde  $\lambda=1310\ nm$  est celle pour laquelle la dispersion

est minimum (c'est-à-dire le minimum d'étalement spectral de l'onde au cours de sa propagation) et  $\lambda=1550\text{ nm}$  correspond au minimum de pertes ( $0.2\text{ dB/km}$ ).

### Propriétés caractéristiques

La FO étant un guide d'onde en silice de la taille d'un cheveu ( $0.1\text{ mm}$ ) permettant d'acheminer de la lumière et la plage de longueur d'onde la plus exploitée le proche infrarouge (de  $0.8\mu\text{m}$  à  $1.6\mu\text{m}$ ), il découle de ces caractéristiques de nombreuses spécificités des CFO :

- Contrairement aux capteurs électroniques, la FO ne rayonne pas. Les parasites électromagnétiques qui limitent les dimensions des câbles coaxiaux de raccordement des capteurs traditionnels ainsi que les risques de foudroyage sont ainsi écartés.
- Le verre ayant un point de fusion très élevé, les CFO peuvent être utilisés à très haute température. Ils résistent également aux très hautes pressions, voire à la présence de rayonnements ionisants. Toutefois certains traitements internes spécifiques comme l'inscription de réseaux de Bragg qui s'effacent au delà de  $300^\circ\text{C}$  peuvent limiter les plages d'utilisation.
- Les dimensions transversales étant très faibles (millimétriques), on peut réaliser des capteurs peu intrusifs, mais aussi des câbles de transmission et des boîtiers peu encombrants.
- Les pertes de propagation des signaux sont extrêmement faibles : pour la fibre usuelle dite «monomode», à la longueur d'onde de  $1550\text{ nm}$ , les pertes sont inférieures à 5% par kilomètre de propagation. Ainsi, dans une FO de plusieurs kilomètres, un signal se propage quasiment sans distorsion. Cette caractéristique est primordiale lorsqu'il s'agit d'interroger à distance des capteurs placés dans des zones inaccessibles telles un puit de forage. Elle est également mise à profit pour réaliser des capteurs de longue base de mesure (dimensions métriques voire kilométriques).
- Les capteurs présentent une plus grande sensibilité et une plus grande dynamique que les capteurs traditionnels, tout en conservant des résolutions relatives de l'ordre de la longueur d'onde, soit  $10^{-6}\text{ m}$ , ceci grâce aux montages interférométriques.
- La bande passante héritée des transmissions télécom étant très large, les capacités de multiplexage sont importantes : on peut interroger simultanément des dizaines de capteurs placés sur une même FO tant que les plages spectrales correspondantes sont décalées sur la fenêtre de transmission de la silice,  $0.8\text{-}1.7\mu\text{m}$ . Le réseau de capteurs ainsi créé permet d'envisager une forte réduction du coût de la voie de mesure, tant il est vrai que le système de mesure et de démultiplexage optoélectronique constitue l'une des composantes essentielles du prix de l'instrumentation. Par ailleurs, une telle architecture fournit à l'utilisateur les données de chaque capteur sous une forme homogène, si bien que la fusion de données est intrinsèque. La mise en réseau de CFO conduit donc à des systèmes d'instrumentation optimisés. Enfin, les vitesses d'acquisition des signaux des capteurs sont seulement limitées par le système électronique d'interrogation.

Toutefois, puisque le signal utile se propage sur les  $10\mu\text{m}$  ( $0.01\text{ mm}$ ) centraux de la FO, les raccords entre tronçons de fibre sont des points sensibles, que de simples poussières dégradent. Les



manipulations sont donc relativement délicates. Pour cela, la majorité des raccords sont déportés loin des conditions de chantier. Pour les applications en génie civil, il faut par ailleurs retenir une caractéristique qui peut s'avérer importante : la FO usuelle casse au delà de 4% de traction. Bien que cette valeur soit importante et compatible avec la majorité des applications, l'instrumentation des ponts au niveau des câbles de précontraintes ou des haubans est compromise.

Nous allons maintenant présenter, en 2.3 et en 2.4, les deux appareils utilisés au cours de la thèse permettant de réaliser des mesures en dynamique avec des CFO de longue base de mesure : l'appareil de l'entreprise SMARTEC et celui de l'entreprise FOGALE nanotech.

## 2.3 Système de mesure SMARTEC

L'entreprise suisse SMARTEC est l'un des principaux développeurs, fabricants et distributeurs de systèmes de mesure et de surveillance des ouvrages d'art par FO. Les domaines d'expertise couverts par l'entreprise sont le génie civil, la géotechnique, l'analyse structurelle, l'industrie du pétrole et la distribution d'énergie. Pour cela, elle propose des capteurs (à fibre optique, GPS et conventionnel), des systèmes d'acquisition de données et des logiciels pour l'analyse et la gestion des données.

Notamment, elle commercialise un appareil d'acquisition dynamique : le *SOFO Dynamic Reading Unit*. Nous avons testé le système de mesure (CFO et interrogateur optique). A ce jour, c'est le seul appareil commercial permettant de réaliser des mesures dynamiques à partir d'ELB-CA, avec des caractéristiques que nous détaillerons par la suite.

### 2.3.1 Présentation du système de mesure

#### Capteur à fibre optique

Le capteur utilisé au cours de la thèse est le SMARTape Flexi [2] dont le schéma et la photo sont présentés respectivement sur les figures 2.17 et 2.18. Il permet d'obtenir la mesure de déformation à partir de la variation des chemins optiques des rayons lumineux parcourant deux FO : la fibre de mesure et la fibre de référence. Le capteur SMARTape est constitué d'une zone active et d'une zone passive. La zone active contient la fibre de mesure et la fibre de référence. Selon le type d'application, la fibre de mesure peut être combinée différemment avec la fibre de référence et le coupleur. Dans notre cas, elles sont séparées l'une de l'autre.

La fibre de mesure du capteur SMARTape est composée d'une bande en composite dans laquelle une fibre optique a été incorporée [3]. De part sa petite section (Tab. 2.1) et sa texture, elle possède une grande flexibilité qui s'avère être très utile pour certaines applications (insertion entre des couches de composites, formes incurvées....). La fibre de mesure peut donc être enroulée, insérée dans des matières composites, ou être simplement collée ou maintenue sur n'importe quel type de surface (béton, acier, bois ...). C'est elle qui servira à mesurer les déformations de la structure à étudier.

La fibre de référence est libre dans un tube plastique flexible. Comme son nom l'indique, elle sert de référence pour la fibre de mesure afin de déterminer les déformations de la structure étudiée. Elle permet également de réaliser une compensation thermique de la mesure réalisée avec la fibre de mesure. Des miroirs réfléchissants sont situés aux extrémités des fibres de mesure et de référence.

La zone passive contient un coupleur 50-50 et la FO reliant celui-ci à l'unité de lecture (interrogateur optique). Les CFO SOFO peuvent être interrogés à la fois en dynamique et en statique, l'interrogateur optique étant alors différent.

Les principales caractéristiques du capteur sont répertoriées dans le tableau 2.1.

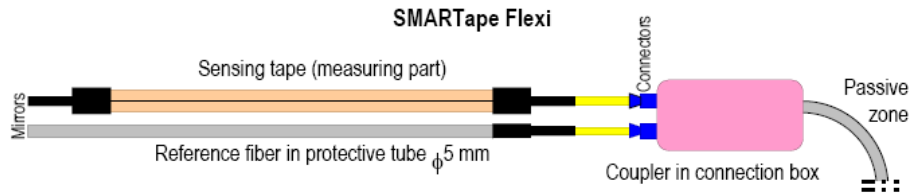


FIGURE 2.17: Schéma du capteur à fibre optique SOFO SMARTape Flexi.

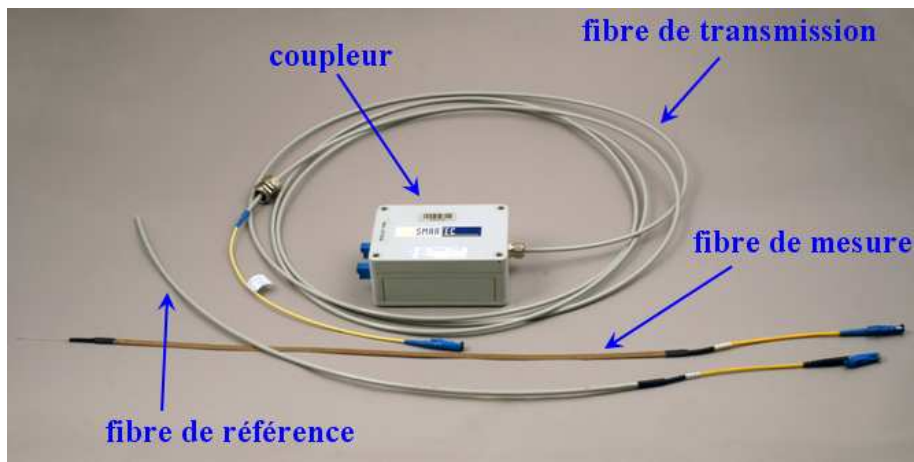


FIGURE 2.18: Capteur à fibre optique SOFO SMARTape Flexi.

Section du CFO	$h=6\text{ mm}$ , $e=0.2\text{ à }0.4\text{ mm}$
Fibre de référence	tube plastique flexible, $d=5\text{ mm}$
Longueur du CFO	de $100\text{ mm}$ à $2\text{ m}$
Type de fixation	collé en surface
Plage de mesure	1.5 % en élongation
	1.5 % en traction
Température	auto compensation (FO de référence à côté)

TABLEAU 2.1: Paramètres de l'ELB-CA SMARTape Flexi.

L'avantage de ce CFO est que, comme les interférences se produisent au niveau du CFO, il est possible de multiplexer plusieurs CFO de longueurs très différentes. Il n'y a plus de problème de plage de mesure cependant l'inconvénient est que le multiplexage en parallèle est obligatoire.

### Interrogateur optique

L'appareil de mesure dynamique SOFO [2], présenté sur la figure 2.19, permet d'interroger les CFO compatibles à des fréquences très élevées (jusqu'à  $10\text{ kHz}$ ). Il possède huit voies de mesure (multiplexage en parallèle). Il est constitué d'un interféromètre Michelson basse-cohérence, dont la longueur d'onde de la source lumineuse vaut  $\lambda=1550\text{ nm}$ , et d'un interféromètre de Mach-Zehnder.

## 2.3 Système de mesure SMARTEC

Les mesures sont relatives et le point de référence est perdu lorsque l'alimentation de l'appareil est coupée ou lorsque le CFO est déconnecté.



FIGURE 2.19: Interrogateur optique SMARTEC (SOFO Dynamic Reading Unit).

Le principe de la mesure est basé sur une démodulation interférométrique (Fig. 2.20), d'où l'absence de ligne à retard et la possibilité de réaliser la mesure simultanée de CFO de longueurs différentes. Cela confère à l'appareil une certaine souplesse qui empêche cependant le multiplexage en série.

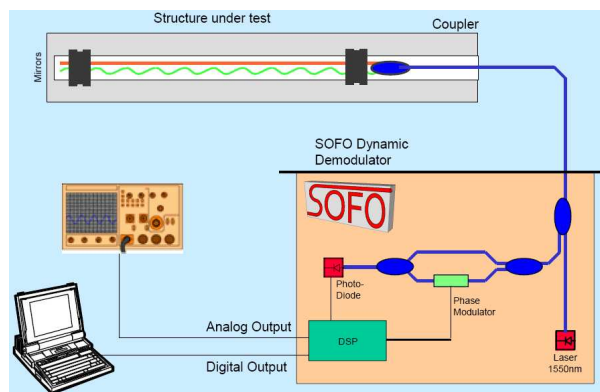


FIGURE 2.20: Schéma du système SMARTEC.

La lumière est émise par une diode laser basse cohérence et est injectée dans la zone passive du CFO en passant par un coupleur 50-50. La lumière passe alors dans l'interféromètre de Michelson, composé des deux fibres du CFO (fibres de référence et de mesure), et est réfléchi vers le système de démodulation, qui est un interféromètre de Mach-Zehnder avec un modulateur de phase actif. La lumière est ensuite récupérée par une photodiode et numérisée. La figure d'interférence obtenue, composée de franges, est analysée en utilisant un système DSP Optiphase, qui permet d'obtenir la variation de phase et donc la différence de chemin optique entre les deux fibres. Pour obtenir huit voies de mesure, la lumière du même laser est divisée avec un coupleur 1x8 permettant ainsi la démodulation simultanée des huit voies, chacune d'entre elles possédant sa propre DSP pour l'analyse du signal.

La bande de fréquence est limitée à  $10\text{ kHz}$  essentiellement à cause de la fréquence de modulation de phase, puisque la DSP est capable de monter jusqu'à  $50\text{ kHz}$ . La résolution du système est limitée par le bruit de la phase au niveau du démodulateur et dépend de la puissance de la lumière réfléchi par les CFO. Apparemment, l'effet dû à la polarisation des ondes est présent mais n'affecte pas la démodulation. La plage de mesure, qui est ici d'environ  $10\text{ mm}$ , est limitée par les caractéristiques de cohérence de la source laser. La plage de vitesse de déformation est déterminée par les capacités de la

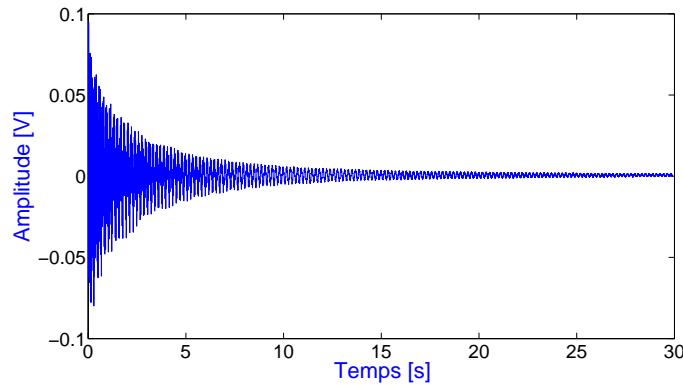
DSP : si plus d'une moitié de frange d'interférence passe dans un cycle de modulation, l'algorithme de comptage de franges ne pourra compter correctement. Les fluctuations thermiques au niveau de l'interféromètre Mach-Zender sont responsables de la faible dérive du système. Comme le modulateur de phase est commun à toutes les voies, il est possible d'utiliser un CFO de référence sur une des huit voies et de soustraire cette mesure aux sept autres.

Les principales caractéristiques de l'appareil sont résumées dans le tableau 2.2.

Bande de fréquences	de 0 à 10 $kHz$
Gamme de mesure	$\pm 5\text{ mm}$ (déformation max.)
Taux de déformation	$\pm 10000\text{ }\mu\text{m/s}$ (vitesse de déformation max.)
Résolution	$0.01\text{ }\mu\text{m}$
Dérivation	$<0.003\text{ }\mu\text{m/s}$ (après une heure)
	$<0.5\text{ }\mu\text{m/jour}$ avec compensation (nb de voies réduit à 7)
Nombre de voies	8 en acquisition simultanée : multiplexage en //

**TABLEAU 2.2: Paramètres d'acquisition.**

Une mesure réalisée par un ELB-CA SMARTape collé sur une poutre E-E soumise à une excitation par choc est présentée sur la figure 2.21. Ce graphe permet notamment de montrer que le niveau de bruit est extrêmement faible avec ce système de mesure comparé à l'appareil FOGALE que nous présenterons en 2.4.



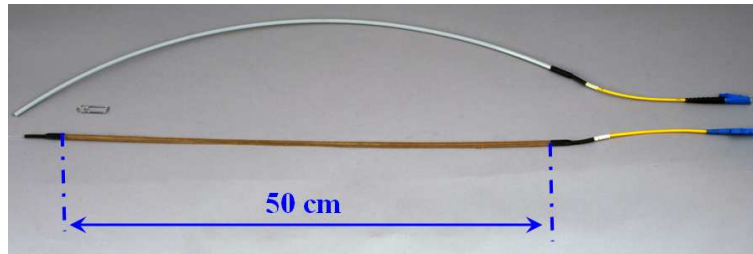
**FIGURE 2.21: Mesure d'un ELB-CA obtenue à partir du système SMARTEC.**

Les domaines d'applications répertoriés sur la présentation de l'appareil [2] sont variés, allant des mesures dynamiques de déformations sous excitations ambiantes telles que le trafic, le vent, les séismes, les vagues..., à l'identification des structures par analyse modale (vibrations ambiantes et forcées) et à la détermination de modes propres et de courbures modales.

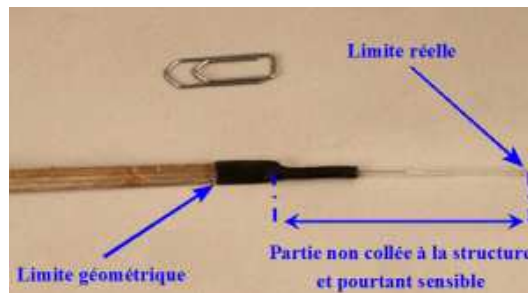
Cependant, il existe très peu de références [4][5] faisant état d'études réalisées avec cet appareil sur les sujets cités ci-dessus et notamment d'analyse modale expérimentale. De plus, elles rapportent des résultats préliminaires mais pas d'études approfondies. D'ailleurs, nous montrerons plus tard au Chapitre 4 que la mesure des ELB-CA ne permet pas de remonter directement aux déformées modales de la structure et que ce ne sont pas exactement les courbures modales qui sont obtenues à partir des ELB-CA.

### 2.3.2 Tests de l'appareil et problèmes rencontrés

Quatre CFO SMARTape de 50 cm étaient à disposition. La figure 2.22 représente le CFO ainsi qu'un zoom au niveau de l'extrémité libre du capteur (non reliée au coupleur).



(a) Capteur SMARTape de 50 cm



(b) Zoom au niveau de l'extrémité

FIGURE 2.22: Positionnement du miroir à l'extrémité du CFO SMARTape.

Sur la figure 2.22(a), il est indiqué que les 50 cm du CFO se situe entre les protections (en noires sur la photo), zone du capteur (en marron sur la photo) qui est collée en surface de la structure à étudier. Or, le miroir réfléchissant du CFO se situe à son extrémité libre (Fig. 2.22(b)). Ceci implique que la partie cylindrique plus fine à l'extrémité du capteur est mesurante : si celle-ci vient à vibrer, elle entraînera une modification de la mesure.

La même limitation se situe à l'autre extrémité du capteur au niveau du coupleur. La figure 2.23 montre l'autre extrémité du capteur, reliée au coupleur, ainsi que la connection de la fibre de référence au même coupleur (boîtier sur la photo). En effet, la FO de raccord entre les fibres de référence et de mesure et le coupleur, que nous pensions être une zone passive, se révèle être en fait, elle aussi, mesurante.

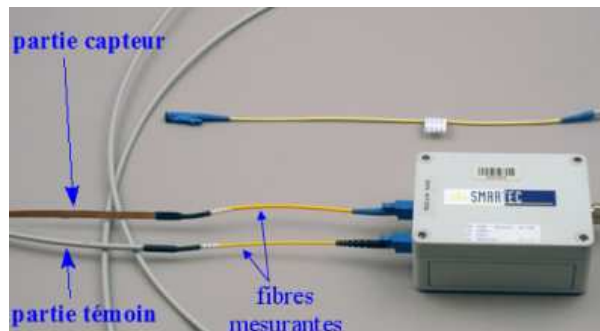


FIGURE 2.23: Connexion des fibres de référence et de mesure au coupleur.

Au final, la longueur réelle de la base de mesure n'est pas connue précisément. Par ailleurs, ne maîtrisant pas les mouvements des raccords et de l'extrémité de la fibre de mesure, il paraît difficile d'affirmer avec certitude que la mesure n'est pas erronée.

Notons également que la fibre de référence constitue un capteur en elle-même. Ce n'est pas le cas d'autres CFO longue base proposés par la société SMARTEC [6], pour lesquels la fibre de référence est située dans la boîte de connexion avec le coupleur. La difficulté est alors d'approcher suffisamment le coupleur de la structure à étudier pour que toute la zone sensible soit fixée à la structure, tout en isolant le bras de référence de toute vibration.

Outre cette limitation intrinsèque sur la détermination de la base de mesure réelle des capteurs SMARTape Flexi, nous avons également observé que lorsque nous effectuions la mesure simultanée de plusieurs CFO, une augmentation du niveau de bruit se produisait au cours de la mesure et se répétait (Fig. 2.24) sans que nous puissions en déterminer la cause. Ceci avait pour effet de détériorer quelque peu la qualité de la TF du signal de mesure.

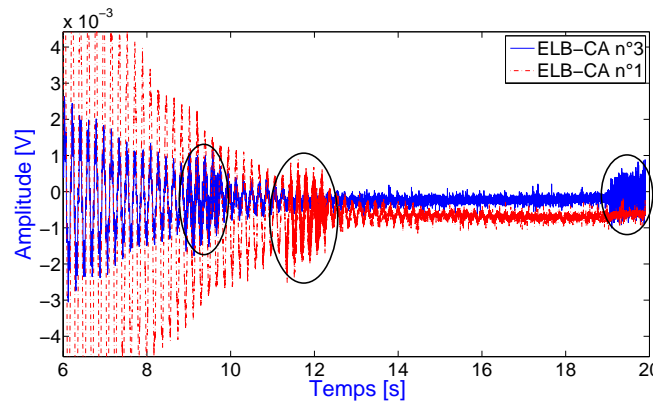


FIGURE 2.24: Problème de bruit rencontré avec le système SMARTEC.

### 2.3.3 Avantages et inconvénients du système SMARTEC

Pour résumer, les principaux avantages et inconvénients du système SMARTEC sont :

- **Avantages**
  - Fréquence d'échantillonnage élevée : jusqu'à 10 kHz.
  - Très grande précision : 0.01  $\mu\text{m}$ .
  - Acquisition simultanée de plusieurs voies.
  - Gamme de mesure importante :  $\pm 5 \text{ mm}$ .
- **Inconvénients**
  - Base de mesure non connue précisément.
  - Fibre de référence mesurante.
  - Fibre de raccord mesurante.
  - CFO intrusif (notamment à cause du coupleur), inadapté pour les structures légères.
  - Multiplexage en parallèle mais pas en série.

## 2.4 Prototype FOGALE Nanotech

La société FOGALE nanotech est une société spécialisée dans les systèmes de mesure optiques pour divers champs d'application (biologie, astronomie, génie civil...). Elle a participé avec le LCPC, dans le cadre du projet EOLBUS, au développement d'un système de mesure optique en statique (interrogateur optique + CFO) pour la surveillance des ouvrages d'art. Au cours de la thèse, la division Métrologie et Instrumentation du LCPC, dont je faisais partie, a fait l'acquisition d'un prototype d'appareil de mesure optique, réalisée par la société FOGALE nanotech, permettant de réaliser des mesures en dynamique à partir d'un ELB-CA. C'est ce système que je vais présenter dans cette partie.

### 2.4.1 Présentation du système de mesure

#### Capteur à fibre optique

Le CFO qui sera utilisé durant la thèse est constitué d'une FO monomode comportant une cavité Fabry-Pérot (Fig. 2.25 et 2.26) réalisée en inscrivant deux miroirs semi-réfléchissants dans la fibre (Fig. 2.26(d)). Ces miroirs peuvent, par exemple, être réalisés par abouttement de deux FO préalablement traitées avec de fines couches de diélectriques afin de choisir les réflectivités des miroirs désirées ( $r_1$  et  $r_2$ ).

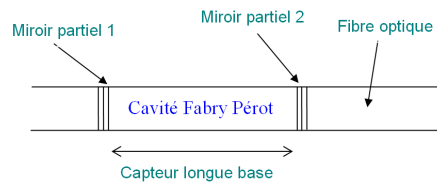
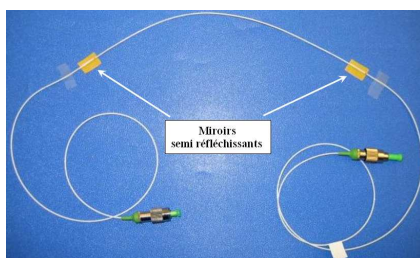
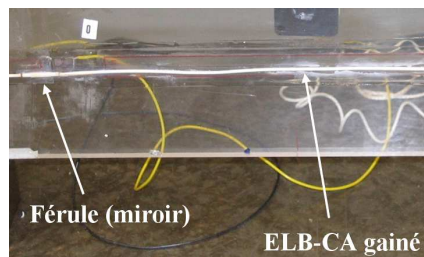


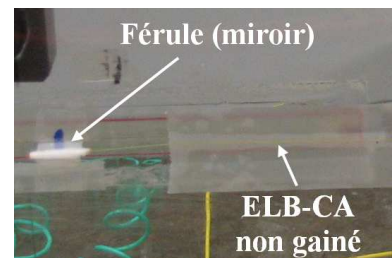
FIGURE 2.25: Schéma du CFO FOGALE.



(a) Vue d'ensemble



(b) ELB-CA FOGALE gainé



(c) ELB-CA FOGALE non gainé



(d) Miroir ou férule

FIGURE 2.26: Photos du CFO FOGALE.

Le capteur agit comme un interféromètre Fabry-Pérot (cf 2.2.6). L'ELB-CA FOGALE utilisé au cours de la thèse étant constitué d'une fibre monomode, un seul rayon lumineux se propage dans la fibre et donc l'angle d'incidence du rayon sur le miroir semi-réfléchissant est nul (d'où  $\theta = 0$  sur la



Fig. 2.10). La différence de marche vaut simplement  $\delta = 2nl$ ,  $l$  étant la longueur de la cavité donc la longueur du capteur. On s'intéresse alors aux interférences entre le rayon réfléchi partiellement sur la première interface et celui effectuant un aller-retour à l'intérieur de la cavité et ressortant partiellement au niveau de cette même interface (Fig. 2.27).

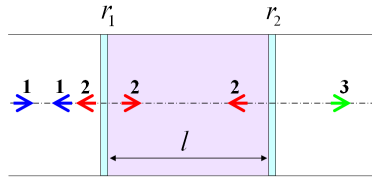


FIGURE 2.27: ELB-CA FOGALE : cavité Fabry-Pérot.

Dans notre cas, la réflectivité des miroirs est assez faible (la réflectivité globale des ELB-CA est de l'ordre de 10 à 30 %, soit des réflectivités de 5 à 15 % par miroir), la finesse ne sera donc pas très élevée. Ce choix est effectué pour que suffisamment de puissance lumineuse traverse la cavité afin de pouvoir multiplexer d'autres CFO, c'est-à-dire les mettre en série sur une même fibre. Pour cela, il faut donc que la cavité Fabry-Pérot ne provoque pas trop de pertes. En général, les pertes pour les ELB-CA que nous avons achetés se situent aux alentours de 3 ou 4 dB pour la longueur d'onde  $\lambda=1310 \text{ nm}$ .

### Interrogateur optique

L'unité de mesure, le système LISE-ED4 [10], est basée sur le principe d'un interféromètre de Michelson double étage (voir annexe A). La configuration de l'appareil est similaire à celle présentée dans [7]. Elle comprend un photodétecteur, un bras de référence, un bras mesurant constitué d'un miroir mobile scannant, à une fréquence de 50 Hz, une distance  $\Delta X$  de quelques mm (de -2 mm à + 2 mm, soit 4 mm), qui correspond en fait à la plage de mesure de l'appareil, et une diode laser super-luminescente (SLED) dont la longueur d'onde est de 1310 nm (proche infrarouge). Les bras de référence et mesurant constituent la ligne à retard de l'appareil. La source est faiblement cohérente et possède un spectre d'émission dont la largeur spectrale vaut quelques dizaines de nm. L'appareil possède deux voies de mesure et la ligne à retard comprend plusieurs bras de référence interchangeables permettant d'interroger séparément des ELB-CA de longueurs différentes (20 cm, 50 cm et 80 cm). La figure 2.28 présente une photo de l'appareil FOGALE et le tableau 2.3 répertorie ses principales caractéristiques.

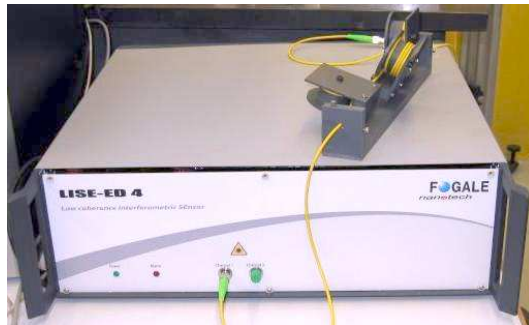


FIGURE 2.28: Interrogateur optique FOGALE.



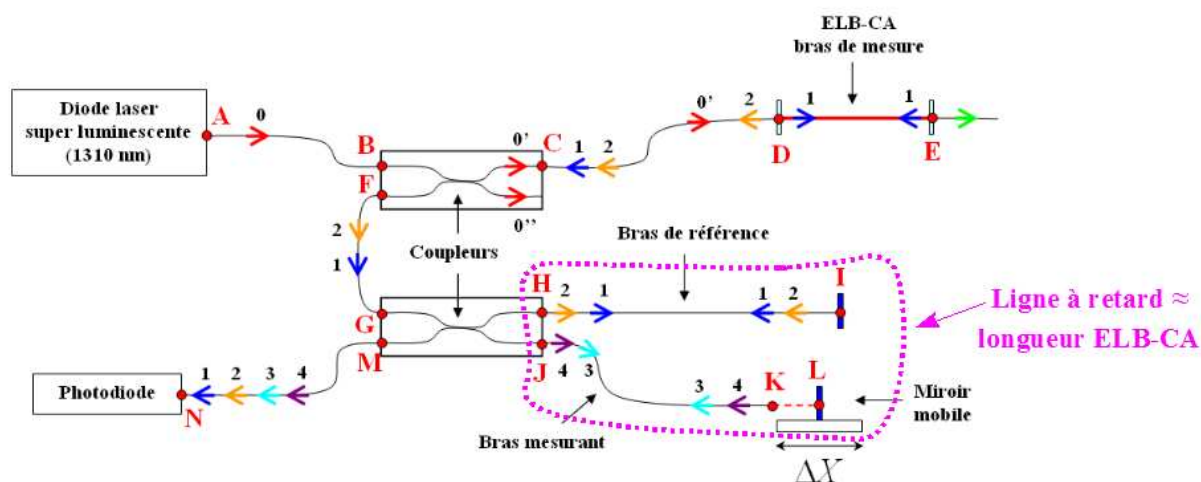
Fréquence d'échantillonnage	100 Hz ( $2 \times 50$ Hz)
Plage de mesure	$\pm 2$ mm (allongement max.)
Résolution	0.8 $\mu$ m
Nombre de voies	2 en acquisition simultanée (multiplexage parallèle)

**TABLEAU 2.3: Paramètres d’acquisition.**

L'interféromètre de Michelson est un système se prêtant parfaitement à la mesure de distance avec des montages relativement simples, le déplacement d'un miroir permettant d'égaliser les chemins optiques des deux bras et d'obtenir ainsi l'information de distance (cf rappels en 2.2.6). Dans la pratique, un système basé sur un simple interféromètre de Michelson possède deux inconvénients majeurs :

- la longueur de la fibre de mesure est nécessairement fixe afin de pouvoir équilibrer les bras de l'interféromètre. Si l'utilisateur désire effectuer une mesure éloignée du système, il faudra allonger le bras de référence de la même valeur.
- le système dans cette configuration est très sensible à la polarisation (cf rappel en 2.2.3). Il existe un cas pour lequel les signaux des deux bras peuvent présenter une polarisation perpendiculaire entraînant l'absence d'interférence sur le détecteur.

L'appareil FOGALE s'appuie sur le principe d'un interféromètre de Michelson double étage dont la configuration est représentée sur la figure 2.29. Il permet de mesurer le chemin optique entre les miroirs partiels inscrits dans la FO de mesure (d'une certaine longueur arbitraire) désignée sous le nom « capteur ». Comme la FO est un guide d'onde, la mesure correspond à l'intégrale de l'abscisse curviligne et non à la distance euclidienne entre les deux miroirs.



**FIGURE 2.29: Schéma de principe d'un Michelson double étage.**

La lumière émise par la SLED est séparée en deux par un coupleur 50-50. Une moitié illumine le capteur ou bras de mesure et l'autre moitié la ligne à retard composée du bras de référence et du bras mesurant. Le bras de mesure constitue en fait le premier interféromètre. La partie de la lumière diffusée dans le bras de mesure subit plusieurs réflexions lors de son trajet dans la fibre de mesure : une au niveau de chacun des miroirs semi-réfléchissants. Ces deux ondes ne peuvent pas interférer du fait du déphasage important introduit par la différence de chemin optique, qui est proportionnelle à

la longueur de l'ELB-CA. Le signal composé des deux ondes déphasées est ensuite introduit dans le second interféromètre qui va permettre de décoder l'information de distance.

Le déplacement du miroir du bras mesurant, monté sur un étage mobile (système électromagnétique) et dont la position est déterminée grâce à une règle optique, permet de remettre en phase les signaux réfléchis provenant du bras de mesure et de la ligne à retard, qui sont recombinaés sur un photodétecteur. Quand le temps de décalage (c'est-à-dire la phase) entre les deux réflexions aux extrémités de la cavité Fabry-Pérot (miroirs partiels) est reproduit dans la ligne à retard, un pic d'interférence apparaît [8][9]. La détermination est absolue (et non à  $2\pi$  près) car la source lumineuse est choisie peu cohérente : au-delà de la longueur de cohérence de la source (cf 2.2.5), c'est à dire quelques  $\mu m$ , les franges d'interférence sont brouillées [9]. Connaissant précisément la position du miroir, la longueur de la cavité peut alors être déterminée. Tout changement de longueur du capteur correspondra à une nouvelle position du miroir mobile pour laquelle les interférences sont constructives (c'est à dire à une nouvelle longueur de la ligne à retard).

Lorsque la structure étudiée subit des déformations, que ce soit en traction ou en compression, la fibre collée ou incorporée à la structure s'allonge ou se rétracte en conséquence. La mesure ainsi obtenue est la distance entre les miroirs le long de la FO. Les perturbations dues aux effets thermiques peuvent être corrigées à l'aide d'une jauge témoin ou d'autres moyens de compensation thermique (par exemple en plaçant le bras de référence dans la même ambiance thermique que le bras de mesure, ce qui est le cas du capteur SMARTape présenté en 2.3.1).

Le détail du calcul des ondes lumineuses qui interfèrent et de l'intensité recueillie au niveau de la photodiode est présenté en annexe A. Il est démontré que les seules longueurs influant sur le phénomène d'interférence sont

$$\begin{aligned} DE &= L + \Delta L \\ KL &= X + \Delta X \\ HI &= l_4 \\ JK &= l_5 \end{aligned} \quad (2.22)$$

où  $L$  est la longueur de l'ELB-CA à l'origine,  $\Delta L$  la variation de longueur du capteur,  $l_4$  la longueur de fibre du bras de référence,  $l_5$  la longueur de fibre du bras mesurant,  $X$  la distance d'espace libre entre la sortie de la fibre du bras mesurant et le miroir mobile et  $\Delta X$  la distance d'espace libre due au déplacement du miroir mobile. Les longueurs  $l_4$ ,  $l_5$ ,  $X$  et  $\Delta X$  constituent la ligne à retard permettant de déterminer la variation de longueur de l'ELB-CA.

Pour pouvoir obtenir des interférences au niveau du détecteur, le réglage des longueurs choisi est tel qu'il y ait égalité des chemins optiques de l'ELB-CA et de la ligne à retard (chemin optique du bras mesurant + du bras de référence), c'est-à-dire

$$n_v l_4 - n_v l_5 - n_a X + n_v L = 0 \quad (2.23)$$

où  $n_v$  est l'indice du verre égal à 1.46 et  $n_a$  l'indice de l'air égal à 1.

Avec ce réglage, la mesure réalisée par l'appareil FOGALE est définie par

$$\Delta X = n_{ELB} \Delta L + n_\varepsilon L \quad (2.24)$$

avec  $n_{ELB} = n_v + n_\varepsilon$  l'indice de la partie de la fibre subissant des déformations, c'est-à-dire l'ELB-CA. Le terme de dépendance de l'indice de la fibre à la déformation,  $n_\varepsilon$ , sera explicité au Chapitre 3.

Dans le paragraphe qui va suivre, nous allons présenter la mise en oeuvre pratique, au niveau de l'appareil, de ce principe de mesure. Pour cela nous allons mettre en avant les principales caractéristiques de la mesure réalisée par l'appareil FOGALE.

### 2.4.2 Caractéristiques de la mesure réalisée par l'appareil

Nous allons présenter dans ce paragraphe les aspects spécifiques de la mesure réalisée par l'appareil FOGALE, notamment le fait que le pas de temps d'acquisition soit variable et que le bruit de la mesure soit assez important.

#### Pas de temps variable

En théorie, si les longueurs  $l_4$ ,  $l_5$  et  $X$  sont définies de telle sorte que l'équation (2.23) soit vérifiée et que l'on suppose que la course du miroir est un signal triangulaire<sup>1</sup> alors, lorsque la structure est au repos ( $\Delta L$  est nul), les interférences auront lieu pour une même valeur de la course du miroir  $\Delta X$  qui sera, du fait du réglage réalisé,  $\Delta X = 0$  (Fig. 2.30). La fréquence de vibration du miroir monté sur un étage mobile électromagnétique est égale à  $50\text{ Hz}$ . Dans ce cas, le pas de temps entre les interférences de chaque rampe (montante et descendante) sera constant, égal à  $0.02\text{ s}$ , et celui entre chaque interférence vaudra donc  $0.01\text{ s}$ . Au final, le signal en sortie sera échantillonné à  $100\text{ Hz}$ .

En pratique, il s'avère difficile de régler très précisément l'appareil pour que l'équation (2.23) soit vérifiée. Le déphasage introduit par le réglage des longueurs  $l_4$ ,  $l_5$  et  $X$  n'est pas parfaitement identique à celui des ondes provenant de l'ELB-CA :

$$n_v l_4 - n_v l_5 - n_a X + n_v L = \phi_0 \quad (2.25)$$

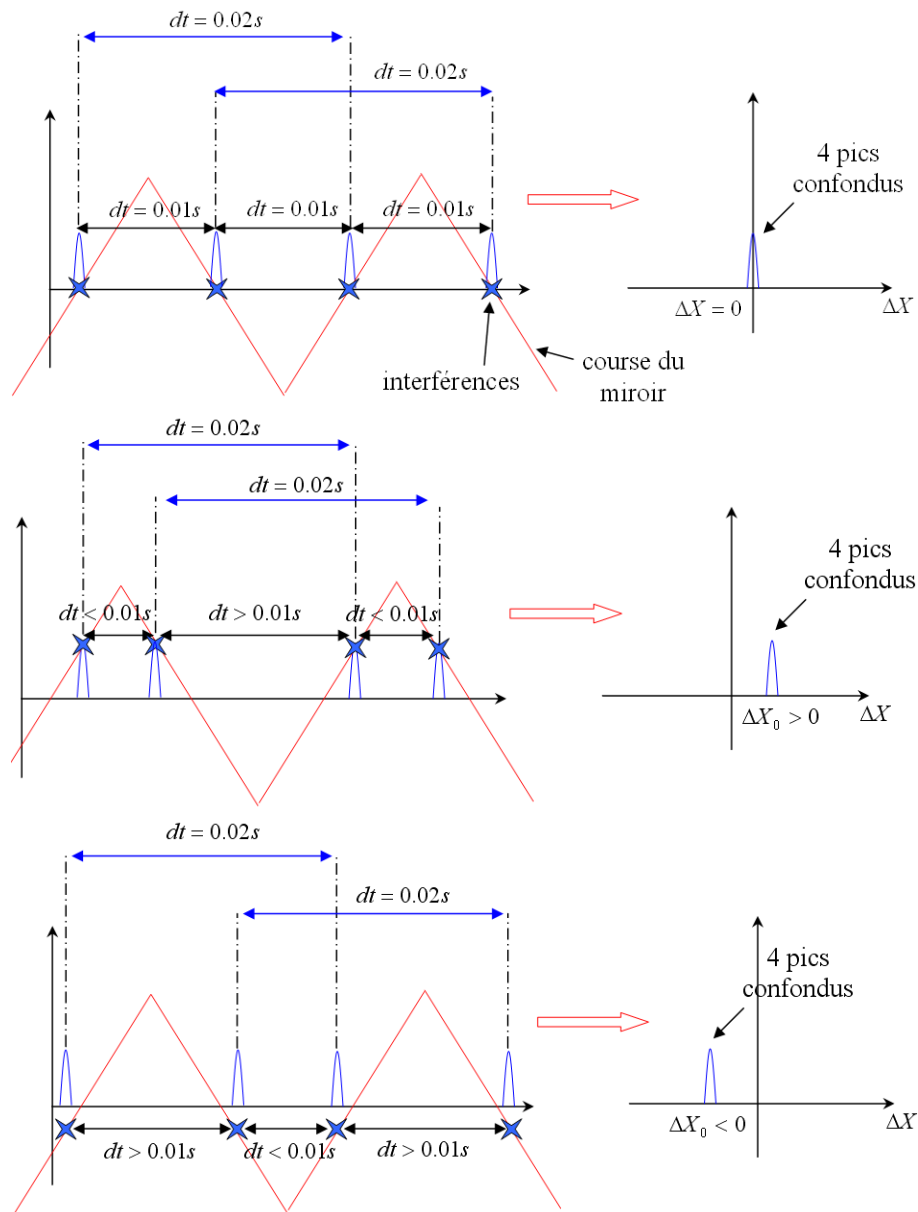
Un léger déphasage  $\phi_0$  subsiste donc et va être compensé par le déplacement du miroir  $\Delta X$ . Au maximum d'interférence, on aura alors

$$n_v l_4 - n_v l_5 - n_a (X + \Delta X) + n_v L = 0 \Rightarrow \Delta X = \phi_0 \quad (2.26)$$

Suivant que le déphasage restant après le réglage des longueurs  $l_4$ ,  $l_5$  et  $X$  soit positif ou négatif, les interférences n'auront plus lieu pour  $\Delta X = 0$  mais pour les valeurs de la course du miroir, respectivement  $\Delta X > 0$  et  $\Delta X < 0$  (Fig. 2.30). Dans ce cas là, le pas de temps entre les interférences de chaque rampe (montante et descendante) sera toujours égal à  $0.02\text{ s}$ , par contre celui entre deux interférences successives va varier (alternance entre  $dt < 0.01\text{ s}$  et  $dt > 0.01\text{ s}$ ) en fonction de la distance  $\Delta X$  parcourue par le miroir pour combler le déphasage restant. Plus le déplacement du miroir sera important, plus la disparité entre deux pas de temps successifs sera importante ( $dt \ll 0.01\text{ s}$  puis  $dt \gg 0.01\text{ s}$ ). Bien entendu, si le déphasage restant est trop important et correspond à un déplacement du miroir supérieur à sa course maximale  $\pm 2\text{ mm}$ , il n'y aura plus d'interférences.

---

<sup>1</sup>Signal composé d'une rampe montante de  $-d$  à  $+d$  et d'une rampe descendante de  $+d$  à  $-d$



**FIGURE 2.30: Variation du pas de temps en fonction de  $\Delta X$ .**

*Retenons alors que l'acquisition des points de mesure par l'appareil FOGALE se fera à intervalles de temps non constants.*

Les courbes expérimentales du déplacement du miroir et de l'intensité lumineuse obtenue au niveau de la photodiode sont présentées pour plusieurs périodes sur la figure 2.31. Pour une plage de déplacement du miroir de  $4\text{ mm}$  et une fréquence de vibration de  $50\text{ Hz}$ , un signal triangulaire ne peut être réalisé parfaitement. Le signal obtenu s'en approche tout de même avec des zones linéaires au milieu de la plage de mesure. Par contre, au niveau des extrémités de la plage de mesure, proche de  $-2\text{ mm}$  et  $+2\text{ mm}$ , le signal n'est plus linéaire (passage d'un front à l'autre). On pourrait penser que cela réduit la plage de mesure cependant, pour pouvoir effectuer la correspondance entre l'instant du maximum d'interférence et la position du miroir équivalente, il suffit que le déplacement du miroir

soit suffisamment linéaire au niveau de la zone d'interférence ( $\approx 30 \mu m$ ). Mieux vaut tout de même s'assurer que les interférences se produisent aux alentours du milieu de la plage de mesure pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïtés sur le résultat obtenu.

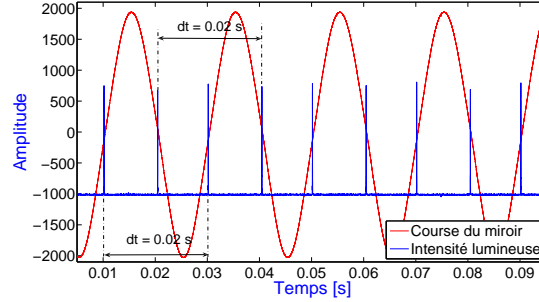


FIGURE 2.31: Pas de temps de la mesure d'un ELB-CA par l'appareil FOGALE.

Le pas de temps est donc toujours égal à  $0.02 \text{ s}$  pour les instants où les maxima d'interférence de chaque rampe (montante et descendante) sont détectés cependant, du fait de la précision de l'appareil de mesure et de l'algorithme de détection du maximum de l'enveloppe d'interférence, ces signaux sont légèrement bruités (Fig. 2.32).

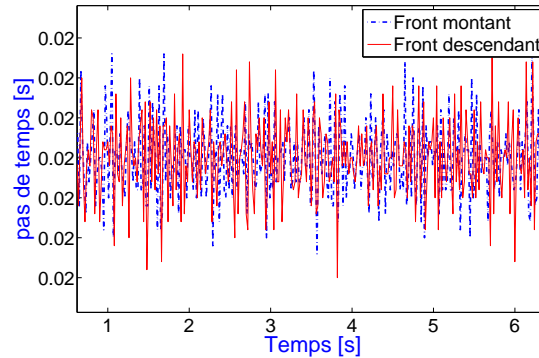


FIGURE 2.32: Pas de temps de la mesure d'un ELB-CA collé sur une poutre au repos.

Regardons maintenant comment le système se comporte lorsque la structure sur laquelle est collé l'ELB-CA est mise en mouvement, à l'aide d'un choc par exemple, et que la longueur de l'ELB-CA varie (Fig. 2.33).

Lorsque la structure est sollicitée, l'ELB-CA va s'allonger ou se rétracter en conséquence. Le réglage des longueurs  $l_4$ ,  $l_5$  et  $X$  étant effectué pour la structure au repos, lorsque la longueur de l'ELB-CA va changer, le déphasage des ondes provenant de l'ELB-CA va également changer et nous aurons alors au maximum d'interférence, d'après (2.24) et (2.26) :

$$\Delta X(t) = \phi_0 + n_{ELB}(t)\Delta L(t) + n_\varepsilon(t)L \quad (2.27)$$

Le pic d'interférence va donc se déplacer en fonction de la variation de longueur du capteur  $\Delta L(t)$ . Pour le front montant du miroir (Fig. 2.33), lorsque le capteur s'allonge, le pic d'interférence va se déplacer vers la droite, un déplacement du miroir plus important étant nécessaire pour combler le

déphasage introduit par l'allongement. A l'inverse, lorsqu'il se rétracte, il se déplacera vers la gauche, le déphasage étant moindre.

Pour le front descendant, c'est le strict opposé. Lorsque le capteur s'allonge, le pic d'interférence se déplacera vers la gauche, puisque la position du miroir nécessaire à combler le déphasage sera atteinte plus tôt du fait que le miroir se déplace de  $+2 \text{ mm}$  à  $-2 \text{ mm}$ . Lorsque le capteur se rétracte, le pic d'interférence se déplacera vers la droite.

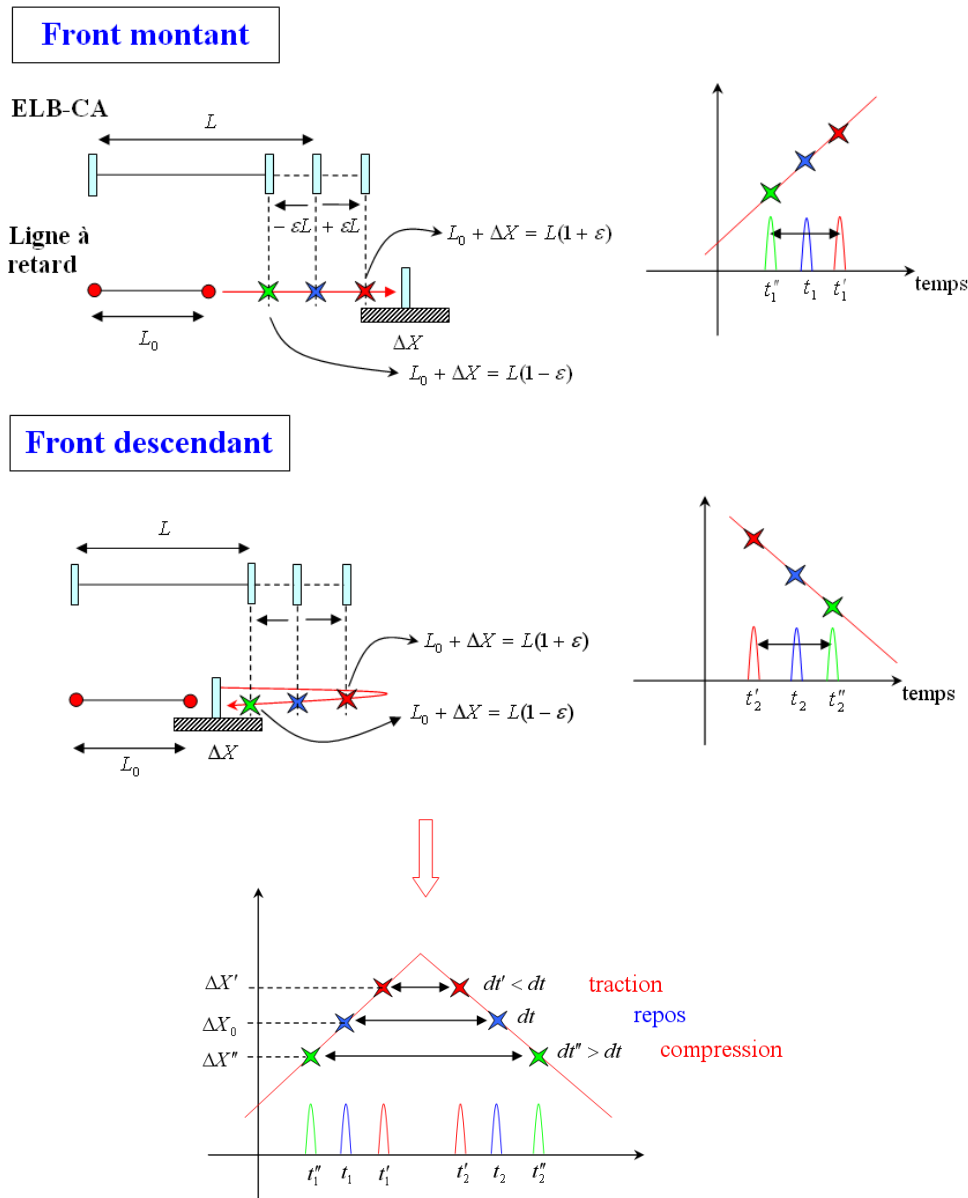
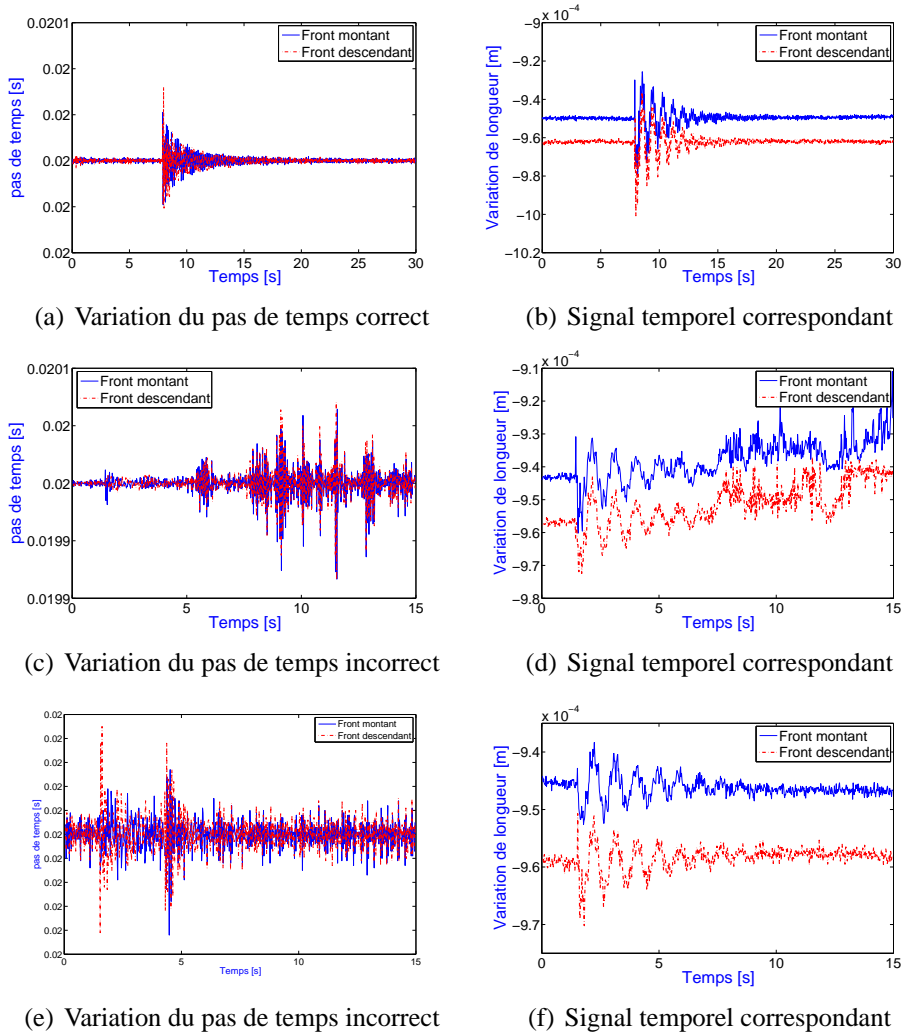


FIGURE 2.33: Interrogateur optique FOGALE.

Pour une structure excitée par un choc, la réponse vibratoire se rapproche de la réponse impulsionnelle : elle va s'amortir de façon exponentielle au cours du temps. La courbe représentant l'évolution du pas de temps des mesures réalisées par l'appareil FOGALE aura la même allure que le signal de réponse de l'ELB-CA, c'est-à-dire que le pas temps va être maximal au moment du choc et va s'amortir petit à petit.

En effet, lorsque le capteur est en traction, il a été expliqué que les pics d'interférence se déplaçaient vers la droite pour le front montant et vers la gauche pour le front descendant. Ceci implique une diminution du pas de temps. Inversement, lorsque le capteur est en compression, le pas de temps augmente. Lors d'une excitation par choc, le capteur va être sollicité en traction et en compression avec des amplitudes qui vont décroître jusqu'à s'amortir complètement. On observera donc le même type de courbe pour l'évolution du pas de temps.

Quelques exemples d'évolution du pas de temps sont présentés sur la figure 2.34, ainsi que les signaux de mesure temporels de l'ELB-CA qui correspondent.



**FIGURE 2.34:** Exemples de courbes représentant la variation du pas de temps pour les fronts montant et descendant.

Sur la figure 2.34(a), l'évolution du pas de temps est bien similaire à l'allure du signal temporel de l'ELB-CA (Fig. 2.34(b)).

Au cours de la thèse et après quelques mois d'utilisation, il a pu apparaître des dysfonctionnements majeurs illustrés sur les figures 2.34(c) et 2.34(d), liés à l'insertion de poussières métalliques au niveau de l'étage mobile électromagnétique sur lequel le miroir est fixé. Du fait du magnétisme, les poussières ont été aimantées et se sont introduites au niveau de l'étage mobile. Cela a pour effet de

perturber fortement le fonctionnement du miroir et par la même occasion de dégrader la qualité de la mesure qui devient inexploitable.

Enfin, sur la figure 2.34(f), la mesure paraît correcte cependant l'évolution du pas de temps (Fig. 2.34(e)) n'est pas satisfaisante. Cela donne l'impression d'un deuxième choc à  $t=4.5$  s, ce qui n'est pas le cas.

*L'allure du pas de temps est un critère permettant de définir si une mesure est correcte ou non pour une excitation par choc.*

Par ailleurs, il apparaît sur les figures 2.34(b), 2.34(d) et 2.34(f) que les mesures associées aux fronts montant et descendant du miroir sont décalées de quelques  $\mu m$  (entre 15 et 20  $\mu m$ ). Nous reviendrons sur ce point par la suite.

### Multiplexage en série

Du fait de la technologie choisie pour la conception des capteurs (miroirs semi-réfléchissants), il est possible de multiplexer les ELB-CA, c'est à dire de les mettre en série sur une seule voie de mesure. Une seule FO pourra donc comprendre plusieurs ELB-CA, ce qui n'est pas le cas des CFO SMARTape (cf 2.3.1).

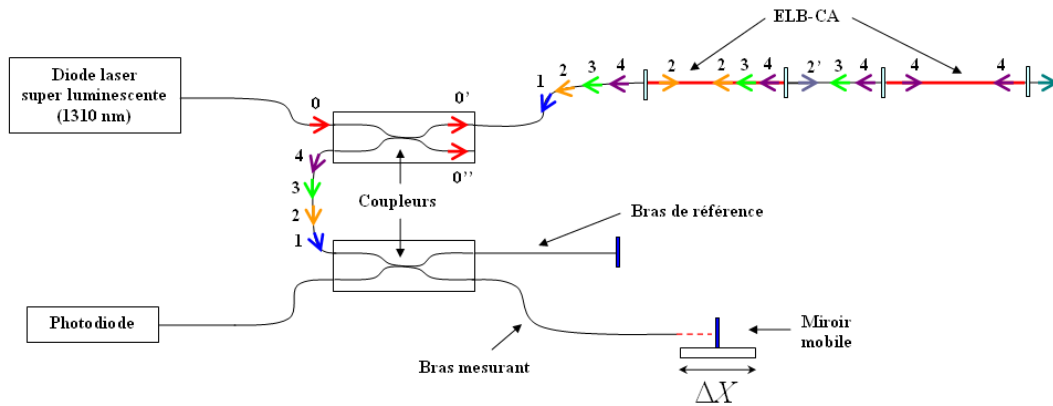


FIGURE 2.35: Multiplexage en série des ELB-CA sur une voie de l'appareil de mesure FOGALE.

Le détail des calculs des ondes lumineuses qui interfèrent et qui permettent de remonter à l'information désirée, c'est à dire la variation de longueur des ELB-CA, est présenté en annexe A.

Soient  $L_1 + \Delta L_1$  et  $L_2 + \Delta L_2$  avec  $L_2 = L_1 + \varepsilon$ , les longueurs respectives des deux ELB-CA et  $l_7$  la distance entre les deux capteurs. Alors, en supposant que  $l_7 \gg L_1$  et  $l_7 \gg L_2$ , nous aurons deux pics d'interférence, un pour chaque capteur, dont les maxima seront obtenus pour les positions du miroir suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta X_1 &= n_{ELB1} \Delta L_1 + n_\varepsilon L_1 \\ \Delta X_2 &= \phi_1 + n_{ELB2} \Delta L_2 + n_\varepsilon L_2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

où  $\phi_1$  est le déphasage introduit par la différence de longueur entre les deux capteurs, égal à  $n_v(L_2 - L_1)$ .



Généralisons l'expression de l'intensité  $I$  (cf annexe A) pour  $N$  capteurs multiplexés. En sortie du premier coupleur, nous aurons  $2N$  ondes et ensuite au niveau de la photodiode, après passage dans la ligne à retard (bras de référence + bras mesurant),  $4N$  ondes. L'intensité obtenue au niveau du détecteur sera donc

$$I_D = (4N - 1) \sum_{i=1}^{4N} I_i + 2 \sum_{i=1}^{4N} \sum_{j=i+1}^{4N-1} \sqrt{I_i I_j} \cdot \cos \left[ \frac{2\pi \delta_{ij}}{\lambda} \right] \quad (2.29)$$

En posant  $L_k$  et  $\Delta L_k$ , respectivement la longueur et la variation de longueur du capteur n° $k$ , les  $N$  différences de marches qui s'annulent seront définies par :

$$\delta_k = n_v l_4 - n_v l_5 - n_a(X + \Delta X) + n_{ELB_k}(L_k + \Delta L_k) \quad k = 1 \dots N \quad (2.30)$$

et les maxima des pics d'interférence seront déterminés pour les positions du miroir suivantes :

$$\Delta X_k = \phi_k + n_{ELB_k} \Delta L_k + n_\varepsilon L_k \quad k = 1 \dots N \quad (2.31)$$

où  $\phi_k$  est le déphasage introduit par la différence de longueur entre le capteur n° $k$  et le premier capteur égal à  $n_v(L_k - L_1)$  (identique à un offset).

La figure 2.36 représente la courbe qui serait obtenue, en théorie, pour trois ELB-CA mis en série sur une même fibre : dans l'ordre, ELB-CA n°1 de longueur  $L_1$ , ELB-CA n°2 de longueur  $L_2 > L_1$  et ELB-CA n°3 de longueur  $L_3 < L_1$ .

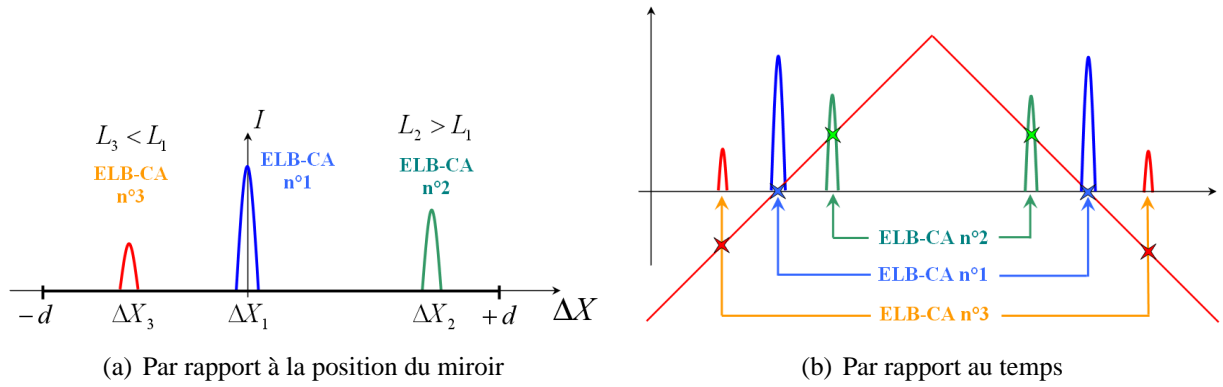


FIGURE 2.36: Amplitudes de trois ELB-CA multiplexés.

Cependant, comme nous l'avons vu précédemment, le réglage de l'appareil sur le premier capteur n'est pas parfait (2.26) et nous aurons alors la figure d'interférence correspondant au premier capteur qui ne sera pas centré en  $\Delta X = 0$ .

Les limitations et les problèmes pouvant survenir pour le multiplexage en série seront évoqués en 2.4.3.

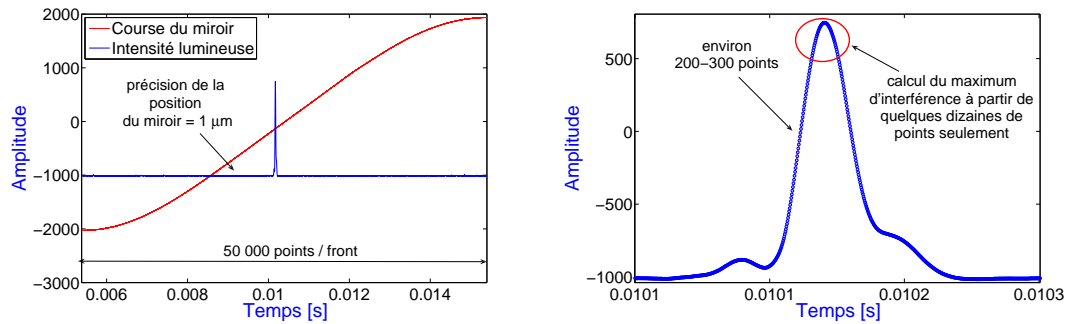
### Bruit de la mesure

L'acquisition du signal de position du miroir est réalisée par une carte National Instrument à la fréquence de 5 MHz. La fréquence de vibration du miroir est de 50 Hz, donc en une seconde 50

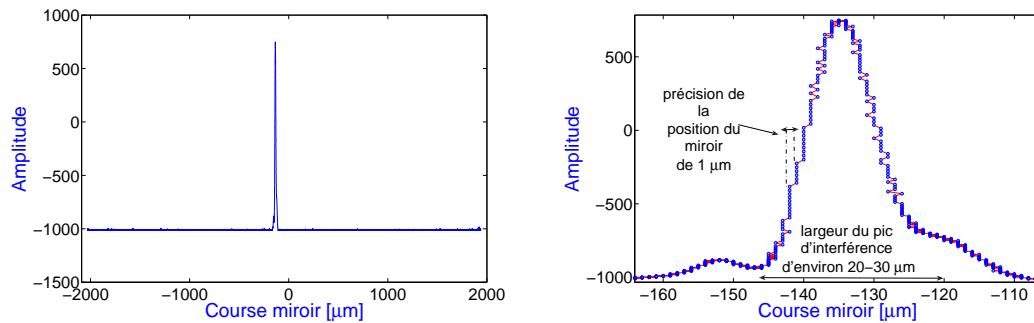
fronts montants et descendants sont effectués, soit 100 fronts au total. Il y a donc 50000 points d'acquisition pour un front, correspondant à une plage de 4 mm, soit une précision de 80 nm. Cependant, la précision sur la détermination de la position du moteur est de 1  $\mu\text{m}$ <sup>1</sup> et est donc limitante. Dans l'absolu, la précision de l'appareil de mesure sera donc 1  $\mu\text{m}$ . Elle peut cependant être légèrement améliorée par l'algorithme de détermination du maximum de l'enveloppe de la figure d'interférence implémenté par FOGALE sous LabVIEW. Le bruit de mesure de l'appareil FOGALE sera alors de 0.8  $\mu\text{m}$ , ce qui est assez important comparé à celui de l'appareil SMARTEC qui vaut 0.01  $\mu\text{m}$ . Il y donc presque un facteur 100 entre les bruits de mesure des deux appareils.

Le signal d'interférence (cf Fig. 2.6 en 2.2.6) apparaît sur le détecteur seulement lorsque la différence de chemin optique entre les deux bras de l'interféromètre est inférieure à la longueur de cohérence de la source. L'enveloppe des interférences est donc déterminée à partir de quelques dizaines de périodes d'oscillations des interférences, soit quelques dizaines de  $\mu\text{m}$  de largeur et donc plusieurs centaines de points de discrétisation.

La figure 2.37 présente une partie du signal d'enveloppe expérimental, obtenu à partir de l'intensité lumineuse reçue par la photodiode, pour lequel une figure d'interférence est observée. L'enveloppe des interférences est représentée de deux manières différentes, l'une par rapport au temps (Fig. 2.37(a) et 2.37(b)) et l'autre par rapport à la position du miroir (Fig. 2.37(c) et 2.37(d)).



(a) Enveloppe des interférences en fonction du temps (b) Enveloppe des interférences en fonction du temps - zoom



(c) Enveloppe des interférences en fonction de la position du miroir (d) Enveloppe des interférences en fonction de la position du miroir - zoom

**FIGURE 2.37: Figures d'interférence en fonction du temps et de la course du miroir.**

La figure 2.37(d) montre clairement que la précision de la position du miroir est le paramètre

<sup>1</sup>Le bruit analogique du capteur de position du moteur électrodynamique est inférieur au bruit de quantification sur 12 bits de la carte d'acquisition, qui est donc limitant et permet d'obtenir cette précision de 1  $\mu\text{m}$ .

limitant de la mesure.

*Le bruit de mesure de l'appareil FOGALE est assez important et vaut environ  $0.8 \mu m$ , ceci quelle que soit la longueur de l'ELB-CA interrogé.*

### 2.4.3 Problèmes et limites de l'appareil

Dans ce paragraphe, nous allons énoncer les problèmes et limites rencontrés lors de l'utilisation de l'appareil de mesure FOGALE. Les solutions proposées seront présentées en 2.5. Comme l'appareil appartient à la Division Métrologie et Instrumentation, les outputs sont plus nombreux que pour l'appareil SMARTEC car nous avons accès à une partie des fichiers de programmation de l'interface d'acquisition. Ainsi, les problèmes rencontrés sont plus détaillés que ceux de l'appareil SMARTEC qui a été utilisé en boîte noire, avec la mesure comme seule donnée de sortie.

#### Décalage entre les deux fronts du miroir mobile

Si la course du miroir était parfaitement symétrique, c'est-à-dire la pente du front montant parfaitement égale à l'opposé de la pente du front descendant, alors, pour une structure au repos, les positions  $\Delta X$  du miroir permettant d'obtenir le maximum d'interférence seraient identiques pour les fronts montant et descendant (premier cas Fig. 2.38).

Cependant ce n'est pas le cas en pratique : il existe un léger décalage entre les positions des fronts montant et descendant permettant d'obtenir le maximum d'interférence (deuxième cas Fig. 2.38). Alors, lorsque l'on trace le pic d'interférence en fonction de la position du miroir, au lieu de n'avoir qu'un seul pic d'interférence, il y en a deux : un pour le front montant et l'autre pour le front descendant.

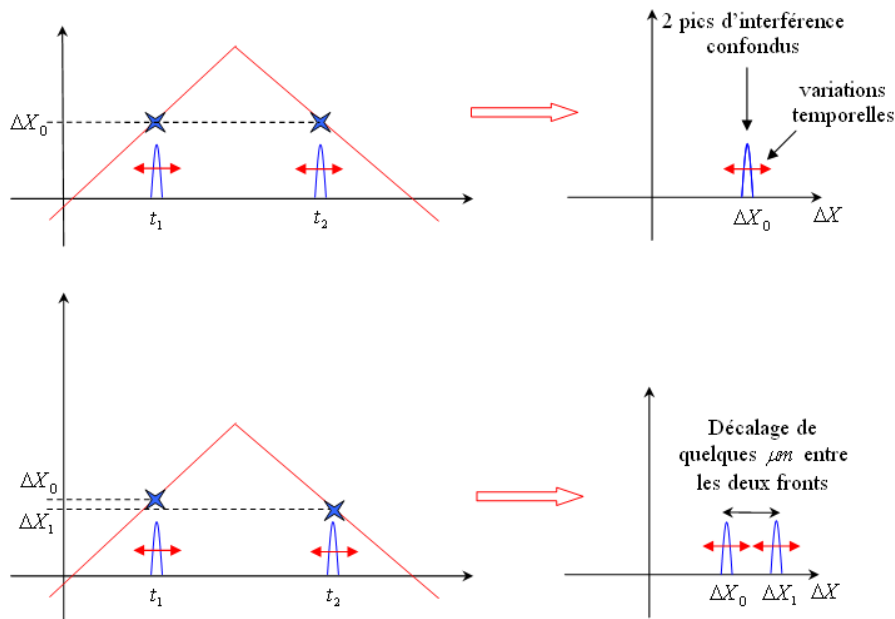


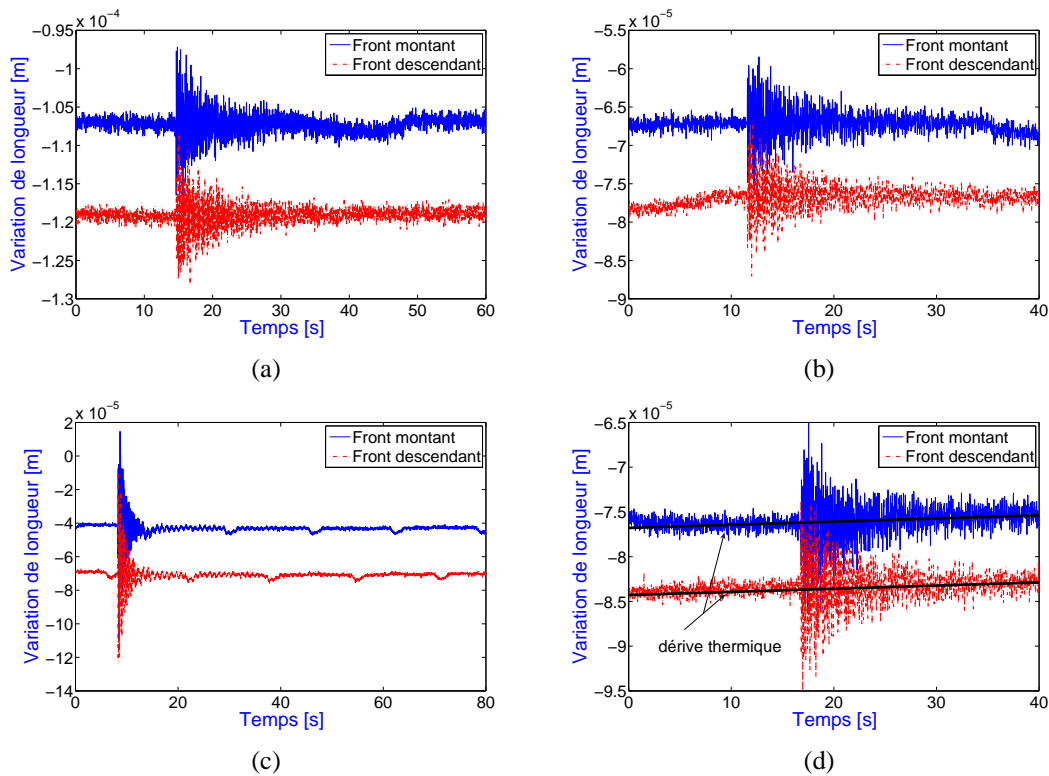
FIGURE 2.38: Existence de deux fronts (montant et descendant) pour la mesure de l'ELB-CA.

*Au lieu d'un seul et unique signal échantillonné à 100 Hz, la mesure obtenue est composée de deux signaux échantillonnés à 50 Hz correspondant aux fronts montants et descendants du miroir, décalés de quelques  $\mu\text{m}$ , qu'il va falloir recombinaison pour obtenir un signal échantillonné à 100 Hz exploitable.*

En 2.5, nous présenterons la procédure permettant d'obtenir un signal échantillonné à 100 Hz à partir des données brutes obtenues avec l'appareil FOGALE qui sont : l'amplitude (intensité) et l'instant des maxima d'interférence ainsi que la variation de longueur correspondante du ou des capteurs.

### Fluctuations et dérives de la mesure

La figure 2.39 présente divers signaux temporels obtenus à partir de l'appareil de mesure FOGALE pour lesquels des fluctuations et des dérives ont été observées.



**FIGURE 2.39: Signaux temporels obtenus à partir de l'appareil FOGALE présentant des fluctuations et des dérives.**

Sur beaucoup de mesures obtenues avec l'appareil FOGALE, des fluctuations sont observées. Suivant les cas, elles sont plus ou moins marquées et peuvent parfois être périodiques (Fig. 2.39(c)) La cause de ces fluctuations n'a pu être déterminée, cependant il paraît peu probable que cela puisse provenir d'un phénomène thermique. En effet, les fluctuations se produisent alternativement sur chacun des deux fronts (montant et descendant), or pour une dérive thermique comme sur la figure 2.39(d) ( $1.8 \mu\text{m}/\text{min}$  pendant la mesure), le phénomène est global et s'applique aux deux fronts. Le problème serait plutôt d'ordre mécanique dans ce cas là, sans doute au niveau du moteur électromagnétique, d'autant plus que pour la mesure de la figure 2.39(c) les fluctuations semblent être périodiques (période  $\approx 16$  s).

Les temps d'acquisition des mesures étant tout de même assez court pour des essais par chocs, les cas où nous avons observé une dérive thermique comme sur la figure 2.39(d) sont assez rares. Cependant, avec des temps d'acquisition plus long, pour des mesures de bruit ou si la structure étudiée est soumise à une excitation ambiante, la dérive thermique devra être prise en compte.

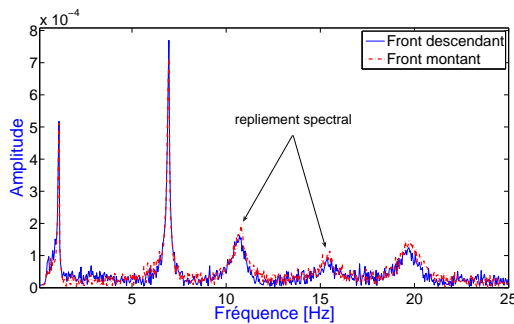
Nous montrerons en 2.5.1 comment s'affranchir de ce type de problème (fluctuations en général, dérives thermiques y compris) en post-traitement de la mesure. Il existe également plusieurs solutions technologiques pour compenser la mesure thermiquement, par exemple l'ajout d'un capteur témoin (comme la fibre de référence du capteur SMARTape).

### Repliement spectral

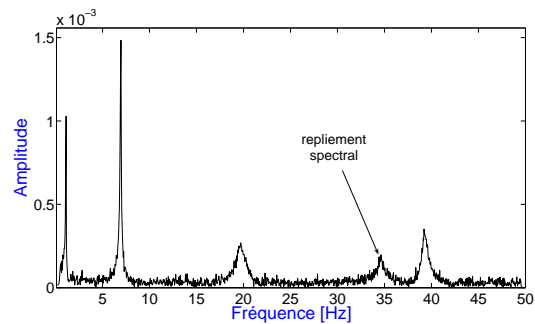
L'un des problèmes rencontrés est une caractéristique inhérente à l'appareil de mesure et à son principe de fonctionnement. En effet, le principe même de la mesure fait que l'on obtient un signal discrétisé en temps : le signal de mesure provenant de l'ELB-CA est une intensité lumineuse et un point de mesure est obtenu uniquement lorsque la distance parcourue par le miroir mobile permet d'annuler la différence de marche des ondes qui interfèrent (pour le maximum de la figure d'interférence).

Pour des capteurs plus classiques (accéléromètres, capteurs de vitesse et de déplacement), l'acquisition est réalisée par un conditionneur. La mesure délivrée par ces capteurs est une tension continue qui va pouvoir être échantillonnée suivant la fréquence d'échantillonnage  $f_{ech}$  définie au niveau des logiciels (de quelques dizaines de  $Hz$  à plusieurs  $kHz$ ). Dans la plupart des conditionneurs, il est possible de filtrer les signaux, soit électroniquement avant la conversion analogique-numérique du signal, soit en choisissant une fréquence d'échantillonnage élevée et en filtrant numériquement le signal. Ainsi, le repliement spectral des fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist ( $f_N = f_{ech}/2$ ) est éliminé. Pour l'appareil de mesure optique, étant donné le principe de mesure, il est impossible de filtrer la mesure avant la discrétisation.

La figure 2.40 présente les TF des signaux des fronts montant et descendant obtenus à partir d'un ELB-CA interrogé par l'appareil FOGALE, qui sont échantillonnés à  $50 Hz$ , ainsi que la TF du signal final de mesure échantillonné à  $100 Hz$ .



(a) TF des fronts montant et descendant échantillonnés à  $50 Hz$



(b) TF du signal final échantillonné à  $100 Hz$

**FIGURE 2.40: Exemple de TF obtenues pour une poutre E-L à partir des signaux des fronts montant et descendant, et à partir du signal recombéné.**

Cet ELB-CA était fixé sur une poutre E-L dont les cinq premières fréquences propres sont :  $1.16 Hz$ ,  $5.9 Hz$ ,  $19.8 Hz$ ,  $39.5 Hz$  et  $65.8 Hz$ . En conséquence, la fréquence proche de  $10 Hz$  est le repliement dans la bande de fréquence  $[0 - 25] Hz$  de la quatrième fréquence propre de la structure

( $25 - (40 - 25) = 10 \text{ Hz}$ ). Pour la TF du signal final, la fréquence proche de  $35 \text{ Hz}$  est le repliement spectral de la cinquième fréquence propre de la structure qui se situe aux alentours de  $65 \text{ Hz}$ . Nous avons pu démontrer que cette fréquence provient d'un repliement à l'aide des fréquences de vibration théoriques de la structure étudiée (poutre E-L) et des TF de mesures d'accéléromètres également présents sur la structure et dont l'acquisition a été effectuée avec une fréquence d'échantillonnage plus élevée ( $f_{\text{ech}} = 1000 \text{ Hz}$ ).

La TF du signal final permet donc de montrer que les fréquences situées aux alentours de  $10 \text{ Hz}$  et  $15 \text{ Hz}$ , présentes dans les TF des fronts montant et descendant, proviennent d'un repliement spectral des fréquences situées respectivement à  $35 \text{ Hz}$  et  $40 \text{ Hz}$ , la fréquence à  $35 \text{ Hz}$  étant elle-même un repliement de la cinquième fréquence propre égale à  $65 \text{ Hz}$ .

*La mesure obtenue par l'appareil de mesure FOGALE va donc être sujette au repliement spectral des fréquences supérieures à  $25 \text{ Hz}$  pour les fronts montants et descendants et supérieures à  $50 \text{ Hz}$  pour le signal final recombinaison et échantillonné à  $100 \text{ Hz}$ .*

### Détection du maximum d'interférence

Le problème crucial de l'appareil de mesure FOGALE réside dans la détection des maxima des pics d'interférence. Comme le montre la figure 2.41, qui représente l'interface LabVIEW permettant de réaliser la mesure, les paramètres réglables liés à la détection des maxima sont un seuil de détection (en bits) et une largeur de pic (en nombre de points).

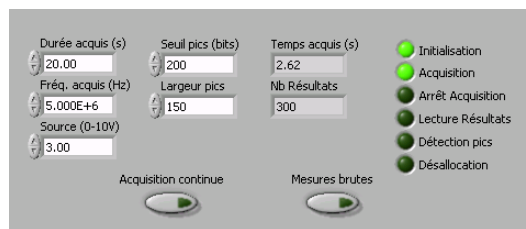


FIGURE 2.41: Paramètres réglables pour l'acquisition de la mesure des ELB-CA.

Pour la détection du maximum d'interférence proposée par FOGALE, deux paramètres sont donc définis : un seuil et une largeur du pic d'interférence. Le seuil n'influe que sur le fait que le pic soit détecté ou non : il sera détecté si son sommet dépasse le seuil fixé. Par ailleurs, le seuil est défini par rapport au niveau zéro de l'intensité qui se situe à  $-1000 \text{ bits}$ . Si le seuil est fixé à  $500 \text{ bits}$  par exemple, les pics ayant un maximum au delà de  $-500 \text{ bits}$  seront détectés.

Ensuite, l'enveloppe du pic d'interférence est fitté par une parabole (moindres carrés à l'aide d'une fonction de LabVIEW) et le déplacement du miroir mobile par une droite locale, permettant ainsi de remonter du maximum du pic d'interférence à la valeur de la course du miroir correspondante. Si la largeur de la parabole (ou le nombre de points du fit) est trop importante alors le fit ne correspond pas parfaitement à l'enveloppe et la détection du pic n'est pas optimale. En général, le nombre de points choisis pour le calcul est inférieur à  $100$  points.

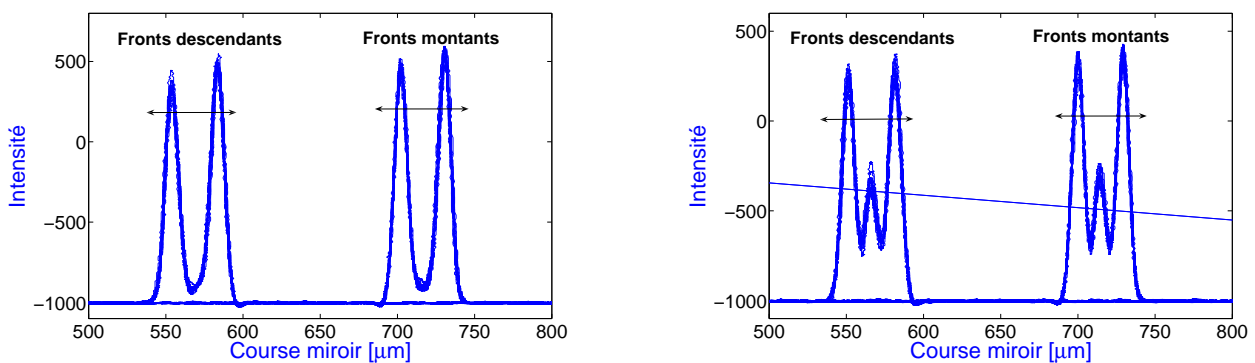
Les problèmes rencontrés pour la détection des pics vont être présentés dans ce qui va suivre.

### Polarisation dans la fibre : biréfringence

L'algorithme suppose que la figure d'interférence est une gaussienne et que, par conséquent, il n'existe qu'un seul et unique maximum local. Or, du fait de la biréfringence dans la FO, les figures d'interférence peuvent s'éloigner très fortement de la forme d'une gaussienne.

Lorsque l'ELB-CA est collé sur une structure, du fait de la déformation de celle-ci, l'ELB-CA va se déformer également. Le coeur de la FO, où l'onde lumineuse se propage, est un matériau isotrope (silice) cependant, du fait de la déformation subie par l'ELB-CA, le coeur peut perdre sa symétrie de révolution et devenir biréfringent. Nous présenterons en détail, au Chapitre suivant, le calcul de la variation d'indice dû à la déformation et son influence sur la mesure de l'ELB-CA pour un exemple particulier.

La figure 2.42 présente des exemples de figures d'interférence obtenues à partir d'un ELB-CA interrogé avec l'appareil FOGALE.



**FIGURE 2.42: Figures d'interférence observées avec l'appareil FOGALE problématiques pour la détection du maximum de l'enveloppe.**

Il apparaît clairement sur la figure 2.42 que les figures d'interférence tracées peuvent posséder plusieurs maxima locaux. Par conséquent, avec l'algorithme de détection des maxima actuel, plusieurs points de mesure pourront être obtenus pour une seule et même figure d'interférence. Par exemple, pour le graphe de droite sur la figure 2.42, si le seuil de détection est fixé à 500 bits alors trois maxima seront détectés pour chaque front.

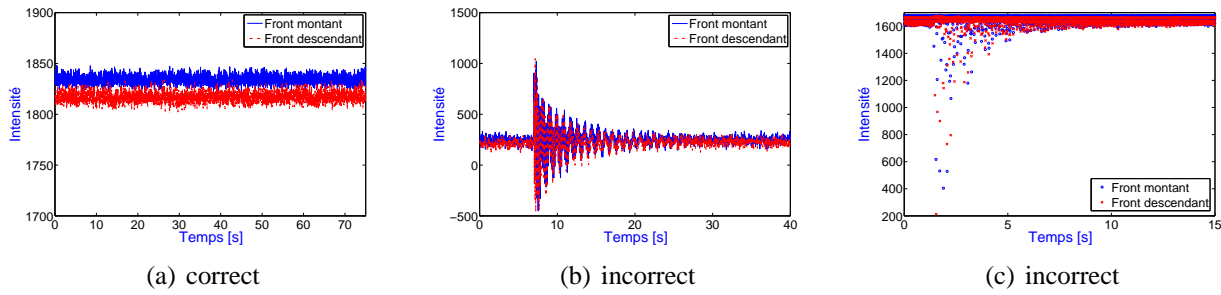
### **Perte d'intensité lumineuse**

Le deuxième problème rencontré pour la détection des maxima des pics d'interférence est la perte d'intensité lumineuse au niveau des miroirs semi-réfléchissants de l'ELB-CA.

Le principe de mesure de l'appareil FOGALE repose sur la détermination de la phase des ondes lumineuses réfléchies qui interfèrent au niveau du détecteur. L'amplitude du maximum déterminé n'intervient pas dans la mesure puisque seule la position du maximum nous intéresse. Par ailleurs, l'amplitude du maximum d'interférence est constante au cours du temps. Ainsi, l'observation de cette grandeur au cours de la mesure peut permettre de déterminer si des pertes ou des variations anormales d'intensité se produisent.

La figure 2.43 représente trois exemples d'évolution temporelle de l'amplitude des maxima d'interférence.





**FIGURE 2.43: Exemples d'évolution de l'intensité des maxima d'interférence en fonction du temps obtenus expérimentalement.**

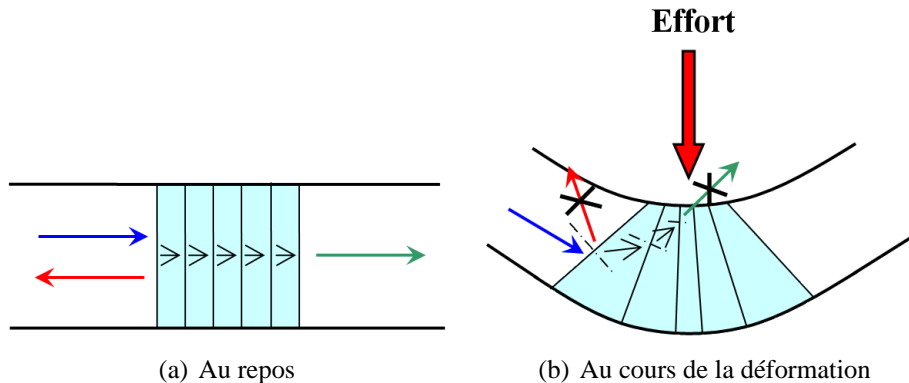
Sur la figure 2.43(a), l'amplitude est bien constante au cours du temps comme prévu par la théorie, par contre ce n'est pas le cas sur les figures 2.43(b) et 2.43(c). Pour ces essais, la structure étudiée était une poutre E-L excitée par un choc. Sur la figure 2.43(b), l'évolution de l'amplitude est similaire à la réponse temporelle de l'ELB-CA tandis que sur la figure 2.43(c) l'amplitude des pics détectés subit des variations plus importantes.

Ces pertes d'intensité lumineuse proviennent de la sensibilité des miroirs semi-réfléchissants (Fig. 2.44) à la déformation, difficulté rencontrée par ailleurs et dont les solutions technologiques n'ont pas pu être implémentées au cours de la thèse.



**FIGURE 2.44: Miroir du CFO FOGALE (ou férule).**

Les miroirs sont réalisés par aboutement de deux FO préalablement traitées avec de fines couches de diélectriques, qui forment ainsi une zone multicouche semi-réfléchissante. Actuellement, les miroirs constituent des zones fragiles de l'ELB-CA qui, s'ils sont trop sollicités, ne vont plus réfléchir ni transmettre la lumière correctement. Le schéma de l'évolution de la propagation de la lumière (réflexion et transmission) au niveau d'un miroir semi-réfléchissant qui subirait un effort trop important est présenté sur la figure 2.45.



**FIGURE 2.45: Schématisation de la perte de réflectivité au niveau d'un miroir semi-réfléchissant pour un effort trop important.**



Il apparaît donc que lorsque l'effort appliqué est trop important, l'onde lumineuse ne peut pas être réfléchiée ni transmise correctement. Il en résulte alors des pertes d'intensité qui, si elles sont trop importantes, ne permettent pas d'observer les figures d'interférence. Dans ce cas là, il y aura des fronts du miroir (montant et/ou descendant) où il n'y aura pas d'interférence, c'est-à-dire que des points de mesures seront «manqués».

La figure 2.46 présente l'évolution temporelle de l'intensité lumineuse (Fig. 2.46(a)), ainsi que celle du pas de temps (Fig. 2.46(b) et 2.46(c)) et du signal temporel de l'ELB-CA (Fig. 2.46(d)), lorsque ces pertes se produisent.

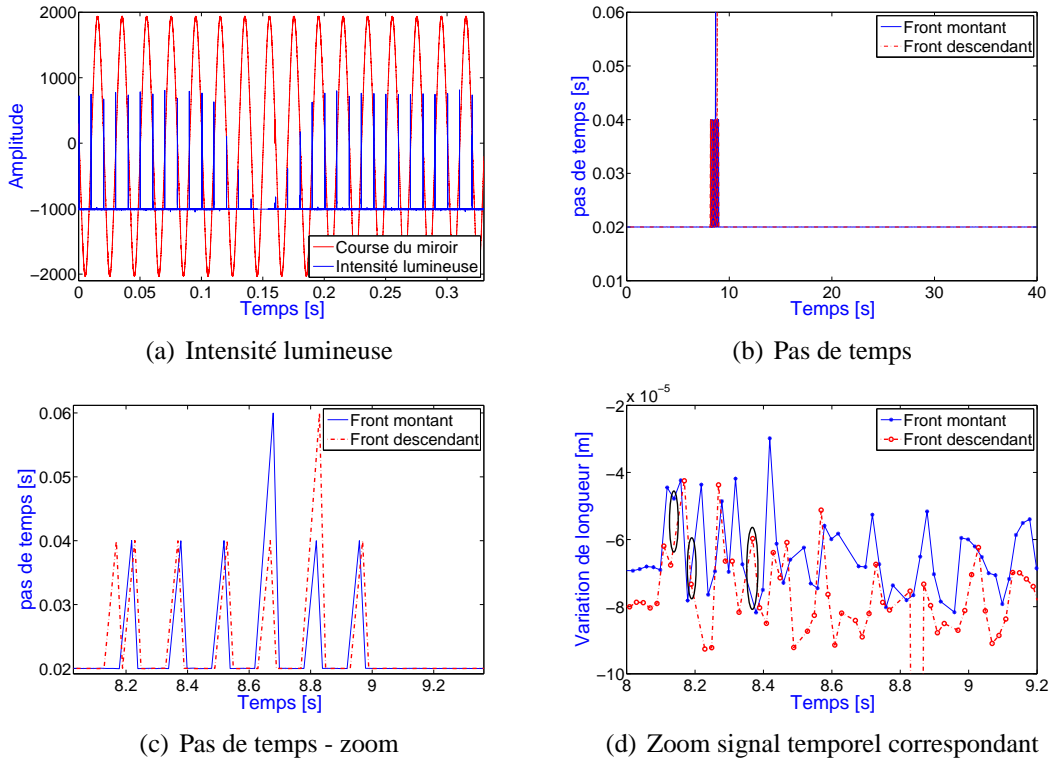


FIGURE 2.46: Perte d'intensité au niveau du CFO FOGALE.

### Multiplexage

#### Problème : traitement du fichier de mesure

Le signal de mesure brut obtenu pour l'acquisition de plusieurs ELB-CA n'est pas directement exploitable car **les mesures de tous les capteurs sont entremêlées** : l'appareil réalisant l'acquisition de la position des maxima des pics d'interférence au cours du temps (Fig. 2.36(b)), les mesures de chaque ELB-CA sont enregistrées les unes à la suite des autres. Ainsi, pour  $N$  ELB-CA en série et pour une période du miroir mobile (Fig. 2.36(b)), la première mesure enregistrée sera celle de l'ELB-CA n°  $N$ , puis le n°  $N - 1$ ,  $\dots$ , le n° 1, le n° 1,  $\dots$ , le n°  $N - 1$  et enfin le n°  $N$ .

Pour le traitement des fichiers de mesures, les problèmes apparaissent lorsque la biréfringence est importante (Fig. 2.42), entraînant alors des double voire triple détections de pics pour un même capteur, et lorsque des pertes d'intensité se produisent au niveau des miroirs semi-réfléchissants, conduisant à une absence de mesure pour le capteur.

### Limitation : nombre d'ELB-CA multiplexables en série

Une première limitation pour le multiplexage en série provient de la réflectivité des miroirs semi-réfléchissants des CFO. Au niveau de l'appareil FOGALE, il est possible de régler la puissance de la source lumineuse de telle sorte que l'amplitude du maximum du pic d'interférence du premier ELB-CA soit suffisamment importante (en évitant la saturation) pour pouvoir être observée. Ensuite pour l'amplitude des figures d'interférence, plus le capteur sera éloigné sur la fibre, c'est-à-dire plus il y aura de capteurs en amont sur la fibre, moins la puissance lumineuse retournée sera importante. Ceci est dû aux pertes d'intensité engendrées par les nombreux passages à travers les miroirs semi-réfléchissants, qui ne réfléchissent et ne transmettent qu'une partie de la lumière.

La figure 2.47 présente l'intensité du maximum d'interférence en fonction du nombre d'ELB-CA multiplexés et pour différentes réflectivités des miroirs  $R=10, 20$  et  $30\%$ . Le détail du calcul permettant d'obtenir ces courbes est présenté en annexe A.

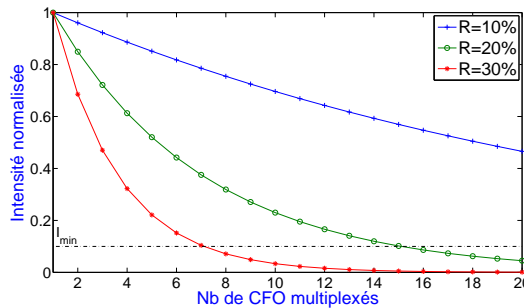


FIGURE 2.47: Intensité du maximum d'interférence en fonction du nombre de CFO multiplexés en série et de la réflectivité des miroirs.

Suivant les réflectivités, à partir d'un certain nombre de capteurs multiplexés en série, la puissance lumineuse réfléchie n'est plus suffisante pour permettre d'observer des interférences. Plus précisément, pour  $R=20\%$  par exemple, le nombre de CFO est limité à 15.

Dans la pratique, l'amplitude du maximum d'interférence dépend également de l'état de polarisation des ondes dans la fibre. Par ailleurs, les réflectivités équivalentes des deux miroirs des ELB-CA que nous possédons sont relativement différentes les unes des autres (de 10 à 30 %, soit de 5 à 15 % pour chaque miroir) : la courbe d'intensité que l'on obtiendrait en multiplexant ces capteurs en série serait alors moins régulière que celles de la figure 2.47. **Une mise en série optimale des ELB-CA consisterait à les insérer dans la chaîne de mesure par réflectivité croissante.** Si toutes les réflectivités étaient identiques, toutes les configurations seraient équivalentes et la mise en oeuvre serait immédiate. Toutefois, dans la pratique, la mise en oeuvre des ELB-CA afin d'obtenir une configuration de mesure optimale, c'est-à-dire d'avoir des amplitudes de pics d'interférence assez importantes pour pouvoir être détectées, peut prendre un certain temps.

La deuxième limitation pour le multiplexage en série provient de la longueur des ELB-CA par rapport à la plage de mesure de l'appareil FOGALE. Cette limitation vaut également pour le multiplexage en parallèle ainsi que pour une association des deux types de multiplexage. La plage de déplacement du moteur est limitée et il ne faut pas que les zones où les pics d'interférence se déplacent<sup>1</sup> puissent se chevaucher entre elles. Si cela arrivait, il serait en effet impossible de dissocier

<sup>1</sup>La largeur de ces zones est tout simplement définie par la déformation subie par l'ELB-CA (A.16)

les points de mesure appartenant à l'un ou l'autre des ELB-CA.

En supposant que l'intensité lumineuse renvoyée par tous les ELB-CA soit suffisante, pour définir le nombre d'ELB-CA qu'il est possible d'acquérir avec le système de mesure, il faudra donc prendre en considération la plage de mesure du miroir et également la déformation subie par les ELB-CA. Cette déformation dépendra de la structure étudiée ainsi que du placement et de la longueur des ELB-CA. Au final, avec la plage de mesure actuelle, il paraît irréaliste de multiplexer (en série et/ou en parallèle) plus d'une dizaine d'ELB-CA.

La figure 2.48 présente un exemple où les zones de déplacement des pics d'interférence sont définies pour une dizaine d'ELB-CA environ.

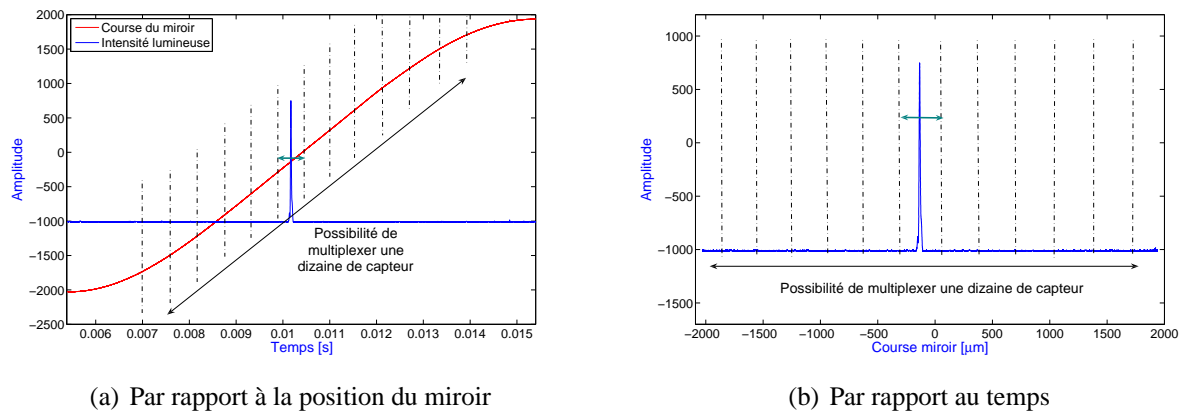


FIGURE 2.48: Possibilité de multiplexage avec l'appareil de mesure FOGALE.

Cependant, actuellement, le procédé de fabrication des CFO FOGALE permet d'obtenir une précision sur la longueur du capteur qui est au mieux de 1 mm. Il n'est donc pas possible de contrôler précisément les longueurs des CFO et d'obtenir des différences de longueur de l'ordre de quelques centaines de  $\mu m$  entre différents CFO, ce qui limite fortement les capacités de multiplexage.

### 2.4.4 Avantages et inconvénients du prototype FOGALE

*Pour résumer, les principaux avantages et inconvénients du système FOGALE sont :*

- **Avantages**
  - Acquisition simultanée de plusieurs voies (Multiplexage en parallèle).
  - Multiplexage en série possible.
  - ELB-CA non intrusif.
  - Gamme de mesure importante :  $\pm 2$  mm.
- **Inconvénients**
  - Fréquence d'échantillonnage faible : 100 Hz.
  - Repliement spectral pour  $f > 50$  Hz.
  - Précision médiocre : 0.8  $\mu m$ .
  - Miroirs de l'ELB-CA sensibles à la déformation.
  - Algorithme de détection du maximum d'interférence inadapté lorsque la perturbation de la forme de la gaussienne, due à la polarisation des ondes, est importante.

## 2.5 Amélioration de la mesure réalisée par l'appareil FOGALE

Face à l'acquisition d'un prototype sur lequel nous avons constaté de nombreuses limitations, une partie du travail de thèse a consisté à résoudre certaines d'entre elles.

### 2.5.1 Traitement du signal de mesure

Dans ce paragraphe, nous allons présenter la procédure réalisée pour l'obtention d'un signal échantillonné à  $100\text{ Hz}$ .

Les différentes étapes pour obtenir un signal de mesure échantillonné à  $100\text{ Hz}$  exploitable sont les suivantes :

#### 1. Suppression des fausses détections de pics

Tout d'abord, il faut supprimer les mauvaises déterminations de maximum de pics d'interférence (ou mauvaises mesures) qui, lorsque l'on trace le signal de mesure des deux fronts, donnent des points de mesure aberrants avec des amplitudes nettement supérieures au signal (Fig. 2.49). Pour ce faire, il suffit de fixer un seuil manuellement (pour chaque mesure lorsque c'est nécessaire) et de remplacer la valeur erronée du signal par une interpolation linéaire des points de mesure voisins.

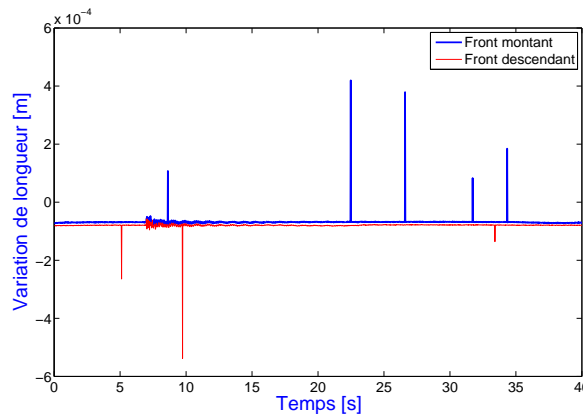


FIGURE 2.49: Signal mesuré avec de mauvais points de mesure.

#### 2. Rééchantillonnage des signaux

Une fois que les pics correspondant à de mauvaises mesures ont été supprimés et remplacés, il faut rééchantillonner les signaux pour obtenir un pas de temps constant. Cela permet d'éviter les erreurs lors du calcul de la TF du signal. Pour cela, la fonction *interp1* de Matlab est utilisée. Les points du front montant sont interpolés suivant l'échelle de temps  $2k \times 0.01\text{ s}$  et ceux du front descendant suivant  $(2k + 1) \times 0.01\text{ s}$ .

#### 3. Filtrage des signaux

Ensuite, comme illustré sur la figure 2.34(b), des fluctuations sont souvent observées au niveau de la mesure et sont probablement dues à l'asservissement de l'étage mobile électromagnétique.

## 2.5 Amélioration de la mesure réalisée par l'appareil FOGALE

Pour s'en affranchir, les signaux des fronts montant et descendant sont filtrés numériquement par un filtre passe-haut avec une fréquence de coupure très faible ( $0.5 \text{ Hz}$ ) (fonction *filt* de Matlab). Cela permet d'éliminer les fluctuations, dont l'évolution est très lente par rapport à la dynamique des phénomènes observés, et par la même occasion la composante continue. Le décalage de quelques  $\mu\text{m}$  qui existe entre les deux fronts disparaît ainsi. Les figures 2.50(b) et 2.50(d) présentent les deux signaux de mesures des figures 2.50(a) et 2.50(c) après filtrage.

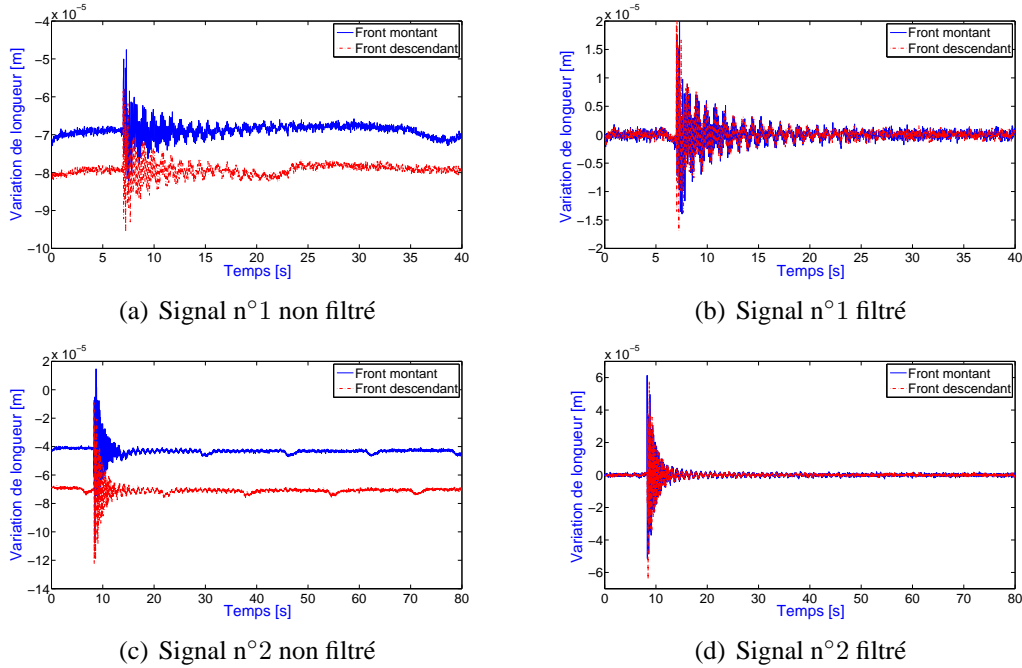


FIGURE 2.50: Filtrage de signaux présentant des fluctuations localisées dans le temps.

La figure 2.51 montre un cas de mesure de l'ELB-CA où il reste encore des mauvais points de mesure après filtrage. Ces mauvaises mesures sont délicates à supprimer puisqu'elles ne dépassent pas l'amplitude maximale du signal. Elles perturbent fortement le calcul de la TF (mauvais point = dirac). Dans ce cas là, la mesure n'est pas exploitable.

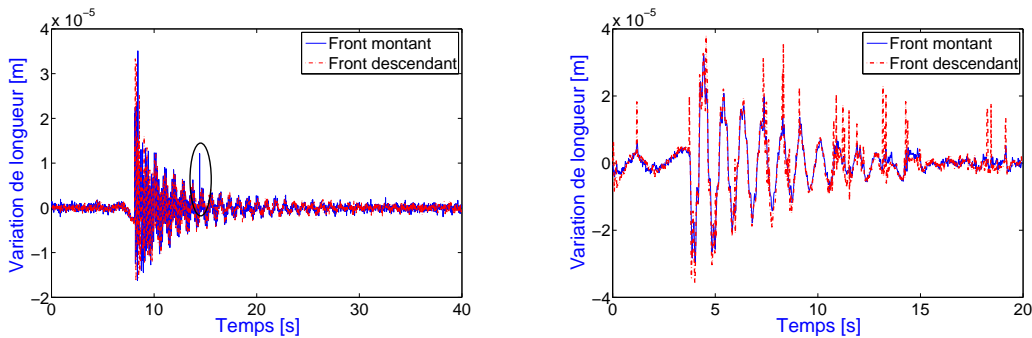


FIGURE 2.51: Exemples de signaux de mesure non exploitables, où il reste de mauvais points de mesure après la procédure automatique.

#### 4. Obtention du signal final

Enfin, les signaux des fronts montant et descendant sont fusionnés pour obtenir le signal échantillonné à  $100\text{ Hz}$ . Pour cela, leurs mesures sont intercalées. Une transformée de Fourier du signal peut ensuite être effectuée sur la plage de fréquence  $[0 - 50]\text{ Hz}$ . La figure 2.52 présente le signal final ainsi que sa TF.

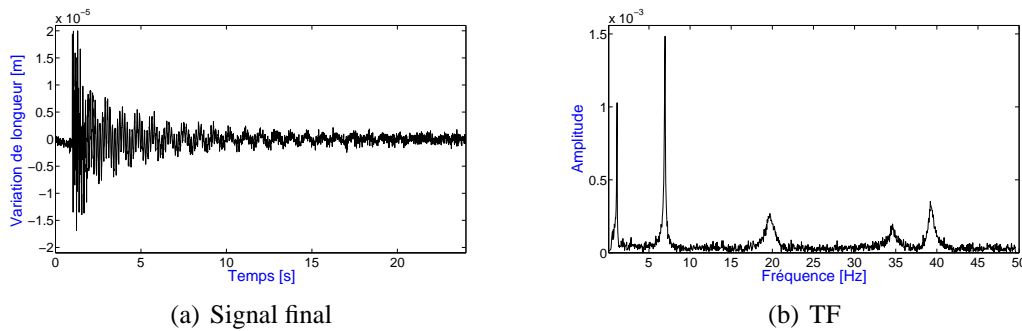


FIGURE 2.52: Signal final et sa TF obtenus après recollement des signaux des fronts montant et descendant.

### 2.5.2 Résolution des problèmes de mesure

Dans cette section, nous allons présenter les solutions proposées pour soit résoudre, soit détecter les différents problèmes rencontrés lors de l'utilisation de l'appareil de mesure FOGALE.

#### Repliement spectral

Pour parvenir à extraire les fréquences de vibration «réelles» de la structure des fréquences provenant du repliement spectral, une solution est de réaliser une mesure complémentaire avec un autre type de capteur (accéléromètre par exemple) dont la fréquence d'échantillonnage serait plus élevée.

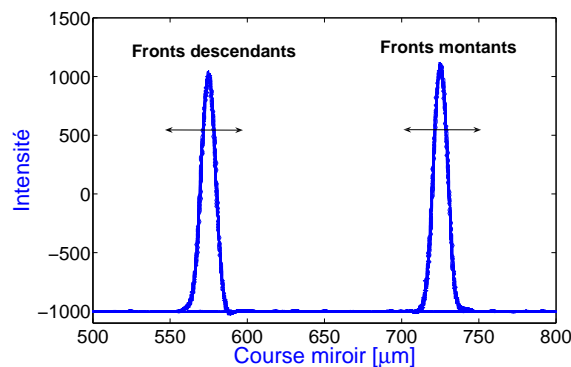
Une seconde alternative permettant de conserver la plage fréquentielle actuelle de la mesure et ne nécessitant pas l'appui d'un autre moyen de mesure serait de pouvoir faire varier la fréquence de vibration du miroir, en l'occurrence de la diminuer. Par exemple, si la fréquence de vibration du miroir passait de  $50\text{ Hz}$  à  $45\text{ Hz}$ , la fréquence qui se repliait initialement à  $35\text{ Hz}$  (observée sur la TF de la figure 2.40(b)) pour une fréquence du miroir de  $50\text{ Hz}$ , se replierait à  $25\text{ Hz}$  ( $=45-(50-45)$ ) avec une fréquence du miroir de  $45\text{ Hz}$ . Une variation de la fréquence de vibration du miroir de seulement quelques  $\text{Hz}$  suffirait à pouvoir identifier les fréquences «réelles» de la structure, qui seraient les fréquences invariantes.

Par ailleurs, étant donné que pour le domaine du génie civil les fréquences d'intérêt se situent plutôt en basse fréquence, une solution serait d'augmenter suffisamment la fréquence d'échantillonnage de l'appareil de mesure FOGALE. Pour cela, il faudrait donc que l'étage mobile, sur lequel est fixé le miroir, vibre à une fréquence plus élevée. Des systèmes piézoélectriques existent, cependant la plage de mesure est alors réduite. En effet, ils ne permettent pas d'obtenir un déplacement du miroir suffisamment linéaire sur des plages de plusieurs  $\text{mm}$ . Cette réduction de plage de mesure réduirait fortement les capacités de multiplexage de l'appareil et la mesure de déformation maximale. Un compromis entre les capacités de multiplexage et la fréquence d'échantillonnage de l'appareil doit donc être fait suivant les applications visées.

### Détection du maximum d'interférence

#### Polarisation dans la fibre : biréfringence

Pour remédier au problème de la polarisation de l'onde électromagnétique dans la FO et obtenir des figures d'interférence de forme gaussienne, un polariseur est inséré avant chaque ELB-CA (Fig. 2.4). Il permet de corriger le déphasage introduit par le phénomène de biréfringence au niveau de l'ELB-CA, c'est-à-dire de remettre en phase les deux ondes réfractées et ainsi d'obtenir une figure d'interférence de la forme d'une gaussienne. La figure 2.53 présente la figure d'interférence obtenue à partir d'un ELB-CA et corrigée par un polariseur.



**FIGURE 2.53:** Figure d'interférence observées avec l'appareil FOGALE, idéale pour une détection satisfaisante du maximum de l'enveloppe.

A partir de cette forme gaussienne des figures d'interférence, les maxima peuvent donc être déterminés correctement.

La solution pour laquelle nous avons opté jusqu'à présent pour remédier au problème de la biréfringence au niveau de l'ELB-CA est donc de placer un polariseur avant chaque ELB-CA et d'effectuer les réglages afin d'obtenir des formes de gaussienne satisfaisantes pour les figures d'interférence. Au cours de la déformation, les figures d'interférence vont changer de forme mais de manière beaucoup moins significative. Ainsi, il subsistera des détections de pics multiples mais qui seront néanmoins assez peu nombreuses. De plus, le code Matlab réalisé pour traiter les données brutes de l'appareil de mesure FOGALE permet de les détecter et de savoir au niveau de quel ELB-CA elles ont lieu.

Une autre solution pourrait être envisagée pour ce problème. Elle ne résiderait plus cette fois sur la forme des figures d'interférence mais plutôt sur l'algorithme de détection des pics. Au lieu de déterminer les maxima des pics à partir d'un seuil, ce qui est à l'origine du problème, il serait préférable de calculer le centre de gravité de la figure d'interférence, ce qui est assez courant en optique. Si en plus de cela, les figures d'interférence sont corrigées à l'aide d'un polariseur alors la qualité des mesures devrait être grandement améliorée. Ce pourrait être une voie d'amélioration de l'appareil à approfondir dans le futur.

#### Perte d'intensité lumineuse

Pour la perte d'intensité lumineuse au niveau des miroirs, il faudrait renforcer ou isoler les zones de l'ELB-CA où sont situés les miroirs semi-réfléchissants, ce qui est du ressort du fournisseur. Le



problème a été identifié au cours du projet dans lequel les capteurs ont été développés et des solutions technologiques ont été proposées, cependant par manque de financement elles n'ont pu être réalisées. Même si le problème n'est pas résolu, nous pouvons par contre tout à fait savoir quand les pertes d'intensité se produisent en examinant l'évolution du pas de temps des fronts montant et descendant. Le miroir vibrant à  $50\text{ Hz}$ , le pas de temps entre deux acquisitions successives sur un front est de  $0.02\text{ s}$ . Lorsque la perte d'intensité est trop importante et ne permet pas d'obtenir de point de mesure, le pas de temps est alors égal à  $0.04\text{ s}$ . Si jamais les pertes ne permettent pas d'obtenir plusieurs points de mesures successifs alors le pas de temps est égal à  $k \times 0.02\text{ s}$ , où  $k$  est le nombre de mesures manquées. Ainsi, en examinant l'évolution du pas de temps (Fig. 2.46(b) et 2.46(c)), il est possible de déterminer le nombre de mesure manquées sur chacun des deux fronts.

Dans notre cas, l'excitation étant un choc, les efforts appliqués sur les miroirs sont plus importants au début du signal donc les pertes d'intensité se produiront également au début du signal. Ainsi, lorsque le calcul de la TF du signal de mesure est effectué, l'effet des pertes d'intensité agit essentiellement sur les fréquences élevées. Par contre, pour les basses fréquences, ce qui est le cas pour notre étude et pour le domaine du génie civil en général, cela n'est pas gênant. Par ailleurs, le système de mesure ne permet pas d'observer les fréquences élevées.

### Multiplexage en série et en parallèle : un exemple

Sur l'ensemble des ELB-CA FOGALE achetés (trois de  $50\text{ cm}$  et cinq de  $20\text{ cm}$ ), seulement trois de  $20\text{ cm}$  peuvent être «vus» simultanément par l'appareil de mesure FOGALE car leurs différences de longueur sont inférieures à la plage de mesure de l'appareil ( $4\text{ mm}$ ). La figure 2.54 présente la configuration des trois ELB-CA pour l'acquisition des mesures sur une poutre E-L.

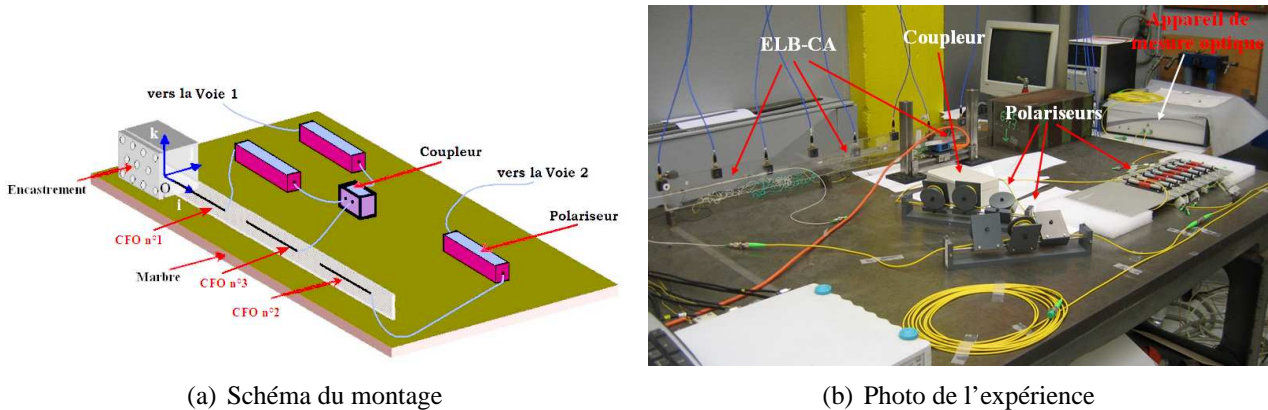


FIGURE 2.54: Configuration de trois ELB-CA pour l'acquisition avec l'appareil FOGALE.

Les ELB-CA n°1 et n°3 sont sur la voie de mesure n°1 de l'appareil et l'ELB-CA n°1 sur la deuxième voie. Pour palier aux problèmes de pertes d'intensité au niveau des deux capteurs sur la voie n°1, nous avons eu recours à un coupleur. Par ailleurs, la qualité de la mesure obtenue à partir des ELB-CA étant très sujette à la polarisation dans la fibre, trois polariseurs sont insérés dans la chaîne de mesure afin de régler la polarisation de chacun des capteurs avant l'acquisition des mesures.

Il est important de noter que dans la chaîne de mesure, au delà des pertes d'intensité dues à la réflectivité des miroirs au niveau des ELB-CA, à chaque connexion d'une FO avec un appareil optique (appareil de mesure, coupleur, polariseur,...) ou avec une autre FO (rallonge ou capteur, à l'aide d'une traversée de cloison), il y a des pertes d'intensité de l'ordre de quelques  $dB$ . Ces pertes doivent



## 2.5 Amélioration de la mesure réalisée par l'appareil FOGALE

donc également être prises en compte pour obtenir une configuration optimale de la chaîne de mesure. Sinon, afin de pouvoir multiplexer un plus grand nombre de capteur, il est possible d'insérer un amplificateur optique [12] entre deux ELB-CA pour palier aux pertes d'intensité lumineuse.

La figure 2.55(a) présentent quelques périodes du signal de déplacement du miroir ainsi que le signal d'intensité de la photodiode correspondant pour trois ELB-CA multiplexés. Un zoom sur une seule période du moteur est représenté sur la figure 2.55(b). Les pics du signal d'intensité correspondent aux interférences obtenues à partir des trois ELB-CA. Le signal de l'intensité de la photodiode est tracé en fonction du déplacement du miroir sur la figure 2.56.

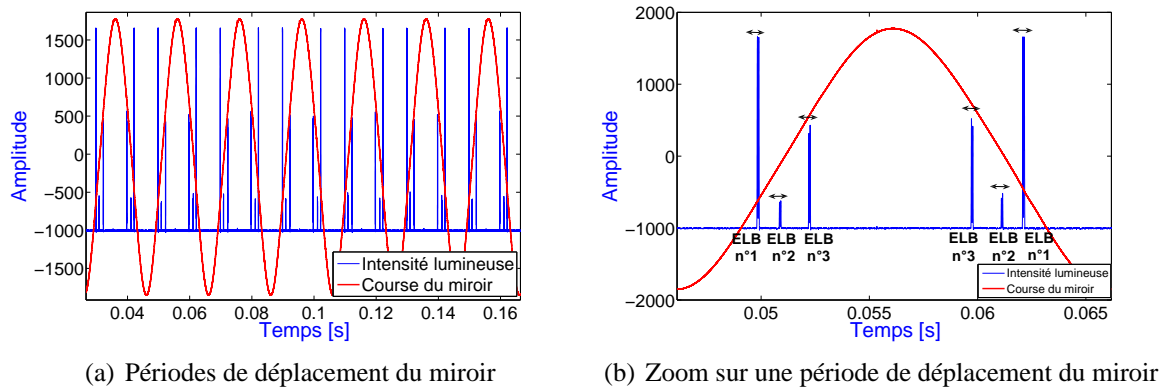


FIGURE 2.55: Signaux de mesure de l'intensité et de la course du moteur pour les trois ELB-CA.

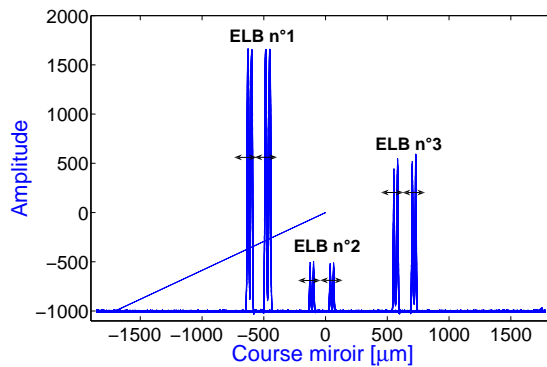


FIGURE 2.56: Courbe d'intensité en fonction de la course du miroir pour les trois ELB-CA.

Les figures 2.55 et 2.56 montrent que les pics d'interférence des ELB-CA (donc leurs longueurs) sont suffisamment éloignés les uns des autres pour qu'ils ne se chevauchent pas du fait du mouvement de la structure étudiée et des déformations engendrées au niveau des ELB-CA.

La mesure obtenue à partir des données brutes des ELB-CA collés sur une poutre E-L, pour un essai vibratoire avec une excitation par choc, est présentée sur la figure 2.57. Les données des fronts montants et descendants de chaque ELB-CA sont entremêlées. Il faut les dissocier pour pouvoir traiter séparément les mesures de chaque ELB-CA.

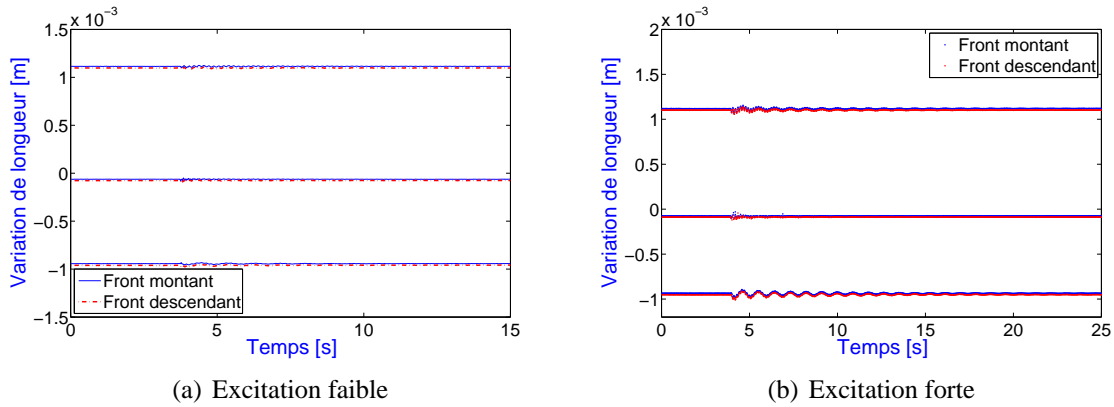


FIGURE 2.57: Acquisition de trois ELB-CA avec l'appareil FOGALE.

Une fois les données de chaque ELB-CA séparées les unes des autres, on obtient les signaux de mesure des fronts montants et descendants de chaque ELB-CA (Fig. 2.58), qu'il nous faut ensuite traiter avec la procédure détaillée précédemment (cf 2.5.1) pour obtenir trois signaux de mesure échantillonnés à  $100\text{ Hz}$ . Ces signaux sont ensuite traités, par exemple, pour déterminer les paramètres modaux de la structure étudiée.

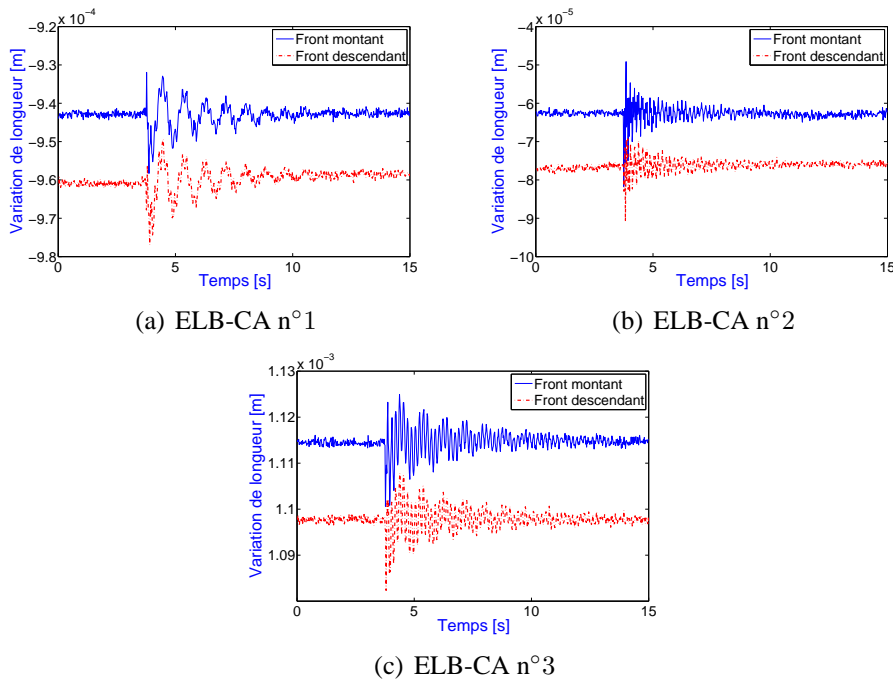


FIGURE 2.58: Fronts montants et descendants des trois ELB-CA.

Lorsqu'il n'y a pas d'erreurs de mesure (détections multiples ou absence de mesure), l'extraction du signal de mesure de chaque ELB-CA est rapide. Cela se complique rapidement lorsque des erreurs de mesure se produisent (cf 2.4.3).

Pour obtenir directement des fichiers de données avec les mesures des différents ELB-CA séparées les unes des autres, il faudrait implémenter la procédure de traitement des données réalisées en post-traitement sous Matlab directement au niveau du logiciel d'acquisition LabVIEW. Il faudrait ce-

pendant que les erreurs de mesure soient moins fréquentes pour que le traitement des données soit fiable.

## 2.6 Conclusion

Dans ce Chapitre, nous avons comparé deux systèmes de mesure optique permettant de réaliser des mesures dynamiques à partir d'ELB-CA et nous avons dégagé leurs principaux avantages et inconvénients.

Le premier système de mesure, la référence sur le marché actuellement, a permis de constater l'écart de maturité technologique entre les deux systèmes. L'appareil de mesure SMARTEC est plus abouti avec notamment 8 voies de mesures, une fréquence d'échantillonnage variable pouvant aller jusqu'à  $10\text{ kHz}$ , une précision de l'ordre de  $0.01\text{ }\mu\text{m}$  et une plage de mesure importante  $\pm 5\text{ mm}$ . Cependant, au niveau du capteur, la base de mesure n'est pas connue de manière précise car l'extrémité de la fibre de mesure est mesurante ainsi que le raccord des deux fibres au coupleur et que la fibre de référence. En conséquence, la mesure réalisée par le système est approximative. Les capteurs ne permettent pas, de part leur conception, le multiplexage en série. Le multiplexage en parallèle, grâce aux huit voies de mesure de l'appareil, était donc la seule solution pour réaliser la mesure de plusieurs CFO. De ce fait, l'acquisition est limitée à huit CFO en simultané. Par ailleurs, on peut considérer le coupleur comme faisant partie du capteur, ce qui rend celui-ci plutôt encombrant et intrusif donc inadapté pour des expériences en laboratoire de taille moyenne.

Le deuxième appareil, un prototype de la société FOGALE nanotech acquis par le LCPC, permet, de par sa plage de mesure ( $\pm 2\text{ mm}$ ), d'acquérir plusieurs ELB-CA en les multiplexant en série et/ou en parallèle (miroirs semi-réfléchissants, deuxième voie de mesure). Les inconvénients majeurs résident dans la fréquence d'échantillonnage fixe peu élevée du système ( $100\text{ Hz}$ ), qui limite le champ d'application aux domaines des basses fréquences (ponts, bâtiments...) et soumet la mesure au repliement spectral, et le niveau de bruit important ( $\approx 1\text{ }\mu\text{m}$ ). Le CFO, étant seulement constitué de la FO et parfois d'un enrobage complémentaire, est très peu intrusif et convient parfaitement pour instrumenter les structures minces ou légères. Pour les structures où l'environnement est plus difficile (ouvrages d'art), un enrobage spécifique [13] a été développé à cet effet, il suffit alors d'y incorporer le CFO.

Avant cela, il faudrait tout de même résoudre le problème de la fiabilité de la mesure délivrée par le système. En effet, la sensibilité des miroirs semi-réfléchissants à la déformation, entraînant des pertes de réflectivité et donc des pertes de points de mesure, ainsi que l'algorithme actuel de détection des maxima des pics d'interférence ne confèrent pas à l'appareil FOGALE une grande fiabilité et répétabilité dans les mesures. Ainsi, réaliser une analyse modale expérimentale complète précise n'est pour l'instant pas réalisable, surtout pour la détermination des vecteurs propres, du fait du manque de répétabilité et donc de la dispersion importante des résultats obtenus, ce que nous montrerons par la suite au Chapitre 4. Ces deux aspects sont prioritaires afin de pouvoir réaliser des mesures sur ouvrages.

Beaucoup de temps a été consacré à la mise au point et à la compréhension du prototype FOGALE qui laisse envisager des perspectives prometteuses, sous réserves de résoudre les quelques limitations technologiques développées dans ce Chapitre.

Dans le Chapitre suivant, nous allons nous attacher à déterminer la mesure générale réalisée par un ELB-CA, cette fois-ci d'un point de vue plus mécanique.

## 2.7 Bibliographie

- [1] Lopez-Higuera J.M., *Handbook of Optical Fibre Sensing Technology*, John Wiley & Sons, New York, 2002.
- [2] SMARTEC (<http://www.smartec.ch>), SOFO Products : SMARTape Flexi Deformation Sensor et Dynamic Reading Unit.
- [3] Glisic B., Inaudi D., *Integration of long-gage fiber-optic sensor into a fiber-reinforced composite sensing tape*, Symposium on Smart Structures and Materials, San Diego, USA, 2003.
- [4] Casciati F., Domaneschi M., Inaudi D., Figini A., Glisic B., Gupta A., *Long-gauge fiber-optic sensors : a new approach to dynamic system identification*, in Proceedings of the Third European Conference on Structural Control, Vienne, Autriche, 2004.
- [5] Inaudi D., Glisic B., Posenato D., *High-speed demodulation of long-gauge fibre optic strain sensors for dynamic structural monitoring*, 2nd European Conference on Health Monitoring, Munich, Germany, 2004.
- [6] SMARTEC (<http://www.smartec.ch>), SOFO Products : Standard Deformation Sensor et SMARTape Compact Deformation Sensor.
- [7] Zhao Y., Ansari F., *Quasi-distributed white light fiber optic strain sensor*, Optics Communications, 196(2001) 133-137.
- [8] Ansari F., Libo Y., *Mechanics of Bond and Interface Shear Transfer in Optical Fiber Sensors*, Journal of Engineering Mechanics, 124(4)(1998) 385-394.
- [9] Perez J.P., *Optique : fondements et applications avec 250 exercices et problèmes résolus*, Dunod, Paris, 2004.
- [10] FOGALE (<http://www.fogale.fr>), Product : LISE SYSTEM, OCT-EXTEND.
- [11] Courteville A., Garcia F., Nel L., *Positioning of optical payload - SALT telescope*, in Proceedings of the International Society for Optical Engineering, Semiconductor Lasers and Laser Dynamics, 2004.
- [12] Joindot M., *Les télécommunications par fibres optiques*, Dunod, Paris, 1996.
- [13] Delepine-Lesoille S., Merliot E., Boulay C., Quézel L., Delaveau M., Courteville A., *Quasi-distributed optical fibre extensometers for continuous embedding into concrete : design and realization*, Smart Materials and Structures, 15(2006) 931-938.

## Chapitre 3

# Calcul analytique de la mesure réalisée par un ELB-CA

---

**C**E CHAPITRE présente le calcul analytique complet, sans hypothèses simplificatrices, de la mesure réalisée par un Extensomètre de Longue base de mesure Continûment Attaché à une structure quelconque. La mesure dépend de la déformation subie par le capteur, de l'indice de réfraction et tient compte de l'influence de la température, de l'enrobage de la fibre, de l'effet photoélastique et de la forme initiale du capteur.

L'expression générale obtenue est ensuite appliquée au cas de la flexion dans un plan d'une poutre droite de type Euler-Bernoulli et plusieurs hypothèses simplificatrices sont effectuées suivant le niveau de flèche de la poutre. Deux modèles simplifiés sont alors obtenus : le cas Linéaire ou cas L avec l'hypothèse des petites déformations et des petites rotations (équations du mouvement de la poutre découplées et linéaires) et le cas Général ou cas G avec l'hypothèse des petites déformations et des rotations modérées (équations du mouvement de la poutre couplées et non-linéaires).

L'expression de la mesure d'un ELB-CA traditionnellement utilisée dans l'état de l'art est comparée à celle obtenue pour le cas G et il apparaît ainsi que les calculs généralement effectués par les utilisateurs des ELB sont valides pour les équations du mouvement de la poutre «découplées», avec de «faibles» amplitudes de déformation.

---

## Plan du Chapitre 3

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>71</b>
<b>3.2</b>	<b>Définition de la mesure réalisée par un ELB-CA</b>	<b>71</b>
3.2.1	Détermination de la variation d'abscisse curviligne	72
3.2.2	Détermination de l'indice de réfraction : effet photoélastique	72
3.2.3	Influence de l'enrobage de la fibre optique	75
3.2.4	Influence de la température	75
3.2.5	Résumé	77
<b>3.3</b>	<b>Application au cas d'une poutre droite d'Euler-Bernoulli</b>	<b>77</b>
3.3.1	Calcul de la déformation et de la variation d'abscisse curviligne	78
3.3.2	Calcul de l'indice de réfraction	80
3.3.3	Calcul de la mesure d'un ELB-CA	82
<b>3.4</b>	<b>Hypothèses simplificatrices</b>	<b>82</b>
3.4.1	Hypothèse des petites déformations	82
3.4.2	Définition des différentes hypothèses sur les rotations des sections de la poutre	83
3.4.3	Hypothèse des rotations modérées : cas Général	85
3.4.4	Hypothèse des petites rotations : cas Linéaire	86
3.4.5	Décomposition de la mesure d'un ELB-CA	86
<b>3.5</b>	<b>Lien avec l'état de l'art</b>	<b>87</b>
3.5.1	Lien entre la mesure d'un ELB-CA et la courbure	87
3.5.2	Combinaisons des mesures de deux ELB-CA	88
3.5.3	Mesure d'un ELB-CA dans l'état de l'art	89
<b>3.6</b>	<b>Autre calcul de la mesure d'un ELB-CA : déformation d'une ligne</b>	<b>90</b>
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>92</b>
<b>3.8</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>92</b>

---

### 3.1 Introduction

Ce Chapitre s'attache à formuler, de manière analytique, la mesure réalisée par un ELB-CA afin d'anticiper sa réponse et d'évaluer sa capacité pour l'évaluation dynamique des structures. Pour cela, le calcul analytique complet de la mesure d'un ELB-CA, sans hypothèses simplificatrices, est effectué.

Ensuite, un cas d'application est choisi : la flexion dans un plan d'une poutre droite de type Euler-Bernoulli. Pour ce cas, le modèle complet de la mesure est déterminé et, afin de simplifier son expression, plusieurs hypothèses sont effectuées suivant le niveau de flèche de la poutre aboutissant à deux modèles simplifiés. Par ailleurs, le lien entre ces modèles et la formule traditionnellement utilisée dans l'état de l'art est réalisé.

Enfin, un autre calcul de la mesure réalisée par un ELB-CA est proposé dans l'optique de simulations numériques réalisées à partir de données provenant de modélisations par éléments finis.

### 3.2 Définition de la mesure réalisée par un ELB-CA

Une spécificité de ce capteur concerne sa fixation à la structure : non pas en deux points mais de manière continue au niveau de la surface de la structure étudiée. Comme décrit précédemment au Chapitre 2, le guidage de l'onde sur une courbe sera mis à profit, par opposition aux Capteurs à Cordes Vibrantes (CCV) qui mesurent des distances euclidiennes entre deux points. En effet, la FO est un guide d'onde dans lequel l'énergie reste confinée au centre (sur  $10 \mu m$ ). La lumière suivant la forme prise par la FO, un ELB-CA permet donc de mesurer la distance entre deux points particuliers le long de la FO (Fig. 3.1).

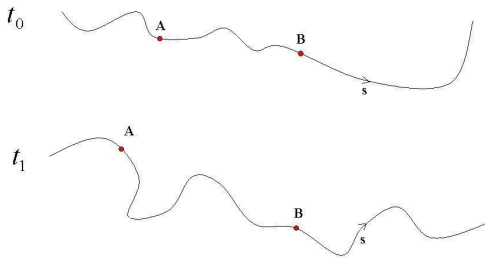


FIGURE 3.1: Mesure de l'ELB

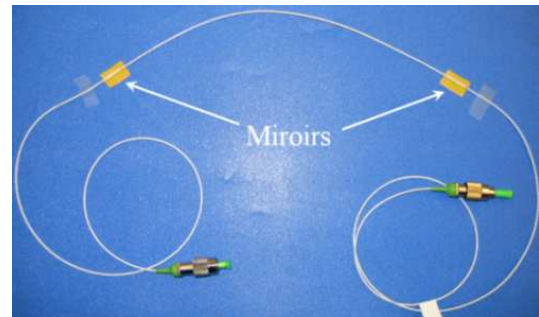


FIGURE 3.2: Photo d'un ELB de 20 cm.

Toutefois, d'après le principe de Fermat [1], la mesure temporelle théorique réalisée par un ELB-CA est une mesure de longueur optique et non de longueur physique :

$$D_{opt}(t) = \int_{s_A}^{s_B} n ds \quad (3.1)$$

où  $n$  est l'indice de réfraction (rapport de la vitesse de propagation de la lumière dans le matériau par rapport à celle dans le vide),

$A$  et  $B$  sont les points où les miroirs du capteur sont situés, d'abscisses respectives  $s_A$  et  $s_B$  ;  $s$  représentant l'abscisse curviligne.

$D_{opt}(t)$  est la longueur optique mesurée par le capteur que l'on cherche à définir par rapport à la longueur physique  $D_{AB}(t)$  qui est définie par

$$D_{AB}(t) = \int_{s_A}^{s_B} ds \quad (3.2)$$

### 3.2.1 Détermination de la variation d'abscisse curviligne

D'après la description mathématique de la déformation [2], l'expression de la variation d'abscisse curviligne  $ds^1$  s'exprime en fonction des termes du tenseur de déformation  $\varepsilon_{ij}$  :

$$ds^2 = ds_0^2 + 2\varepsilon_{ij}dx_i dx_j \quad i, j = 1 \dots 3 \quad (3.3)$$

avec

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) \quad (3.4)$$

et

$$ds_0^2 = G_{ij}dx_i dx_j \quad (3.5)$$

où

$$\begin{cases} G_{ij} &= \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \\ U_i &= x'_i - x_i \end{cases} \quad (3.6)$$

Les  $f_i$  sont les composantes de la fonction vectorielle  $F$  définissant la position de l'ELB-CA et  $U$  est le vecteur déformation ou vecteur déplacement. Les coordonnées  $x'_i$  du point déplacé sont des fonctions des coordonnées  $x_i$  du même point avant son déplacement. De ce fait, le vecteur déformation est également fonction des coordonnées  $x_i$ . La donnée du vecteur  $U$  en fonction de  $x_i$  détermine entièrement la déformation de la structure.

L'expression (3.3) s'écrit alors :

$$ds^2 = (G_{ij} + 2\varepsilon_{ij}) dx_i dx_j \quad (3.7)$$

### 3.2.2 Détermination de l'indice de réfraction : effet photoélastique

Au premier ordre uniquement, l'indice de réfraction est constant égal à  $n_0$  et diffère avec le milieu de propagation de l'onde électromagnétique. Par exemple pour l'eau il vaut 1.3, pour le verre 1.5.

Au second ordre, sous l'effet d'actions extérieures, l'indice de réfraction varie. Les paramètres généralement pris en compte pour le calcul de la variation d'indice sont la température et la déformation subie par la FO :

$$dn = \frac{\partial n}{\partial T} \cdot dT + \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \cdot d\varepsilon = dn_T + dn_\varepsilon \quad (3.8)$$

Nous allons dans un premier temps nous intéresser à la dépendance de l'indice de réfraction avec la déformation  $dn_\varepsilon = \partial n / \partial \varepsilon \cdot d\varepsilon$ .

Dans un matériau, l'effet qui couple les déformations mécaniques et l'indice de réfraction s'appelle l'effet photoélastique. Cet effet est décrit dans [3]. Plusieurs références dans la littérature prennent

<sup>1</sup>Les termes  $ds$  et  $ds_0$  peuvent également être calculés avec une approche géométrique à partir de la norme de la dérivée du vecteur tangent au point considéré (vecteur de la base de Frénet) respectivement à un instant  $t$  quelconque et à  $t = 0$ .



### 3.2 Définition de la mesure réalisée par un ELB-CA

cet effet en compte dans la mesure réalisée par des CFO [4][5][6] tandis que d'autres préfèrent le négliger ou l'approximer par un facteur empirique [7].

Nous allons en expliquer brièvement le principe. Pour plus de détails, on se référera à [3]. Tout d'abord, rappelons l'expression du tenseur diélectrique :

$$D = \epsilon E = \epsilon_0 E + P \quad (3.9)$$

où  $D$  est le tenseur diélectrique,  
 $E$  le vecteur champ électrique,  
 $P$  le vecteur de polarisation électrique,  
 $\epsilon_0$  la permittivité du vide,  
 $\epsilon$  le tenseur diélectrique qui dépend du milieu considéré.

Pour les tenseurs, on peut écrire en notations contractées

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.10)$$

Pour un milieu anisotrope, la densité d'énergie du champ électrique emmagasinée dans le milieu est

$$U_e = \frac{1}{2} E \cdot D = \frac{1}{2} E_i \epsilon_{ij} E_j \quad (3.11)$$

Les surfaces de densité d'énergie  $U_e$ , constante dans l'espace défini par le tenseur diélectrique  $D$  (3.11), peuvent être décrites par l'équation suivante :

$$\frac{D_{x_1}^2}{\epsilon_{x_1}} + \frac{D_{x_2}^2}{\epsilon_{x_2}} + \frac{D_{x_3}^2}{\epsilon_{x_3}} = 2U_e \quad (3.12)$$

où  $\epsilon_{x_1}$ ,  $\epsilon_{x_2}$  et  $\epsilon_{x_3}$  sont les constantes diélectriques principales.

Les indices de réfraction principaux  $n_{x_1}$ ,  $n_{x_2}$  et  $n_{x_3}$  sont définis par  $n_{x_i}^2 = \epsilon_i / \epsilon_0$ . En remplaçant  $D / \sqrt{2U_e}$  par  $r$ , le vecteur position, la dernière équation s'écrit alors

$$\frac{x_1^2}{n_{x_1}^2} + \frac{x_2^2}{n_{x_2}^2} + \frac{x_3^2}{n_{x_3}^2} = 1 \quad (3.13)$$

Cette expression est l'équation d'un ellipsoïde avec pour axes principaux des axes parallèles aux directions  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ , de longueurs respectives  $2n_{x_1}$ ,  $2n_{x_2}$  et  $2n_{x_3}$ . Cet ellipsoïde s'appelle l'ellipsoïde des indices. Il est principalement utilisé pour trouver les deux indices de réfraction et les deux directions du tenseur diélectrique  $D$  associés avec les deux ondes planes qui peuvent se propager le long d'une direction arbitraire  $s$  du milieu.

L'effet photoélastique traduisant les variations de l'indice de réfraction d'un matériau soumis à un champ de déformation peut s'exprimer par :

$$\Delta \eta_{ij} = \Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_{ij} = p_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.14)$$

où  $\Delta \eta_{ij}$  représente la variation du tenseur de perméabilité défini par  $\eta_{ij} = \epsilon_0 (\epsilon^{-1})_{ij}$  avec  $\epsilon^{-1}$  l'inverse du tenseur diélectrique,  
 $\varepsilon_{kl}$  le tenseur de déformation,  
 $p_{ijkl}$  le tenseur des constantes photoélastiques.

L'ellipsoïde des indices pour un matériau soumis à un champ de déformation est alors donné par l'équation

$$(\eta_{ij} + p_{ijkl}\varepsilon_{kl}) x_i x_j = 1 \quad (3.15)$$

En se ramenant au système de coordonnées principales et du fait de la symétrie des tenseurs, l'équation (3.14) devient en notations contractées :

$$\Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_i = p_{ij}\varepsilon_j \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.16)$$

avec

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_1} \\ \varepsilon_{x_2} \\ \varepsilon_{x_3} \\ \varepsilon_{x_1 x_2} \\ \varepsilon_{x_2 x_3} \\ \varepsilon_{x_1 x_3} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

L'équation de l'ellipsoïde des indices en présence d'un champ de déformation est donc

$$\begin{aligned} & x_1^2 \left( \frac{1}{n_{x_1}^2} + p_{11}\varepsilon_1 + p_{12}\varepsilon_2 + p_{13}\varepsilon_3 + p_{14}\varepsilon_4 + p_{15}\varepsilon_5 + p_{16}\varepsilon_6 \right) \\ & + x_2^2 \left( \frac{1}{n_{x_2}^2} + p_{21}\varepsilon_1 + p_{22}\varepsilon_2 + p_{23}\varepsilon_3 + p_{24}\varepsilon_4 + p_{25}\varepsilon_5 + p_{26}\varepsilon_6 \right) \\ & + x_3^2 \left( \frac{1}{n_{x_3}^2} + p_{31}\varepsilon_1 + p_{32}\varepsilon_2 + p_{33}\varepsilon_3 + p_{34}\varepsilon_4 + p_{35}\varepsilon_5 + p_{36}\varepsilon_6 \right) \\ & + 2x_1x_2 (p_{41}\varepsilon_1 + p_{42}\varepsilon_2 + p_{43}\varepsilon_3 + p_{44}\varepsilon_4 + p_{45}\varepsilon_5 + p_{46}\varepsilon_6) \\ & + 2x_2x_3 (p_{51}\varepsilon_1 + p_{52}\varepsilon_2 + p_{53}\varepsilon_3 + p_{54}\varepsilon_4 + p_{55}\varepsilon_5 + p_{56}\varepsilon_6) \\ & + 2x_1x_3 (p_{61}\varepsilon_1 + p_{62}\varepsilon_2 + p_{63}\varepsilon_3 + p_{64}\varepsilon_4 + p_{65}\varepsilon_5 + p_{66}\varepsilon_6) \\ & = 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

où  $n_{x_1}$ ,  $n_{x_2}$  et  $n_{x_3}$  sont les indices de réfraction principaux.

### Application à la fibre optique monomode

La lumière transmise par une FO monomode peut se décomposer en deux termes polarisés linéairement. La figure 3.3 représente une portion de fibre collée à la surface d'un matériau.

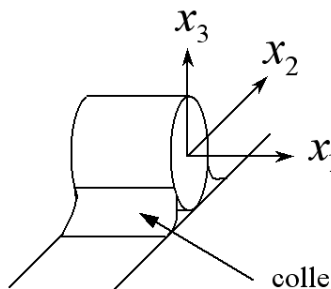


FIGURE 3.3: Portion de FO collée à la surface d'un matériau.

L'axe de la fibre est orienté suivant la direction  $x_1$  (Fig. 3.3). Les deux composantes polarisées de la lumière transmise dans la FO monomode sont orthogonales et se propagent dans les plans  $(x_1, x_2)$  et  $(x_1, x_3)$ . Ces deux composantes permettent de calculer l'indice de réfraction moyen en chaque point de la fibre en effectuant la moyenne de leurs indices de réfraction respectifs qui sont  $n_{x_2}$  et  $n_{x_3}$ .

$$n_{opt} = \frac{n_{x_2} + n_{x_3}}{2} \quad (3.19)$$

Les indices de réfraction  $n_{x_2}$  et  $n_{x_3}$  peuvent être calculer directement à partir de (3.14)

$$\begin{cases} \Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_2 = p_{2j} \varepsilon_j \\ \Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_3 = p_{3j} \varepsilon_j \end{cases} \quad (3.20)$$

soit

$$\begin{cases} \frac{1}{n_{x_2}^2} = \frac{1}{n_0^2} + p_{2j} \varepsilon_j \\ \frac{1}{n_{x_3}^2} = \frac{1}{n_0^2} + p_{3j} \varepsilon_j \end{cases} \quad (3.21)$$

d'où

$$\begin{cases} n_{x_2}^2 = \frac{n_0}{\sqrt{1 + n_0^2 p_{2j} \varepsilon_j}} \\ n_{x_3}^2 = \frac{n_0}{\sqrt{1 + n_0^2 p_{3j} \varepsilon_j}} \end{cases} \quad (3.22)$$

D'après (3.19), l'expression de l'indice de réfraction moyen vaut alors [5] :

$$n = \frac{n_0}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + n_0^2 p_{2j} \varepsilon_j}} + \frac{1}{\sqrt{1 + n_0^2 p_{3j} \varepsilon_j}} \right) \quad (3.23)$$

### 3.2.3 Influence de l'enrobage de la fibre optique

Le transfert de la déformation du matériau au coeur de la FO incorporée au matériau ou collée à sa surface va dépendre de l'enrobage du CFO. En effet, suivant l'enrobage choisi, le transfert de la déformation de la structure étudiée au capteur va être plus ou moins efficace : des biais systématiques de l'ordre de 10 % peuvent être observés [8]. Un facteur est donc introduit pour prendre en compte le transfert de la déformation. Par ailleurs, celui-ci peut ne pas être constant le long de la FO [9][10], la déformation du matériau transmise au capteur sera alors :

$$\varepsilon_{FO} = \beta_0(s) \cdot \varepsilon_{struct} = \beta_0(x_1, x_2, x_3) \cdot \varepsilon_{struct} \quad (3.24)$$

où  $\varepsilon_{FO}$  est la déformation transmise au coeur de la fibre et  $\varepsilon_{struct}$  la déformation de la structure.

### 3.2.4 Influence de la température

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'influence de la température sur la mesure d'un ELB-CA (3.1). La température aura non seulement une influence sur la déformation du matériau ou de la structure étudié mais également sur la FO qui compose le capteur.

#### Influence au niveau de la structure

Au niveau de la structure étudiée, le terme dû à la variation de température intervenant pour le calcul de la variation d'abscisse curviligne  $ds$  (3.7) est

$$ds_{therm} = \alpha_{struct_{ij}} dx_i dx_j \quad (3.25)$$

avec  $\alpha_{struct_{ij}}$  le tenseur de dilatation thermique de la structure.

### Influence au niveau du capteur à fibre optique

Au niveau du CFO, la température va avoir deux effets : le premier sur l'indice de réfraction et le deuxième au niveau de la déformation de la FO.

- Pour l'indice de réfraction, le terme dépendant de la variation de température vaut :

$$n_T = \frac{\partial n}{\partial T} \Delta T \quad (3.26)$$

où  $\Delta T = T(t) - T_0$  est la variation de température par rapport l'instant initial et  $\partial n / \partial T$  est la dépendance de l'indice de réfraction à la température dont la détermination expérimentale est précise [11]. La FO étant un matériau isotrope, la dilatation thermique est la même dans toutes les directions.

- Au niveau de la fibre constituant le capteur, la variation de température va entraîner une déformation. L'allongement de la FO dû à la variation de température est alors défini par

$$D_{AB}(t) = \alpha_{FO} L_0 \Delta T \quad (3.27)$$

où  $L_0 = D_{AB}(0)$  est la longueur physique initiale de l'ELB-CA et  $\alpha_{FO}$  le coefficient de dilatation thermique de la FO.

Cependant, cette dilatation tout comme celle du matériau définie précédemment en (3.25) sont des dilatations libres. Lorsqu'un CFO est noyé dans un matériau, il existe des interactions entre les dilatations du matériau et celles des différents constituants du capteur (coeur, enrobages primaires et secondaires). Les différentes dilatations peuvent alors être gênées [12][13][14] (Fig. 3.4).

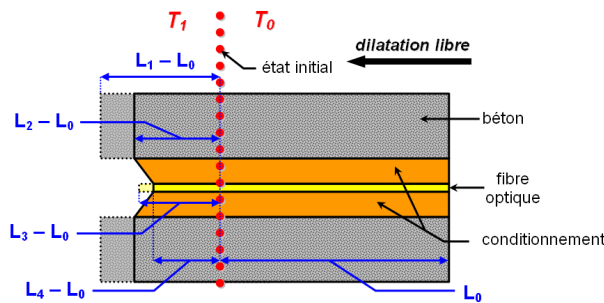


FIGURE 3.4: Exemple de dilatations différentielles entre le CFO et le béton [14].

La déformation mesurée, résultant de l'allongement de la FO rapportée à sa base de mesure, est différente de la déformation de la poutre en béton :

$$(L_2 - L_0)_{\text{allongement béton}} > (L_4 - L_0)_{\text{allongement FO}} \Rightarrow \varepsilon_{\text{béton}} > \varepsilon_{\text{FO}}$$

Trois types de dilatation thermique, sources de perturbations dans la mesure de déformation, peuvent être mis en évidence : dilatation propre, dilatation gênée et dilatation entraînée.

### 3.3 Application au cas d'une poutre droite d'Euler-Bernoulli

Pour prendre en compte les interactions entre la dilatation de la FO et celle du milieu où elle est incorporée, nous introduisons au niveau de la variation d'abscisse curviligne défini en (3.25) un coefficient  $\alpha_{interaction}$  à la place du coefficient de dilatation thermique du matériau :

$$ds^2 = (G_{ij} + 2\varepsilon_{ij} + \alpha_{interaction_{ij}}) dx_i dx_j \quad (3.28)$$

#### 3.2.5 Résumé

Au final, en regroupant l'influence des différents paramètres (déformation, température et enrobage), la mesure d'un ELB-CA vaut

$$D_{opt}(t) = \int_{s_A}^{s_B} n ds$$

avec

$$n = \frac{n_0}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + n_0^2 p_{2k} \varepsilon_{total_k}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + n_0^2 p_{3k} \varepsilon_{total_k}}} \right) + \frac{\partial n}{\partial T} \Delta T \quad (3.29)$$

$$ds^2 = [G_{ij} + 2\varepsilon_{total_{ij}}] dx_i dx_j \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_{total_{ij}} = \beta_0 (\varepsilon_{ij} + \alpha_{interaction_{ij}}) \quad (3.31)$$

où  $i, j = 1, \dots, 3$  et  $k = 1, \dots, 6$  (notation contractée).

Pour l'étude en dynamique, nous supposons que les phénomènes rentrant en jeu dans la mesure ont des durées très inférieures aux variations thermiques qui seront donc négligées :

$$n = \frac{n_0}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + n_0^2 \beta_0 p_{2k} \varepsilon_k}} + \frac{1}{\sqrt{1 + n_0^2 \beta_0 p_{3k} \varepsilon_k}} \right) \quad (3.32)$$

$$ds^2 = [G_{ij} + 2\beta_0 \varepsilon_{ij}] dx_i dx_j \quad (3.33)$$

### 3.3 Application au cas d'une poutre droite d'Euler-Bernoulli

Pour notre étude, les notations suivantes sont employées :  $x = x_1$ ,  $y = x_2$  et  $z = x_3$ . L'exemple d'application choisi pour l'étude détaillée de la mesure d'un ELB-CA concerne la flexion transverse d'une poutre dans le plan  $(O, x, y)$  avec les hypothèses cinématiques d'Euler-Bernoulli : une section droite de la poutre reste plane et perpendiculaire à l'axe neutre.

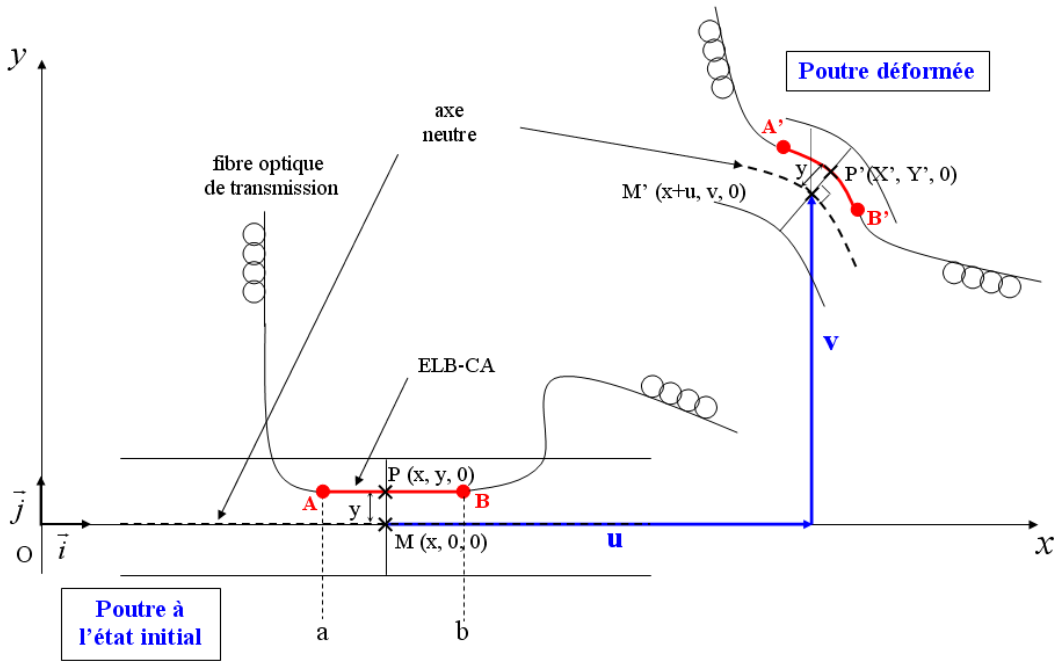


FIGURE 3.5: Déformation d'une section droite transverse de la poutre.

### 3.3.1 Calcul de la déformation et de la variation d'abscisse curviligne

#### Cas de l'axe neutre

Le champ de déplacement de l'axe neutre est défini dans le repère galiléen  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  par (Fig. 3.5) :

$$\overrightarrow{OM}[x, 0, 0] \rightarrow \overrightarrow{OM}'[x + u(x, t), v(x, t), 0] \quad (3.34)$$

où  $u$  et  $v$  sont respectivement les déplacements axial et transverse de la poutre.

Le vecteur déplacement  $U$  est alors défini par

$$U = \begin{pmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Pour des soucis de clarté dans les expressions, les variables  $x$  et  $t$  ne seront plus mentionnées. Nous aurons alors  $u(x, t) = u$ ,  $v(x, t) = v$ ,  $\frac{du}{dx}(x, t) = u'$  et  $\frac{dv}{dx}(x, t) = v'$ , il en sera de même pour les dérivées secondes.

La configuration de la poutre à l'origine est telle que l'axe neutre est orienté suivant l'axe  $x$ . La seule variable rentrant en jeu dans l'étude de la déformation au niveau de l'axe neutre est la variable  $x$  ( $\partial./\partial y = \partial./\partial z = 0$ ). La fonction vectorielle  $F$  définissant la position de l'axe neutre de la poutre est

$$F = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

### 3.3 Application au cas d'une poutre droite d'Euler-Bernoulli

Alors d'après (3.5),  $ds_0$  est égal à :

$$ds_0 = \sqrt{G_{11}} dx^2 = dx \quad (3.37)$$

Le seul terme non nul du tenseur de déformation défini en (3.4) est  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{xx}$  et vaut

$$\varepsilon_{xx}^M = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} \quad (3.38)$$

Par suite, d'après (3.33)  $ds$  est égal à

$$ds = \sqrt{1 + 2\beta_0 \varepsilon_{xx}^M} dx = \sqrt{1 + \beta_0(2u' + u'^2 + v'^2)} dx \quad (3.39)$$

#### Cas d'une ligne située à une distance $y$ constante de l'axe neutre

Un point  $P$  situé à une distance  $y$  de l'axe neutre, **supposée constante**, se déplacera en  $P'$  (Fig. 3.5) :

$$\overrightarrow{OP}[x, y, 0] \rightarrow \overrightarrow{OP'}[X', Y', 0] \quad (3.40)$$

avec

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP'}(x, y, t) &= \overrightarrow{OM}(x, t) + \overrightarrow{MM'}(x, t) + \overrightarrow{M'P'}(x, y, t) \\ &= \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + u + y \cdot N_x \\ v + y \cdot N_y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.41)$$

où  $N_x$  et  $N_y$  sont respectivement les composantes axiale et transverse du vecteur normal à l'axe neutre  $\vec{N}$  défini par :

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{K} \wedge \vec{T}|} \vec{K} \wedge \vec{T} = \frac{1}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \begin{pmatrix} -v' \\ 1+u' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

$$\text{avec } \vec{T} = \frac{1}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \begin{pmatrix} 1+u' \\ v' \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ le vecteur tangent à l'axe neutre et } \vec{K} = \vec{k}.$$

Pour une ligne de hauteur  $y$ , le vecteur déplacement  $U$  est défini par

$$U = \begin{pmatrix} u + yN_x \\ v + y(N_y - 1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

La configuration de la poutre à l'origine étant telle que l'axe neutre est orienté suivant l'axe  $x$ , la ligne située à une distance  $y$  de l'axe neutre le sera également. Nous nous intéressons à une ligne particulière de la poutre,  $y$  ne sera donc pas une variable du problème ( $dy = 0$ ). La seule variable intervenant dans l'étude de la déformation de la ligne sera la variable  $x$  ( $\partial./\partial y = \partial./\partial z = 0$ ). La fonction vectorielle  $F$  définissant la position de la ligne de la poutre est

$$F = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Alors d'après (3.5),  $ds_0$  est égal à :

$$ds_0 = \sqrt{G_{11}}dx^2 = dx \quad (3.45)$$

Les seuls termes non nuls du tenseur de déformation défini en (3.4) sont  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{xx}$  et  $\varepsilon_4 = \varepsilon_{xy}$ . Cependant le terme  $\varepsilon_{xy}$  ne sera pas pris en compte pour le calcul de la variation d'abscisse curviligne  $ds$  puisque  $dy = 0$ .

L'expression de  $\varepsilon_{xx}$  est ici

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^P &= \frac{\partial(u+dN_x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(u+yN_x)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial[v+y(N_y-1)]}{\partial x} \right)^2 \\ &= u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y[(1+u')N'_x + v'N'_y] + \frac{y^2}{2}(N'^2_x + N'^2_y) \end{aligned} \quad (3.46)$$

or

$$\begin{cases} N'_x = \frac{(1+u')[u''v'-(1+u')v'']}{[(1+u')^2+v'^2]^{\frac{3}{2}}} \\ N'_y = \frac{v'[u''v'-(1+u')v'']}{[(1+u')^2+v'^2]^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (3.47)$$

donc

$$\begin{cases} (1+u')N'_x + v'N'_y = \frac{u''v'-(1+u')v''}{\sqrt{(1+u')^2+v'^2}} \\ N'^2_x + N'^2_y = \frac{[u''v'-(1+u')v'']^2}{[(1+u')^2+v'^2]^2} \end{cases} \quad (3.48)$$

Finalement, la déformation est égale à

$$\varepsilon_{xx}^P = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y \frac{u''v'-(1+u')v''}{\sqrt{(1+u')^2+v'^2}} + \frac{y^2}{2} \frac{[u''v'-(1+u')v'']^2}{[(1+u')^2+v'^2]^2} \quad (3.49)$$

On remarque ici que la déformation d'une ligne de la poutre située à une hauteur  $y$  par rapport à l'axe neutre s'exprime en fonction de la déformation de l'axe neutre (3.38) et d'un autre terme faisant intervenir la hauteur  $y$  :

$$\varepsilon_{xx}^P = \varepsilon_{xx}^M + \varepsilon^y \quad (3.50)$$

$$\text{avec } \varepsilon^y = y \frac{u''v'-(1+u')v''}{\sqrt{(1+u')^2+v'^2}} + \frac{y^2}{2} \frac{[u''v'-(1+u')v'']^2}{[(1+u')^2+v'^2]^2}$$

Par suite, l'expression de  $ds$  est d'après (3.7)

$$ds = \sqrt{1 + 2\beta_0 \left( u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y \frac{u''v'-(1+u')v''}{\sqrt{(1+u')^2+v'^2}} + \frac{y^2}{2} \frac{[u''v'-(1+u')v'']^2}{[(1+u')^2+v'^2]^2} \right)} dx \quad (3.51)$$

### 3.3.2 Calcul de l'indice de réfraction

La FO qui compose le capteur est en silice. Elle est donc constituée d'un matériau **linéaire, homogène et isotrope**. Le tenseur des constantes photoélastiques est alors défini par [3] :

$$(p_{ij}) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12}) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$



### 3.3 Application au cas d'une poutre droite d'Euler-Bernoulli

Les indices de réfraction principaux sont calculés à partir de (3.14) :

$$\begin{cases} \Delta\eta_{11} = \left(\frac{1}{n^2}\right)_1 = p_{11}\varepsilon_1 + p_{12}\varepsilon_2 + p_{13}\varepsilon_3 + p_{14}\varepsilon_4 + p_{15}\varepsilon_5 + p_{16}\varepsilon_6 \\ \Delta\eta_{22} = \left(\frac{1}{n^2}\right)_2 = p_{21}\varepsilon_1 + p_{22}\varepsilon_2 + p_{23}\varepsilon_3 + p_{24}\varepsilon_4 + p_{25}\varepsilon_5 + p_{26}\varepsilon_6 \\ \Delta\eta_{33} = \left(\frac{1}{n^2}\right)_3 = p_{31}\varepsilon_1 + p_{32}\varepsilon_2 + p_{33}\varepsilon_3 + p_{34}\varepsilon_4 + p_{35}\varepsilon_5 + p_{36}\varepsilon_6 \\ \Delta\eta_{ij} = 0 \quad \text{pour } i=j \end{cases} \quad (3.53)$$

Modélisons la FO par une poutre de type Euler-Bernoulli. Les composantes en cisaillement sont donc négligeables, soient  $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0$ . Si la FO est incluse dans la poutre ou collée à sa surface, elle subit les mêmes déformations que la poutre au coefficient  $\beta_0$  près (voir 3.2.3).

Par ailleurs, la FO étant un matériau isotrope, la loi de Hooke peut s'appliquer :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (3.54)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] \quad (3.55)$$

On a alors

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1 \quad (3.56)$$

avec  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{xx}^P$  défini en (3.49).

Le système d'équations (3.53) permettant de calculer les indices de réfraction principaux devient

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{n^2}\right)_1 = \beta_0(p_{11} - 2\nu p_{12})\varepsilon_{xx}^P \\ \left(\frac{1}{n^2}\right)_2 = \beta_0[(1-\nu)p_{12} - \nu p_{11}]\varepsilon_{xx}^P \\ \left(\frac{1}{n^2}\right)_3 = \beta_0[(1-\nu)p_{12} - \nu p_{11}]\varepsilon_{xx}^P \end{cases} \quad (3.57)$$

et l'équation de l'ellipsoïde des indices (3.18) est donc

$$\begin{aligned} x^2 \left[ \frac{1}{n_0^2} + \beta_0(p_{11} - 2\nu p_{12})\varepsilon_{xx}^P \right] + y^2 \left[ \frac{1}{n_0^2} + \beta_0[(1-\nu)p_{12} - \nu p_{11}]\varepsilon_{xx}^P \right] \\ + z^2 \left[ \frac{1}{n_0^2} + \beta_0[(1-\nu)p_{12} - \nu p_{11}]\varepsilon_{xx}^P \right] = 1 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Les indices de réfraction principaux (3.13) sont alors définis par

$$\begin{cases} \frac{1}{n_x^2} = \frac{1}{n_0^2} + \beta_0(p_{11} - 2\nu p_{12})\varepsilon_{xx}^P \\ \frac{1}{n_y^2} = \frac{1}{n_0^2} + \beta_0[-\nu p_{11} + (1-\nu)p_{12}]\varepsilon_{xx}^P \\ \frac{1}{n_z^2} = \frac{1}{n_0^2} + \beta_0[-\nu p_{11} + (1-\nu)p_{12}]\varepsilon_{xx}^P \end{cases} \quad (3.59)$$

soit

$$\begin{cases} n_x = \frac{n_0}{\sqrt{1+n_0^2\beta_0(p_{11}-2\nu p_{12})\varepsilon_{xx}^P}} \\ n_y = \frac{n_0}{\sqrt{1+n_0^2\beta_0[-\nu p_{11}+(1-\nu)p_{12}]\varepsilon_{xx}^P}} \\ n_z = \frac{n_0}{\sqrt{1+n_0^2\beta_0[-\nu p_{11}+(1-\nu)p_{12}]\varepsilon_{xx}^P}} \end{cases} \quad (3.60)$$

d'où, d'après (3.19), l'indice de réfraction moyen en chaque point de la FO

$$n = \frac{n_0}{2\sqrt{1+n_0^2\beta_0[-\nu p_{11}+(1-\nu)p_{12}]\varepsilon_{xx}^P}} \quad (3.61)$$

### 3.3.3 Calcul de la mesure d'un ELB-CA

A partir des expressions de la variation d'abscisse curviligne  $ds$  (3.51) et de l'indice de réfraction  $n$  (3.61), la mesure réalisée par un ELB-CA situé sur une ligne de hauteur  $y$  par rapport à l'axe neutre d'une poutre entre deux points  $A$  et  $B$ , d'abscisses respectives  $x = a$  et  $x = b$ , est :

$$D_{opt}(t) = \int_a^b \frac{n_0}{2\sqrt{1 + n_0^2\beta_0[(1-\nu)p_{12} - \nu p_{11}]\varepsilon_{xx}}} \sqrt{1 + 2\beta_0\varepsilon_{xx}} dx \quad (3.62)$$

avec  $\varepsilon_{xx} (= \varepsilon_{xx}^P)$  la déformation axiale subie par la fibre définie en (3.49),  
 $n_0 = 1.46$  l'indice de réfraction de la silice,  
 $\nu = 0.25$  le coefficient de Poisson de la fibre,  
 $p_{11} \approx 0.12$  et  $p_{12} \approx 0.27$ , les constantes photoélastiques de la fibre [9],  
 $\beta_0$  le facteur de restitution de la déformation.

## 3.4 Hypothèses simplificatrices

Plusieurs hypothèses seront successivement et/ou conjointement effectuées afin de simplifier l'équation (3.62), c'est à dire déterminer les termes prépondérants de l'expression (3.1).

### 3.4.1 Hypothèse des petites déformations

La toute première hypothèse réalisée est celle des petites déformations. Vu les hypothèses de notre étude, flexion de la poutre dans le plan  $(O, x, y)$ , la déformation au niveau de l'ELB-CA se limite au terme  $\varepsilon_{xx}$  (déformation d'un fil). L'hypothèse effectuée est donc la suivante :

$$\varepsilon_{xx} \ll 1 \quad (3.63)$$

Il est alors possible d'effectuer des développements limités, au premier ordre, des expressions de la variation d'abscisse curviligne  $ds$  (3.51) et de l'indice de réfraction  $n$  (3.61) :

$$ds \approx (1 + \beta_0\varepsilon_{xx})dx \quad (3.64)$$

$$n \approx n_0 - \frac{1}{2}n_0^3\beta_0[(1-\nu)p_{12} - \nu p_{11}]\varepsilon_{xx} = n_0 + n_\varepsilon \quad (3.65)$$

avec  $n_\varepsilon = -\frac{1}{2}n_0^3\beta_0[(1-\nu)p_{12} - \nu p_{11}]\varepsilon_{xx} = \kappa\varepsilon_{xx}$ ,  $\kappa$  étant une constante égale à  $-0.19$  (avec  $\beta_0 = 1$ ).

La mesure de l'ELB-CA sera alors approximée par

$$\begin{aligned} D_{opt}(t) &\approx \int_a^b (n_0 + \kappa\varepsilon_{xx})(1 + \beta_0\varepsilon_{xx}) dx \\ &\approx n_0 \int_a^b dx + \int_a^b (\beta_0 n_0 + \kappa)\varepsilon_{xx} dx + \beta_0 \kappa \int_a^b \varepsilon_{xx}^2 dx \end{aligned} \quad (3.66)$$

Avec l'hypothèse de petites déformations, les termes d'ordre supérieur en  $\varepsilon_{xx}^2$  peuvent être négligés. On obtient ainsi :

$$\Delta D_{opt}(t) \approx (\beta_0 n_0 + \kappa) \int_a^b \varepsilon_{xx} dx \quad (3.67)$$

### 3.4 Hypothèses simplificatrices

avec  $\Delta D_{opt}(t) = D_{opt}(t) - D_{opt}(0)$  et  $D_{opt}(0) = n_0 \int_a^b dx = n_0(b - a)$ .

La longueur physique que l'on souhaite mesurer, définie en (3.2), est égale à

$$D_{AB}(t) = \int_{s_a}^{s_b} ds = \int_a^b \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} dx \quad (3.68)$$

En faisant l'hypothèse de petites déformation, il vient

$$\Delta D_{AB}(t) \approx \int_a^b \epsilon_{xx} dx \quad (3.69)$$

avec  $\Delta D_{AB}(t) = D_{AB}(t) - D_{AB}(0)$  et  $D_{AB}(0) = \int_a^b dx = b - a$ .

Les expressions (3.67) et (3.69) permettent d'exprimer la variation de longueur optique  $\Delta D_{opt}(t)$  à partir de la variation de longueur physique  $\Delta D_{AB}(t)$  :

$$\boxed{\Delta D_{opt}(t) = (\beta_0 n_0 + \kappa) \Delta D_{AB}(t)} \quad (3.70)$$

*L'hypothèse des petites déformations sera appliquée dans la suite du manuscrit. Avec cette hypothèse, la variation de longueur optique  $\Delta D_{opt}(t)$  est égale à la variation de longueur physique  $\Delta D_{AB}(t)$  à une constante multiplicative près. Ainsi, dans la suite du manuscrit, nous nous intéresserons seulement au calcul de la longueur physique  $D_{AB}(t)$  et de sa variation  $\Delta D_{AB}(t)$ . Par ailleurs, le coefficient  $\beta_0$  sera pris égal à 1.*

La mesure obtenue à partir de l'ELB-CA est d'après (3.49) :

$$D_{AB}(t) = \int_a^b \sqrt{(1 + u')^2 + v'^2 + 2y \frac{u''v' - (1 + u')v''}{\sqrt{(1 + u')^2 + v'^2}} + y^2 \frac{[u''v' - (1 + u')v'']^2}{[(1 + u')^2 + v'^2]^2}} dx \quad (3.71)$$

Soit, pour de petites déformations,

$$\boxed{\Delta D_{AB}(t) = \int_a^b \left[ u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y \frac{u''v' - (1 + u')v''}{\sqrt{(1 + u')^2 + v'^2}} + \frac{y^2 [u''v' - (1 + u')v'']^2}{2 [(1 + u')^2 + v'^2]^2} \right] dx} \quad (3.72)$$

Les hypothèses qui vont suivre portent sur les équations du mouvement qui régissent le comportement de la poutre.

#### 3.4.2 Définition des différentes hypothèses sur les rotations des sections de la poutre

Dans ce paragraphe, nous allons définir la terminologie qui va être employée dans la suite du manuscrit. L'hypothèse de base sera celle des **petites déformations**. Ensuite, sous cette hypothèse des petites déformations, nous distinguerons trois cas :

- **Les petites rotations** : L'hypothèse de poutre est celle d'Euler-Bernoulli. Les rotations de la poutre ( $\theta = v'$ ) sont supposées infiniment petites, c'est à dire que la pente introduite par le déplacement transverse  $v$  de la poutre est faible et peut donc être négligée, ainsi que le déplacement axial  $u$ .

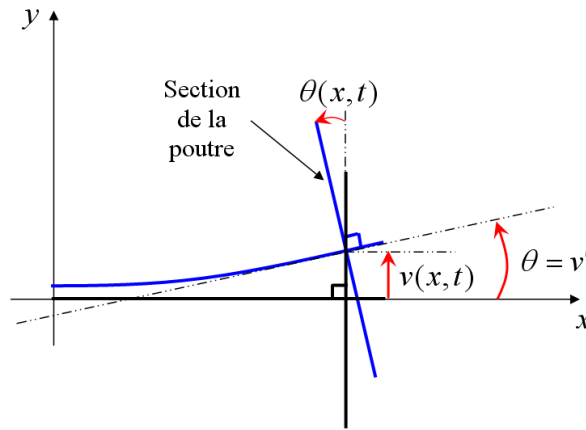


FIGURE 3.6: Rotation d'une section de la poutre sous l'hypothèse de petites rotations.

- **Les rotations modérées** : L'hypothèse de poutre est toujours celle d'Euler-Bernoulli. Les rotations sont plus importantes et le terme de pente  $v'$ , ainsi que le déplacement axial  $u$  et sa dérivée  $u'$ , ne peuvent plus être négligés. De ce fait, il va y avoir un couplage entre les déplacements axial et transverse de la poutre qui sera d'autant plus important que la flèche de la poutre sera élevée.

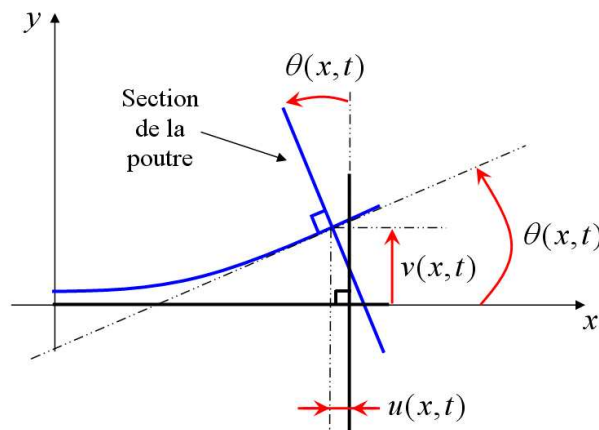


FIGURE 3.7: Rotation d'une section de la poutre sous l'hypothèse de rotations modérées.

- **Les grandes rotations** : L'hypothèse de poutre est celle de Timoshenko. La rotation des sections de la poutre est toujours importante (comme pour le cas précédent ou plus) et les sections ne restent pas orthogonales à l'axe neutre au cours de la déformation. Un angle supplémentaire  $\beta$  vient s'ajouter à celui de la section normale  $\theta$ .

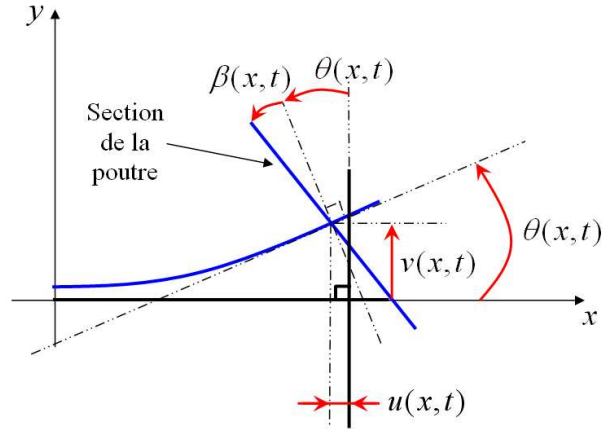


FIGURE 3.8: Rotation d'une section de la poutre sous l'hypothèse des grandes rotations.

Dans ce qui va suivre, nous nous intéresserons uniquement aux deux premiers cas, à savoir les petites rotations et les rotations modérées, et nous verrons en détails les simplifications que ces hypothèses permettent d'effectuer pour le calcul de la mesure d'un ELB-CA. Le dernier cas des grandes rotations n'a pas été traité au cours de la thèse.

#### 3.4.3 Hypothèse des rotations modérées : cas Général

Pour des niveaux de flèche de la poutre importants, l'équation différentielle régissant le comportement de la poutre en vibration de flexion n'est pas linéaire. En effet dans ce cas, les équations du mouvement de la poutre sont couplées et non-linéaires. Nous appellerons ce cas, **cas Général** ou **cas G**. Cette hypothèse étant plus générale, la mesure d'un ELB-CA sera déterminée à partir des déplacements axial et transverse de la poutre, issus de la résolution des équations d'équilibre «classiques» régissant la vibration des poutres en rotations modérés :

$$\begin{cases} \rho S \ddot{v} + EI v'''' - ES \left[ (u' + \frac{1}{2} v'^2) v'' + (u'' + v' v'') v' \right] &= F_v \\ \rho S \ddot{u} - ES (u'' + v' v'') &= F_u \end{cases} \quad (3.73)$$

La mise en place de ce système d'équations et l'étude des déplacements axial et transverse, resp.  $u$  et  $v$ , issus de la résolution de ce système seront détaillés dans le Chapitre 4.

Pour obtenir la mesure réalisée par un ELB-CA, les termes  $u'$ ,  $u''$ ,  $v'$  et  $v''$  seront déterminés à partir de ce système d'équations et réinjectés dans l'expression de la mesure du capteur.

Deux cas de mesure d'ELB-CA vont être étudiés.

##### 1. ELB-CA situé à une hauteur $y$ par rapport à l'axe neutre

La variation de la mesure physique d'un ELB-CA,  $\Delta D_{AB}(t)$ , est celle définie en (3.72) :

$$\Delta D_{AB}(t) = \int_a^b \left[ u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y \frac{u'' v' - (1 + u') v''}{\sqrt{(1 + u')^2 + v'^2}} + \frac{y^2 [u'' v' - (1 + u') v'']^2}{2 [(1 + u')^2 + v'^2]^2} \right] dx$$

##### 2. ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre ( $y = 0$ )

Le cas de l'axe neutre correspond au cas particulier de la poutre pour lequel la hauteur  $y$  est nulle. Alors, à partir de l'équation (3.72), la mesure  $\Delta D_{AB}(t)$  du capteur devient :

$$\Delta D_{AB}(t) = \int_a^b \left( u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} \right) dx \quad (3.74)$$

### 3.4.4 Hypothèse des petites rotations : cas Linéaire

Ce cas est celui que l'on retrouve classiquement dans tous les cours de mécanique vibratoire. Les équations du mouvement de la poutre en traction-compression et en flexion sont découplées et linéaires. Nous appellerons ce cas, **cas Linéaire** ou **cas L**.

Le système d'équations est alors :

$$\begin{cases} \rho S \ddot{v} + EI v'''' = F_v \\ \rho S \ddot{u} - ES u'' = F_u \end{cases} \quad (3.75)$$

L'étude présentée porte sur les vibrations de flexion de la poutre, c'est-à-dire sur l'équation linéaire :

$$\rho S \ddot{v} + EI v'''' = F_v \quad (3.76)$$

Notons par ailleurs que l'excitation est uniquement transverse ( $F_u = 0$ ) et que, par conséquent, le déplacement axial est nul. Dans l'expression de la mesure  $\Delta D_{AB}(t)$ , seuls les termes en  $v$  seront conservés.

Les deux mêmes cas de mesure d'ELB-CA que pour le cas G sont étudiés.

#### 1. ELB-CA situé à une hauteur $y$ par rapport à l'axe neutre

Si seuls les termes en  $v$  sont conservés dans l'expression (3.72), la mesure d'un ELB-CA devient

$$\Delta D_{AB}(t) = \frac{1}{2} \int_a^b \left( v'^2 - 2y \frac{v''}{\sqrt{1+v'^2}} + y^2 \frac{v''^2}{[1+v'^2]^2} \right) dx \quad (3.77)$$

#### 2. ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre ( $y = 0$ )

Pour la mesure d'un ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre, il vient :

$$\Delta D_{AB}(t) = \frac{1}{2} \int_a^b v'^2 dx \quad (3.78)$$

### 3.4.5 Décomposition de la mesure d'un ELB-CA

Comme nous l'avons remarqué pour la déformation en (3.50), la mesure d'un ELB-CA situé à une distance  $y$  de l'axe neutre peut s'exprimer en fonction de la mesure de l'ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre et d'un terme dépendant de  $y$  :

$$\Delta D_{AB}(t) = \Delta D_{AB}^{\text{axe}} + D_{AB}^y(t) \quad (3.79)$$

où

$$\begin{aligned} D_{AB}^y(t) &= \frac{1}{2} \int_a^b \left( 2y \frac{u''v' - (1+u')v''}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} + y^2 \frac{[u''v' - (1+u')v'']^2}{[(1+u')^2 + v'^2]^2} \right) dx && \text{pour le cas G.} \\ D_{AB}^y(t) &= -\frac{1}{2} \int_a^b \left( 2y \frac{v''}{\sqrt{1+v'^2}} - y^2 \frac{v''^2}{[1+v'^2]^2} \right) dx && \text{pour le cas L.} \end{aligned}$$

En appliquant la transformée de Fourier (opérateur linéaire) à (3.79), il vient :

$$TF(\Delta D_{AB})(\omega) = TF(\Delta D_{AB}^{\text{axe}})(\omega) + TF(D_{AB}^y)(\omega) \quad (3.80)$$

Par ailleurs, pour le module de la transformée de Fourier souvent représenté graphiquement, nous avons la relation suivante :

$$|TF(\Delta D_{AB})|^2 = |TF(\Delta D_{AB}^{\text{axe}})|^2 + |TF(D_{AB}^y)|^2 + 2Re \left( TF(\Delta D_{AB}^{\text{axe}}) \cdot \overline{TF(D_{AB}^y)} \right) \quad (3.81)$$

## 3.5 Lien avec l'état de l'art

### 3.5.1 Lien entre la mesure d'un ELB-CA et la courbure

Dans ce paragraphe, afin de se rattacher à l'état de l'art [15] où la mesure de l'ELB est généralement utilisée pour déterminer la courbure moyenne  $C_{\text{moy}}$ , on cherche à établir la relation entre la mesure obtenue par un ELB-CA (3.71) et la courbure de la poutre. On introduit la courbure  $C$  définie par  $C = \frac{1}{r} = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$  où  $r$  est le rayon de courbure et  $\alpha$  l'angle (défini à  $k\pi$  près) que fait l'axe  $Ox$  avec la tangente en  $M$ . Son expression est :

$$C(s) = \frac{\left\| \frac{d\vec{M}}{ds}(s) \wedge \frac{d^2\vec{M}}{ds^2}(s) \right\|}{\left\| \frac{d\vec{M}}{ds}(s) \right\|^3} \quad (3.82)$$

soit

$$C(x) = \frac{\left\| \vec{t} \wedge \left( \frac{d\vec{t}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \right) \right\|}{\left\| \vec{t} \right\|^3} \quad (3.83)$$

La courbure est déterminée à partir du vecteur tangent à l'axe neutre de la poutre  $\vec{t}$ . Rappelons son expression en fonction des déplacements axial et transverse pour notre cas (poutre droite d'Euler-Bernoulli) :

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \begin{bmatrix} 1 + u' \\ v' \\ 0 \end{bmatrix}$$

La courbure  $C$  est alors définie par :

$$C = \frac{1}{r} = \frac{\left| \begin{vmatrix} 1 + u' & u'' \\ v' & v'' \end{vmatrix} \right|}{[(1 + u')^2 + v'^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.84)$$

soit

$$C = \frac{[v''(1 + u') - u''v']}{[(1 + u')^2 + v'^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.85)$$

L'expression de la mesure réalisée par un ELB-CA, que nous avons déterminée précédemment en (3.71), peut être remaniée afin de faire apparaître la courbure  $C$  définie en (3.85) :

$$\begin{aligned}
 D_{AB}(t) &= \int_a^b \sqrt{(1+u')^2 + v'^2 + 2y \frac{u''v' - (1+u')v''}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} + y^2 \frac{[u''v' - (1+u')v'']^2}{[(1+u')^2 + v'^2]^2}} dx \\
 &= \int_a^b \sqrt{[(1+u')^2 + v'^2] \left[ 1 + 2y \frac{v'u'' - (1+u')v''}{[(1+u')^2 + v'^2]^{\frac{3}{2}}} + y^2 \frac{[v'u'' - (1+u')v'']^2}{[(1+u')^2 + v'^2]^3} \right]} dx \\
 &= \int_a^b \sqrt{[(1+u')^2 + v'^2] [1 - 2yC + y^2C^2]} dx \\
 &= \int_a^b |1 - yC| \sqrt{(1+u')^2 + v'^2} dx
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

En faisant l'hypothèse de petites déformations, il vient  $yC \ll 1$  soit  $1 - yC > 0$  et pour l'axe neutre, d'après (3.38)  $(2u' + u'^2 + v'^2) \ll 1$ . Après développement limité, l'expression précédente devient :

$$\Delta D_{AB}(t) \approx \int_a^b \left( u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} \right) dx - y \int_a^b C \left( 1 + u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} \right) dx \tag{3.87}$$

On reconnaît alors la déformation de l'axe neutre  $\varepsilon_{axe} = \varepsilon_{xx}^M = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2}$  définie en (3.38). Finalement, la mesure d'un ELB-CA situé à une distance  $y$  de l'axe neutre peut s'exprimer en fonction de la courbure  $C$  par :

$$\begin{aligned}
 \Delta D_{AB}(t) &= \Delta D_{AB}^{axe}(t) - y \int_a^b C dx - y \int_a^b C \cdot \varepsilon_{axe} dx \\
 &= \Delta D_{AB}^{axe}(t) + D_{AB}^y(t)
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

où  $D_{AB}^y(t) = -y \int_a^b C dx - y \int_a^b C \cdot \varepsilon_{axe} dx$

La mesure réalisée par un ELB-CA comprend donc trois termes :

- un terme dépendant de la déformation de l'axe neutre :  $\Delta D_{AB}^{axe}(t)$
- un terme dépendant de la courbure et de la distance à l'axe neutre :  $y \int_a^b C dx$
- un terme dépendant de la distance à l'axe neutre et couplant la déformation de l'axe neutre et la courbure :  $y \int_a^b C \cdot \varepsilon_{axe} dx$

### 3.5.2 Combinaisons des mesures de deux ELB-CA

D'après l'expression (3.88), l'association judicieuse de deux ELB-CA peut permettre d'obtenir indépendamment les contributions de la déformation de l'axe neutre et de la courbure. Ainsi, en plaçant deux ELB-CA aux mêmes abscisses de la poutre, de part et d'autre de l'axe neutre (en  $-y$  et en  $+y$ ), on obtiendra la contribution de la courbure en soustrayant les mesures des deux ELB-CA et celle de l'axe neutre en les ajoutant :

$$\begin{aligned}
 \Delta D_{AB}(+y) - \Delta D_{AB}(-y) &= 2D_{AB}^y \\
 \Delta D_{AB}(+y) + \Delta D_{AB}(-y) &= 2\Delta D_{AB}^{axe}
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

Nous vérifierons plus tard, au Chapitre 8, que la déformation de l'axe neutre  $\varepsilon_{axe}$  est très faible devant l'unité et que le terme  $D_{AB}^y$  peut alors s'écrire :

$$D_{AB}^y(t) \approx -y \int_a^b C dx \tag{3.90}$$



### 3.5.3 Mesure d'un ELB-CA dans l'état de l'art

Habituellement dans la littérature [15][16], la mesure de l'ELB est utilisée pour déterminer la courbure moyenne  $C_{\text{moy}}$ , qui est exprimée dans [15], pour le cas de la flexion simple d'une poutre d'Euler-Bernoulli, par :

$$C_{\text{moy}} = \frac{1}{L_{ELB}} \int_0^{L_{ELB}} C(x) dx = \frac{1}{y \cdot L_{ELB}} \int_0^{L_{ELB}} \varepsilon_{xx}(x) dx = -\frac{\Delta L_{ELB}}{y \cdot L_{ELB}} \quad (3.91)$$

avec

$$\Delta L_{ELB}(t) = \int_0^{L_{ELB}} \varepsilon_{xx} dx = -y \int_0^{L_{ELB}} v'' dx \quad \text{et} \quad C = v'' \quad (3.92)$$

où  $\varepsilon_{xx}$  est la déformation de la poutre,  $\Delta L_{ELB} (= L_{ELB}(t) - L_{ELB})$  la variation de longueur de l'ELB et  $L_{ELB}$  la longueur de l'ELB à l'origine.

Nous allons montrer, à partir des résultats obtenus précédemment en 3.4, que cette formule n'est valable que sous certaines hypothèses.

Pour retrouver les expressions de la déformation et de la courbure définies en (3.92) à partir de celles définies en (3.49) et (3.85), il faut dans un premier temps se placer dans le cas L (équations découplées) :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{v'^2}{2} - y \frac{v''}{\sqrt{1+v'^2}} + \frac{d^2}{2} \frac{v''^2}{[1+v'^2]^2} \quad \text{et} \quad C = \frac{v''}{[1+v'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

et ensuite faire les hypothèses suivantes :  $v'' \ll 1$ ,  $v' \ll 1$  et  $\frac{v'^2}{2} \ll yv''$ . Il vient alors

$$\varepsilon_{xx} \approx -yv'' \quad \text{et} \quad C \approx v'' \quad (3.93)$$

La mesure obtenue à partir du capteur, définie en (3.69), s'écrit alors :

$$\Delta D_{AB}(t) = -y \int_a^b C(x) dx \quad (3.94)$$

L'expression (3.94) peut donc s'exprimer en fonction de la courbure moyenne :

$$\Delta D_{AB}(t) = -y(b-a)C_{\text{moy}} \quad (3.95)$$

ce qui nous permet de faire l'analogie avec l'expression de la courbure moyenne (3.91) issue de la littérature :

$$C_{\text{moy}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b C(x) dx = -\frac{\Delta D_{AB}}{y \cdot D_{AB}} \quad (3.96)$$

*Ainsi, les calculs généralement effectués par les utilisateurs des ELB sont valides pour les équations «découplées», avec de «faibles» amplitudes de déformation. La mesure obtenue par un ELB-CA vaut alors*

$$\Delta D_{AB}(t) = -y \int_a^b v'' dx \quad (3.97)$$

Par ailleurs, on remarque qu'à partir des hypothèses de la littérature (3.93), pour le cas d'un ELB situé au niveau de l'axe neutre ( $y = 0$ ), la déformation est nulle ( $\varepsilon_{axe} = 0$ ) et donc la mesure de l'ELB

au niveau de l'axe neutre l'est également ( $\Delta D_{AB}^{\text{axe}}(t) = 0$ ). Considérant cela, l'expression déterminée en (3.88) devient :

$$\Delta D_{AB}(t) = -y \int_a^b C dx \quad (3.98)$$

On retrouve bien l'expression définie en (3.94) à partir de l'expression plus générale déterminée en (3.88).

### 3.6 Autre calcul de la mesure d'un ELB-CA : déformation d'une ligne

Les calculs que nous avons développés jusqu'à présent pour la déformation subie par un ELB-CA ont été exprimés à partir des déplacements axial et transverse de l'axe neutre de la poutre. Pour le cas G, la mesure théorique d'un ELB-CA ne peut être déterminée analytiquement. Les expressions développées seront donc particulièrement utiles pour déterminer la mesure d'un ELB-CA pour un modèle EF 1D avec des éléments de poutre. Pour des modèles EF 2D ou 3D de poutre, les mêmes expressions que précédemment peuvent être utilisées à partir des déplacements axial et transverse de l'axe neutre. Nous nommerons les termes de la mesure d'un ELB-CA issus des déplacements axial et transverse de l'axe neutre  $u' = u'_{axe}$ ,  $v' = v'_{axe}$ ,  $u'' = u''_{axe}$  et  $v'' = v''_{axe}$ .

Pour des modèles EF 2D ou 3D, qui ne sont pas nécessairement des poutres et qui peuvent être des structures plus complexes, il existe une autre façon de déterminer la mesure d'un ELB-CA. Elle peut être calculée à partir de la déformation subie par un ELB-CA déterminée cette fois-ci à l'aide du champ de déplacement subi au niveau du capteur,  $u_{elb}$  et  $v_{elb}$ , et non au niveau de l'axe neutre de la poutre [17].

Considérons un ELB-CA schématisé par une variété  $\Gamma$  de dimension 1 et paramétré par son abscisse curviligne  $s$ . L'ELB-CA va subir une transformation caractérisée par un champ de déplacement  $\vec{U}(s)$ , où  $\vec{U}$  est un champ de vecteur de  $R^3$  défini sur  $\Gamma$ . Pour la transformation, un point  $P$  de l'ELB-CA se déplacera en  $P'$  :

$$\vec{P}(s) \rightarrow \vec{P}'(s) = \vec{P}(s) + \vec{U}(s) \quad (3.99)$$

Pour le calcul de la déformation subie par l'ELB-CA, nous avons les relations suivantes

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dP} &= \frac{d\vec{P}}{ds} ds = \vec{t} ds \\ \overrightarrow{dP'} &= \vec{t} ds + \frac{d\vec{U}}{ds} ds \end{aligned} \quad (3.100)$$

où  $\vec{t}$  est le vecteur tangent unitaire, par définition, de l'abscisse curviligne.

Il vient alors

$$\begin{aligned} dP^2 &= ds^2 \\ dP'^2 &= \left[ 1 + 2\vec{t} \cdot \frac{d\vec{U}}{ds} + \left( \frac{d\vec{U}}{ds} \right)^2 \right] ds^2 \end{aligned} \quad (3.101)$$

### 3.6 Autre calcul de la mesure d'un ELB-CA : déformation d'une ligne

d'où l'unique composante du tenseur de déformation (on parle de déformation d'un fil) :

$$\varepsilon_{ss}(s) = \vec{t} \cdot \frac{d\vec{U}}{ds} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\vec{U}}{ds} \right)^2 \quad (3.102)$$

Pour l'hypothèse des petites déformations (cf 3.4.1), la mesure obtenue à partir de l'ELB-CA est alors :

$$\Delta D_{AB}(t) = \int_{s_a}^{s_b} \varepsilon_{ss}(s) ds \quad (3.103)$$

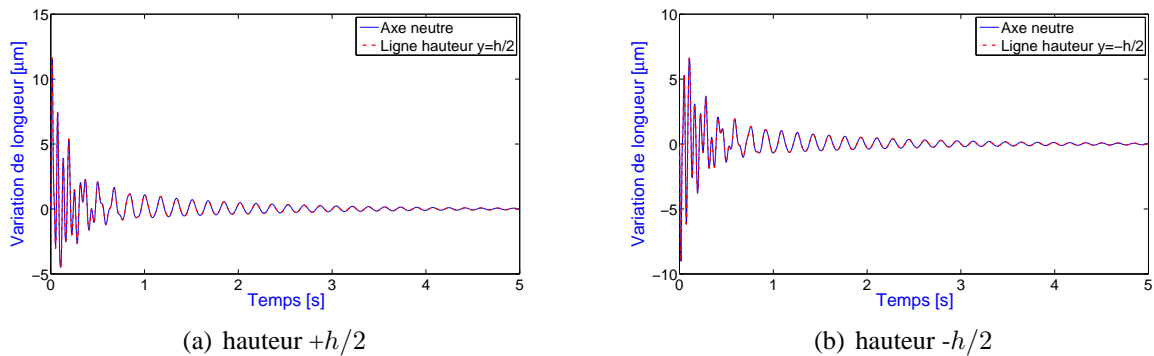
Appliquons l'expression (3.102) au cas de notre étude. Le calcul de la déformation pour une poutre en flexion dans le plan  $(O, x, y)$  est détaillé en annexe B. Il donne

$$\varepsilon_{xx}^P(x) = u'_{elb} + \frac{u_{elb}^2}{2} + \frac{v_{elb}^2}{2} \quad (3.104)$$

Pour la mesure réalisée par l'ELB-CA situé entre les abscisses  $x = a$  et  $x = b$ , nous aurons donc

$$\Delta D_{AB}(t) = \int_a^b \left( u'_{elb} + \frac{u_{elb}^2}{2} + \frac{v_{elb}^2}{2} \right) dx \quad (3.105)$$

A partir du logiciel COMSOL, nous avons réalisé une simulation numérique en dynamique d'une poutre en flexion modélisée par des EF 2D et excitée par un choc. Les déplacements axial et transverse des points de discrétisation de l'axe neutre et de chacune des surfaces de la poutre (situés en  $\pm h/2$ ,  $h$  étant l'épaisseur de la poutre) ont été obtenus. La figure 3.9 présente les mesures numériques d'ELB-CA, placés aux mêmes abscisses sur chacune des surfaces de la poutre, obtenues à partir de l'expression générale (3.72), qui utilise les déplacements axial et transverse des points de l'axe neutre ( $u_{axe}$  et  $v_{axe}$ ), et de l'expression (3.105), qui utilise les déplacements axial et transverse des points des lignes représentant les surfaces de la poutre ( $u_{elb}$  et  $v_{elb}$  en  $\pm h/2$ ).



**FIGURE 3.9: Mesures de l'ELB-CA à la surface de la poutre (hauteur  $\pm y$ ) obtenues à partir des expressions (3.72) et (3.105).**

La figure 3.9 montre que les mesures des ELB-CA obtenues à partir des deux expressions coïncident parfaitement, donc qu'elles sont bien équivalentes.

*L'expression (3.103) sera donc plus pratique d'utilisation lorsque l'on souhaitera déterminer la mesure réalisée par un ELB-CA à partir d'un modèle EF d'une structure plus complexe. Pour cela, il suffit de récupérer le champ de déplacement de  $R^3$  subi par les points de discrétisation de la ligne représentant le capteur et d'appliquer la formule (3.103).*

### 3.7 Conclusion

Dans ce Chapitre, nous avons déterminé le calcul analytique complet de la mesure réalisée par un ELB-CA. La formule déterminée est générale et peut être utilisée pour tout type d'application. Nous avons appliqué cette expression au cas de la flexion dans un plan d'une poutre droite de type Euler-Bernoulli. A partir du modèle complet de la mesure déterminé pour ce cas, nous avons effectué plusieurs hypothèses suivant le niveau de flèche de la poutre afin de simplifier l'expression : l'hypothèse des petites déformations et des petites rotations (équations du mouvement de la poutre découplées et linéaires, cas L) et l'hypothèse des petites déformations et des rotations modérées (équations du mouvement de la poutre couplées et non linéaires, cas G).

Le lien entre ces modèles et la formule traditionnellement utilisée dans l'état de l'art a permis de montrer que les calculs généralement effectués par les utilisateurs des ELB sont valides pour les équations «découplées», avec de «faibles» amplitudes de déformation.

Dans la seconde partie du manuscrit, nous allons étudier quelques applications de la mesure d'un ELB-CA en dynamique linéaire (analyse modale et détection d'endommagements) et dans la troisième et dernière partie, nous étudierons les caractéristiques de la mesure réalisée par un ELB-CA en statique et dynamique non-linéaire. L'exemple d'application pour toutes ces études sera également une poutre droite d'Euler-Bernoulli.

### 3.8 Bibliographie

- [1] Perez J.P., *Optique : fondements et applications avec 250 exercices et problèmes résolus*, Dunod, Paris, 2004.
- [2] Géradin M., Rixen D., *Théorie des vibrations : Application à la dynamique des structures*, Masson, 1996.
- [3] Yariv A., Yeh P., *Optical Waves in Crystals Propagation and Control of Laser Radiation*, Wiley & Sons, 2003.
- [4] Chen Z., Li Q., Ansari F., *Serial Multiplexing of Optical Fibers for Sensing of Structural Strains*, Journal of Structural Control, 7(1)(2000) 103-117.
- [5] Sirkis J.S., Haslach H.W., *Interferometric Strain Measurement by Arbitrarily Configured, Surface-Mounted, Optical Fibers*, Journal of Lightwave Technology, 10(8)(1990) 1497-1503.
- [6] Giallorenzi T.G., Bucaro J.A., Dandridge A., Sigel G.H., Cole J.H., Rashleigh S.C, Priest R.G., *Optical Fiber Sensor Technology*, Journal of Quantum Electronics, 4(18)(1982) 626-665.
- [7] Wan K.T., Leung C.K.I., *Fiber optic sensor for the monitoring of mixed cracks in structures*, Sensors and Actuators A, 135(2007) 370-380.

- [8] Caussignac J.M., Dupont J., Chau B., *Design of optical fibre sensors for smart concrete structures*, Proceedings of the First European Workshop of Structural Health Monitoring (SHM2002), ENS Cachan, 2002, pp 585-591.
- [9] Ansari F., Libo Y., *Mechanics of Bond and Interface Shear Transfer in Optical Fiber Sensors*, Journal of Engineering Mechanics, 124(4)(1998) 385-394.
- [10] Delepine-Lesoille S., Merliot E., Boulay C., Quétel L., Delaveau M., Courteville A., *Quasi-distributed optical fibre extensometers for continuous embedding into concrete : design and realization*, Smart Materials and Structures, 15(2006) 931-938.
- [11] Williams D., Carr J., Saikkonen S., *Single-mode optical fiber index of refraction dependence on product parameters, tensile stress and temperature*, Proceedings of the International Wire & Cable Symposium, 1990, p. 726-729.
- [12] LeBlanc M.J., *Study of interfacial interaction of an optical fibre embedded in a host material by in situ measurement of fibre end displacement - Part 1. Theory*, Smart Mater. Struct, 14(2005) 637-646.
- [13] LeBlanc M.J., *Study of interfacial interaction of an optical fibre embedded in a host material by in situ measurement of fibre end displacement - Part 2. Experiments*, Smart Mater. Struct, 14(2005) 647-657.
- [14] Dupont J., *Comportements de capteurs à fibres optiques, noyés ou fixés en surface d'ouvrages en béton*, ENPC, Paris/Marne la Vallée, 2002.
- [15] Inaudi D., Vurpillot S., *Monitoring of Concrete Bridges with Long-Gage Fiber Optic Sensors*, Journal of Intelligent Materials Systems & Structures, 10(1999) 280-292.
- [16] Park H., Jung H.S., Kwon Y.H., Seo J.H., *Mathematical models for assessment of the safety of steel beams based on average strains from long gage optic sensors*, Sensors and Actuators A : Physical, 125(2)(2006) 109-113.
- [17] Ziaoui A., Pineau A., *Comportement mécanique des matériaux*, Hermès, 1995.



## **Deuxième partie**

### **Mesure de l'ELB-CA en linéaire**





## Chapitre 4

# Les ELB-CA : outils pour l'analyse modale expérimentale

---

**C**E CHAPITRE présente l'étude des caractéristiques de la mesure des ELB-CA pour l'analyse modale. Pour une poutre, les résultats obtenus par analyse modale à partir des signaux numériques d'ELB-CA permettent de montrer que les vecteurs propres obtenus ne sont pas les mêmes que pour des capteurs ponctuels classiques (par exemple des accéléromètres). En effet, les ELB-CA permettent d'obtenir l'intégrale de la courbure modale entre les bornes du capteur,  $\int_a^b \phi_k''(x)dx$ .

Des expériences réalisées avec les deux systèmes de mesure optique présentés au Chapitre 2 (l'appareil SMARTEC sur une poutre E-E et l'appareil FOGALE sur une poutre E-L) valident ce résultat.

Les notions de noeuds et de ventres des modes observés par les ELB-CA sont ensuite dégagées. Elles sont différentes de ce que l'on obtient classiquement pour des capteurs ponctuels et permettent d'envisager des perspectives intéressantes quant au placement optimal des ELB-CA et au filtrage de modes. Pour le filtrage, les ELB-CA peuvent également servir de capteurs modaux si leur forme est proportionnelle à la courbure modale du mode que l'on souhaite observer.

Enfin, nous montrons que la notion de FRF est applicable aux ELB-CA. Cependant, les vecteurs propres observés au niveau des capteurs, dépendant de la base de mesure, entraînent la perte de plusieurs propriétés inhérentes aux FRF définies habituellement pour des capteurs ponctuels : la réciprocité, la co-localisation et la normalisation par rapport à la masse.

---

## Plan du Chapitre 4

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>99</b>
<b>4.2</b>	<b>Réponse impulsionnelle d'une poutre instrumentée par différents types de capteurs . . . . .</b>	<b>99</b>
4.2.1	Capteurs ponctuels : déplacement, vitesse, accélération . . . . .	100
4.2.2	Capteur longue base : ELB-CA . . . . .	102
<b>4.3</b>	<b>Notions de noeuds et de ventres des modes pour les ELB-CA . . . . .</b>	<b>105</b>
4.3.1	Noeuds d'un mode . . . . .	106
4.3.2	Ventre d'un mode . . . . .	108
<b>4.4</b>	<b>Filtrage de plusieurs modes . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>4.5</b>	<b>Influence du placement des ELB-CA . . . . .</b>	<b>112</b>
<b>4.6</b>	<b>Analyse modale de signaux numériques . . . . .</b>	<b>114</b>
4.6.1	ELB-CA « longue base » . . . . .	114
4.6.2	ELB-CA « ponctuels » . . . . .	117
<b>4.7</b>	<b>Obtention des déformées modales à partir des ELB-CA . . . . .</b>	<b>120</b>
<b>4.8</b>	<b>Confrontation théorie-expérience : analyse modale expérimentale d'une poutre</b>	<b>124</b>
4.8.1	Poutre E-E . . . . .	124
4.8.2	Poutre E-L . . . . .	129
<b>4.9</b>	<b>Notion de FRF pour les ELB-CA . . . . .</b>	<b>134</b>
<b>4.10</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>141</b>
<b>4.11</b>	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>142</b>

---

## 4.1 Introduction

Après la mise en place de l'instrumentation de mesure et l'estimation non-paramétrique, la construction d'une représentation paramétrique de faible dimension est la troisième étape importante d'une analyse modale expérimentale. Cette étape a pour objet d'estimer les propriétés dynamiques de la structure étudiée à partir des réponses vibratoires. Ces quantités sont alors exploitées soit directement pour de nouvelles prédictions soit indirectement pour la validation de modèles EF ou la création de modèles hybrides (modèles analytiques et amortissements expérimentaux...).

Il existe un grand nombre de méthodes directes ou indirectes permettant de remonter aux caractéristiques modales (fréquences propres, amortissement modaux, déformées modales). Ces méthodes sont classées suivant le domaine dans lequel les données sont traitées (temporelles, fréquentielles, temps-fréquences). Elles peuvent traiter une ou plusieurs entrées et une ou plusieurs sorties à la fois (SISO, SIMO, MIMO) et analyser un ou plusieurs modes en même temps (méthodes locale (1 DDL) et globale (M DDL)). Pour une classification plus détaillée des différentes méthodes, on se référera à [1].

Dans ce Chapitre, nous allons nous intéresser aux particularités de la mesure des ELB-CA pour l'analyse modale expérimentale plutôt qu'aux différentes méthodes. Dans un premier temps, nous allons déterminer les paramètres modaux obtenus à partir de la mesure des ELB-CA pour une poutre soumise à un impact, qui vont permettre de redéfinir les notions de noeuds et de ventres de vibration pour ce type de capteur.

Ensuite, nous étudierons l'influence de la configuration de l'ELB-CA, c'est-à-dire de sa longueur et de son placement, sur la TF de la mesure. Puis, les résultats obtenus à l'aide d'une méthode d'analyse modale, la Transformée en Ondelettes Continues (TOC), à partir de mesures numériques d'ELB-CA sont comparés avec ceux que l'on obtiendrait plus classiquement avec des capteurs ponctuels : accéléromètres, capteurs de vitesse ou de déplacement.

Des confrontations théorie-expérience sont ensuite réalisées avec les deux systèmes de mesure optique présentés au Chapitre 2 sur deux cas de poutre (E-E et E-L).

Enfin, nous avons cherché à savoir si les notions de FRF définies classiquement pour les capteurs ponctuels pouvaient également être appliquées aux ELB-CA.

## 4.2 Réponse impulsionnelle d'une poutre instrumentée par différents types de capteurs

Les calculs menés portent sur l'étude linéaire des vibrations de flexion transverse d'une poutre dans le plan  $(O, x, y)$  avec les hypothèses cinématiques d'Euler-Bernoulli. La poutre est supposée homogène de section constante rectangle  $S = h \cdot e$ , de longueur  $L$  et excitée par une force  $g(x, t)$  appliquée à l'abscisse  $x_0$  et à l'instant  $t_0$ . Les caractéristiques de la poutre choisies pour l'étude numérique sont répertoriées dans le tableau 4.1.

Longueur	Epaisseur	Hauteur	Module d'Young	Densité	Inertie
$L(m)$	$e(m)$	$h(m)$	$E(GPa)$	$\rho(kg \cdot m^{-3})$	$I(m^4)$
1.7	0.04	0.003	210	7800	$9 \cdot 10^{-11}$

TABLEAU 4.1: Paramètres de la poutre.

### 4.2.1 Capteurs ponctuels : déplacement, vitesse, accélération

La réponse à un choc suivant la direction  $\vec{j}$  pour le déplacement transverse de la poutre, lorsque seuls les  $N$  premiers modes sont pris en compte, est donnée classiquement par superposition modale (cas linéaire) [15] :

$$v(x, t) \approx \sum_{k=1}^N b_k(t) \phi_k(x) \quad (4.1)$$

où  $b_k(t)$  et  $\phi_k(x)$  sont respectivement la réponse à la force  $g(x, t)$  et les déformées modales de la poutre. La force appliquée à la poutre est définie par :  $g(x, t) = F \cdot \delta_t^{t_0} \cdot \delta_x^{x_0}$ , où  $\delta$  représente le symbole de Kronecker égal à 1 pour  $x = x_0$ ,  $t = t_0$  et 0 sinon.

L'expression de la réponse  $b_k(t)$  à la force  $g(x, t)$  est l'intégrale de Duhamel :

$$b_k(t) = \frac{1}{\rho S \tilde{\omega}_k} \int_0^t F_k(\tau) e^{-\xi_k \omega_k (t-\tau)} \cdot \sin(\tilde{\omega}_k (t-\tau)) d\tau \quad (4.2)$$

où  $F_k(t) = \int_0^L g(x, t) \phi_k(x) dx$ ,  $\tilde{\omega}_k = \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}$  et  $\omega_k = \frac{(\beta_k L)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$ .

$\beta_k L$  est une solution de l'équation transcendante aux valeurs propres correspondant aux CL étudiées :

- $\cos(\beta_k L) \cdot \cosh(\beta_k L) = 1$  (poutre L-L et E-E).
- $\cos(\beta_k L) \cdot \cosh(\beta_k L) = -1$  (poutre E-L).
- $\sin(\beta_k L) = 0$  soit  $\beta_k L = k\pi$  (poutre A-A).

Il vient alors

$$b_k(t) = \frac{F \phi_k(x_0)}{\rho S \tilde{\omega}_k} \sin(\tilde{\omega}_k (t - t_0)) \cdot e^{-\xi_k \omega_k (t - t_0)} \quad (4.3)$$

Les expressions des déformées modales pour les différentes CL sont [2] :

- L-L :

$$\phi_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{\rho S L}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) - \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) - \sin(\beta_k L)} (\sinh(\beta_k x) + \sin(\beta_k x)) + \cosh(\beta_k x) + \cos(\beta_k x) \right] \quad (4.4)$$

- E-E :

$$\phi_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{\rho S L}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) - \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) - \sin(\beta_k L)} (\sinh(\beta_k x) - \sin(\beta_k x)) + \cosh(\beta_k x) - \cos(\beta_k x) \right] \quad (4.5)$$

- A-A :

$$\phi_k = \sqrt{\frac{2}{\rho S L}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (4.6)$$

- E-L :

$$\phi_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{\rho S L}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) + \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) + \sin(\beta_k L)} (\sin(\beta_k x) - \sinh(\beta_k x)) + \cosh(\beta_k x) - \cos(\beta_k x) \right] \quad (4.7)$$

## 4.2 Réponse impulsionnelle d'une poutre instrumentée par différents types de capteurs

où  $\alpha_k$  est introduit pour normaliser les déformées modales par rapport à la masse :

$$\int_0^L \rho S \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_i^j \quad (4.8)$$

avec  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker :  $\delta_i^j = 1$  si  $i = j$  et 0 sinon.

Sur la figure 4.1, les trois premières déformées modales de la poutre ont été tracées pour les quatre CL.

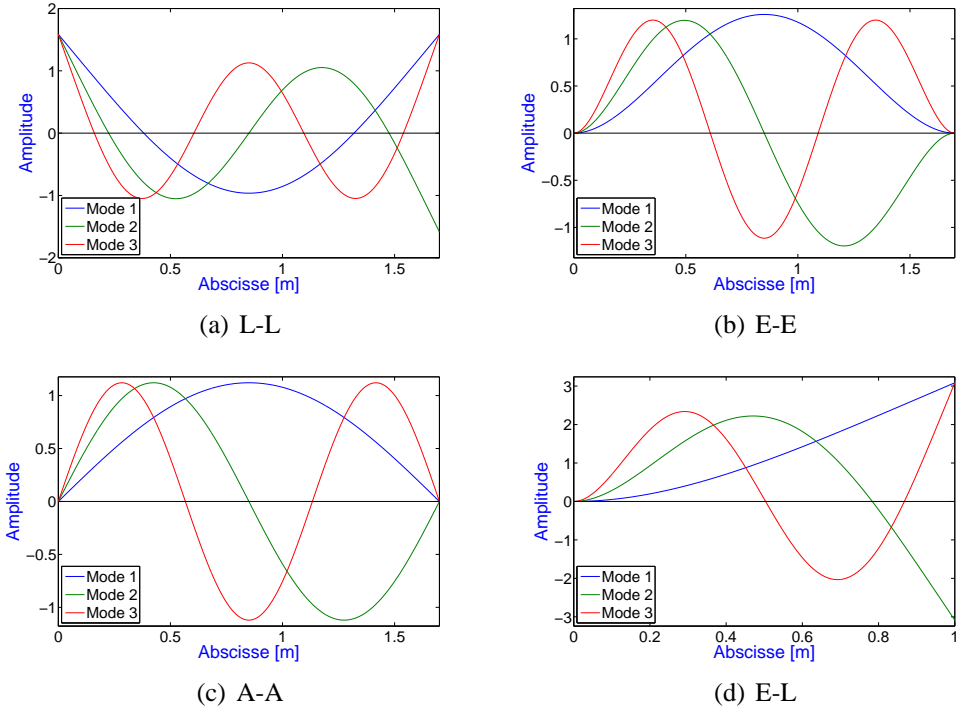


FIGURE 4.1: Graphes des trois premières déformées modales de la poutre ( $\phi_k$ ) pour les différents CL.

A partir de (4.1), on peut définir les réponses en vitesse,  $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \dot{v}(x,t)$ , et en accélération,  $\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \ddot{v}(x,t)$ , pour la poutre :

$$\dot{v}(x,t) \approx \sum_{k=1}^N \dot{b}_k(t) \phi_k(x) \quad (4.9)$$

$$\ddot{v}(x,t) \approx \sum_{k=1}^N \ddot{b}_k(t) \phi_k(x) \quad (4.10)$$

avec

$$\dot{b}_k(t) = \frac{F \phi_k(x_0)}{\rho S \tilde{\omega}_k} [\tilde{\omega}_k \cos(\tilde{\omega}_k(t - t_0)) - \xi_k \omega_k \sin(\tilde{\omega}_k(t - t_0))] e^{-\xi_k \omega_k(t - t_0)} \quad (4.11)$$

$$\ddot{b}_k(t) = \frac{F \phi_k(x_0)}{\rho S \tilde{\omega}_k} [\xi_k^2 \omega_k^2 \sin(\tilde{\omega}_k(t - t_0)) - 2\tilde{\omega}_k \xi_k \omega_k \cos(\tilde{\omega}_k(t - t_0)) - \tilde{\omega}_k^2 \sin(\tilde{\omega}_k(t - t_0))] e^{-\xi_k \omega_k(t - t_0)} \quad (4.12)$$

### 4.2.2 Capteur longue base : ELB-CA

L'analyse modale est une théorie basée sur la linéarité des systèmes. Pour la poutre, le domaine linéaire est celui des petites déformations et des petites rotations. Dans ce cas, la mesure obtenue par l'ELB-CA est celle définie en (3.97), soit :

$$\Delta D_{AB}(t) = -y \int_a^b v''(x, t) dx$$

D'après (4.1), il vient

$$\Delta D_{AB}(t) \approx -y \sum_{k=1}^N b_k(t) \left( \int_a^b \frac{\partial^2 \phi_k(x)}{\partial x^2} dx \right) \quad (4.13)$$

d'où

$$\Delta D_{AB}(t) \approx -y \sum_{k=1}^N b_k(t) \Phi_k \quad (4.14)$$

avec  $\Phi_k = \int_a^b \phi_k''(x) dx = \phi_k'(b) - \phi_k'(a)$  et  $b_k(t)$ , définie en (4.3), la réponse temporelle du  $k^{\text{ème}}$  mode de la poutre à l'excitation.

On introduit souvent la courbure moyenne en statique [2][3]. Pour la dynamique, nous obtenons une courbure moyenne modale  $\Gamma_{\text{moy}}^k$  définie par :

$$\Gamma_{\text{moy}}^k = \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi_k''(x) dx \quad (4.15)$$

Alors la mesure de l'ELB-CA devient :

$$\Delta D_{AB}(t) \approx -y(b-a) \sum_{k=1}^N b_k(t) \Gamma_{\text{moy}_k} \quad (4.16)$$

Cette formule liant la mesure de l'ELB-CA à la courbure modale a motivé plusieurs équipes à travailler sur les méthodes de détection d'endommagments et notamment celle basée sur la courbure modale [4][5]. Elle sera présentée en détails au Chapitre 5.

Les expressions des dérivées première et seconde des déformées modales de la poutre pour les différentes CL sont :

- L-L :

$$\phi_k' = \frac{\alpha_k \beta_k}{\sqrt{\rho S L}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) - \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) - \sin(\beta_k L)} (\cosh(\beta_k x) + \cos(\beta_k x)) + \sinh(\beta_k x) - \sin(\beta_k x) \right] \quad (4.17)$$

$$\phi_k'' = \frac{\alpha_k \beta_k^2}{\sqrt{\rho S L}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) - \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) - \sin(\beta_k L)} (\sinh(\beta_k x) - \sin(\beta_k x)) + \cosh(\beta_k x) - \cos(\beta_k x) \right] \quad (4.18)$$

- E-E :

$$\phi'_k = \frac{\alpha_k \beta_k}{\sqrt{\rho S L}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) - \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) - \sin(\beta_k L)} (\cosh(\beta_k x) - \cos(\beta_k x)) + \sinh(\beta_k x) + \sin(\beta_k x) \right] \quad (4.19)$$

$$\phi''_k = \frac{\alpha_k \beta_k^2}{\sqrt{\rho S L}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) - \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) - \sin(\beta_k L)} (\sinh(\beta_k x) + \sin(\beta_k x)) + \cosh(\beta_k x) + \cos(\beta_k x) \right] \quad (4.20)$$

- A-A :

$$\phi'_k = \sqrt{\frac{2}{\rho S L}} \left( \frac{k\pi}{L} \right) \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \quad (4.21)$$

$$\phi''_k = -\sqrt{\frac{2}{\rho S L}} \left( \frac{k\pi}{L} \right)^2 \sin \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \quad (4.22)$$

- E-L :

$$\phi'_k = \frac{\alpha_k \beta_k}{\sqrt{\rho S L}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) + \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) + \sin(\beta_k L)} (\cos(\beta_k x) - \cosh(\beta_k x)) + \sinh(\beta_k x) + \sin(\beta_k x) \right] \quad (4.23)$$

$$\phi''_k = \frac{\alpha_k \beta_k^2}{\sqrt{\rho S L}} \left[ -\frac{\cos(\beta_k L) + \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) + \sin(\beta_k L)} (\sin(\beta_k x) + \sinh(\beta_k x)) + \cosh(\beta_k x) + \cos(\beta_k x) \right] \quad (4.24)$$

L'équation (4.14) montre que les paramètres modaux obtenus à partir des ELB-CA ne sont pas identiques à ceux déterminés par les capteurs ponctuels «classiques» (déplacement, vitesse ou accélération). En effet, les fréquences propres et amortissements modaux sont les mêmes, le facteur temporel  $b_k(t)$  étant identique à celui du déplacement  $v(x, t)$  défini en (4.1), par contre les vecteurs propres associés à ces fréquences propres sont différents. Pour les capteurs ponctuels, les vecteurs propres sont les déformés modaux  $\phi_k(x)$  alors que pour l'ELB-CA, les vecteurs propres identifiés  $\Phi_k(x)$  sont définis par :

$$\Phi_k = \int_a^b \phi''_k(x) dx = \phi'_k(b) - \phi'_k(a) \quad (4.25)$$

Les  $\phi''_k(x)$  sont généralement appelés courbures modales et pour les  $\phi'_k(x)$  nous parlerons de déformées «angulaires» modales<sup>1</sup>. Les vecteurs propres observés par les ELB-CA sont donc des intégrales de courbure modale entre les bornes définies par les miroirs du capteur ou des différences d'«angles» modaux des points où les miroirs sont situés.

Les figures 4.2 et 4.3 représentent respectivement les trois premières déformées angulaires et courbures modales de la poutre pour les différentes CL.

<sup>1</sup>Dans un modèle EF, les  $\phi'_k(x)$  correspondent aux vecteurs propres associés aux DDLs angulaires, d'où l'appellation déformées angulaires.

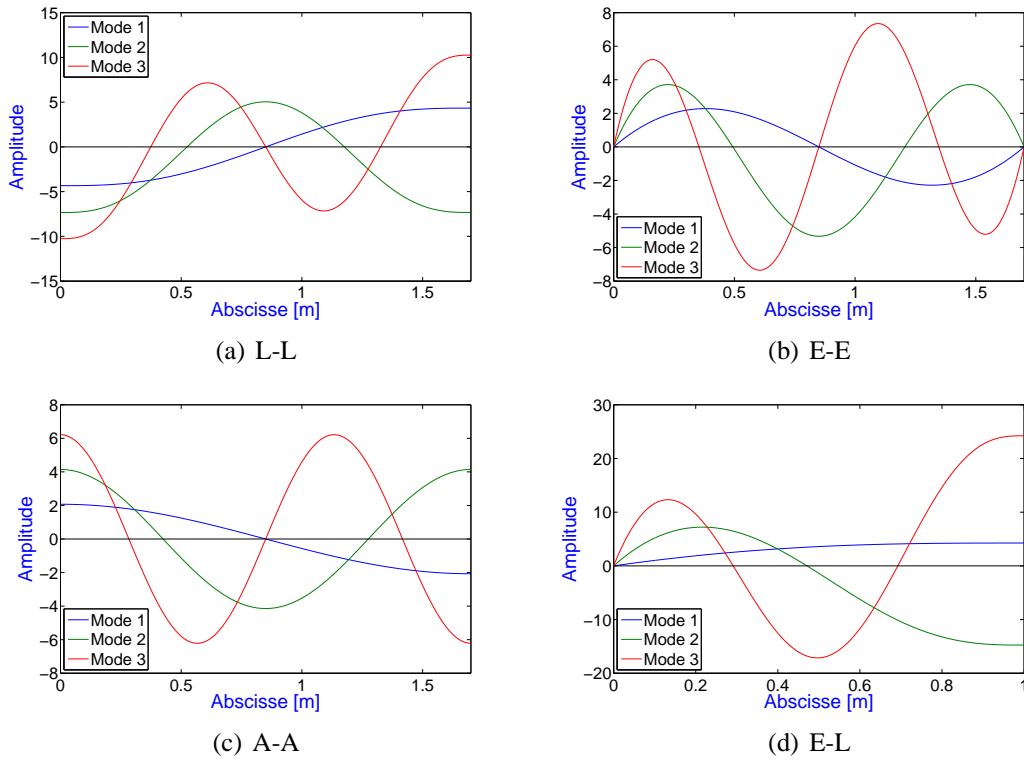


FIGURE 4.2: Graphes des trois premières dérivées angulaires de la poutre ( $\phi'_k$ ) pour les différentes CL.

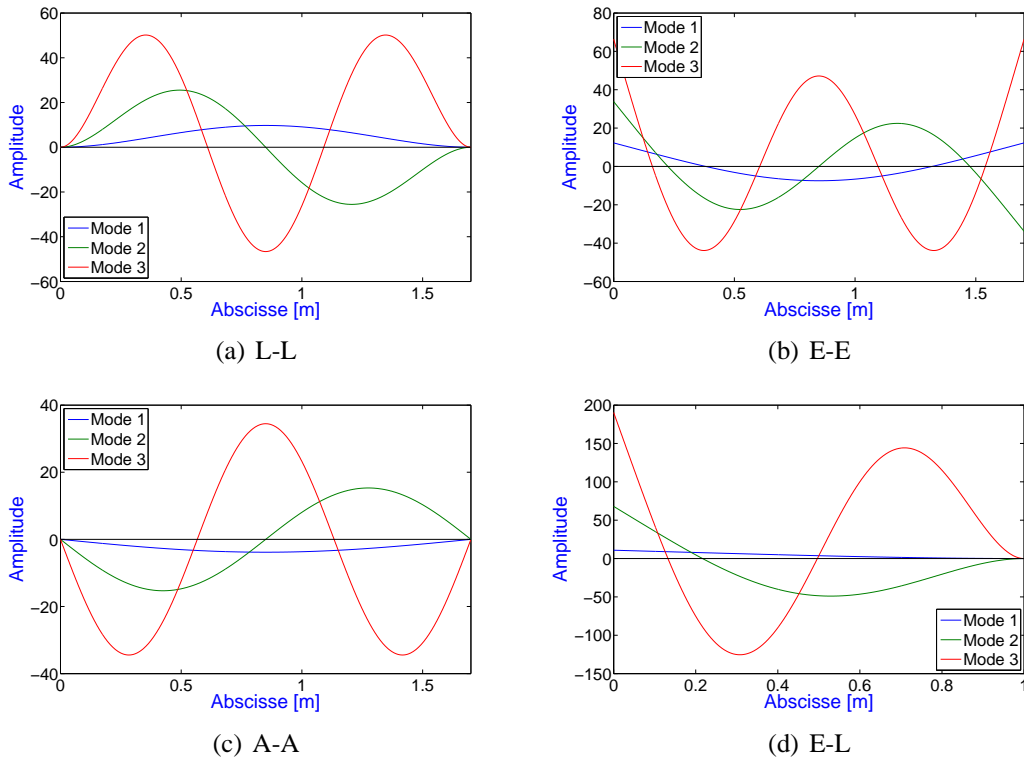


FIGURE 4.3: Graphes des trois premières courbures modales de la poutre ( $\phi''_k$ ) pour les différentes CL.



### 4.3 Notions de noeuds et de ventres des modes pour les ELB-CA

Ces courbes vont nous permettre de mieux appréhender les notions de ventre et de noeud des vecteurs propres observés par les ELB-CA. Pour cela, des simulations numériques de la mesure obtenue par des ELB-CA **collés à la surface** d'une poutre ( $y = h/2$ ) ont été réalisées. La poutre est excitée par un choc à l'abscisse  $x_0$ . Le choc est simulé par une demi-sinusoïde dont la durée est égale à 0.004 s et dont l'amplitude est choisie pour avoir une flèche maximale de la poutre de  $3 \cdot 10^{-4}$  m. **Le cas de CL choisi est celui de la poutre E-E.**

Les mesures simulées des différents types de capteur sont obtenues numériquement à partir des équations (4.1), (4.9), (4.10) et (4.14) ; leur TF est ensuite calculée. Les mesures sont effectuées entre les instants  $t_0 = 0$  et  $t_f$ , intervalle de temps discrétisé en  $N_t$  points. Les valeurs des paramètres choisies pour l'étude numérique sont répertoriées dans le tableau 4.2 et correspondent à une poutre mince en acier de 1.70 m équipée de plusieurs ELB-CA dont le placement et la longueur seront définis par la suite.

Abcisse du choc	Instant du choc	Instant final des mesures	Nombre de pas de temps	Taux d'amortissement	Nombre de modes
$x_0(m)$	$t_0(s)$	$t_f(s)$	$N_t$	$\xi_k = \xi(\%)$	$N$
0.95	0	15	10000	0.8	10

TABLEAU 4.2: Paramètres pour la simulation numérique.

Avec les paramètres du tableau 4.1, les dix premières fréquences propres de la poutre E-E sont :

$f_1$	5.537 Hz
$f_2$	15.26 Hz
$f_3$	29.92 Hz
$f_4$	49.46 Hz
$f_5$	73.88 Hz
$f_6$	103.2 Hz
$f_7$	137.4 Hz
$f_8$	176.5 Hz
$f_9$	220.4 Hz
$f_{10}$	269.3 Hz

TABLEAU 4.3: Fréquences propres de la poutre E-E.

### 4.3 Notions de noeuds et de ventres des modes pour les ELB-CA

Dans ce paragraphe, nous allons mettre en avant les particularités des ELB-CA quant aux notions de noeuds et de ventres des vecteurs propres  $\Phi_k(x)$  observés par ces derniers. La figure 4.3(b) représente les cinq premières courbures modales de la poutre E-E. Si les ELB-CA étaient ponctuels, la contribution du vecteur propre dans la réponse du capteur serait la courbure modale en un point, les noeuds du vecteur propre seraient alors par définition les abscisses où les courbures modales s'annulent. Cependant, la particularité des ELB-CA est qu'ils possèdent une base de mesure d'une certaine longueur (de quelques cm à plusieurs m).

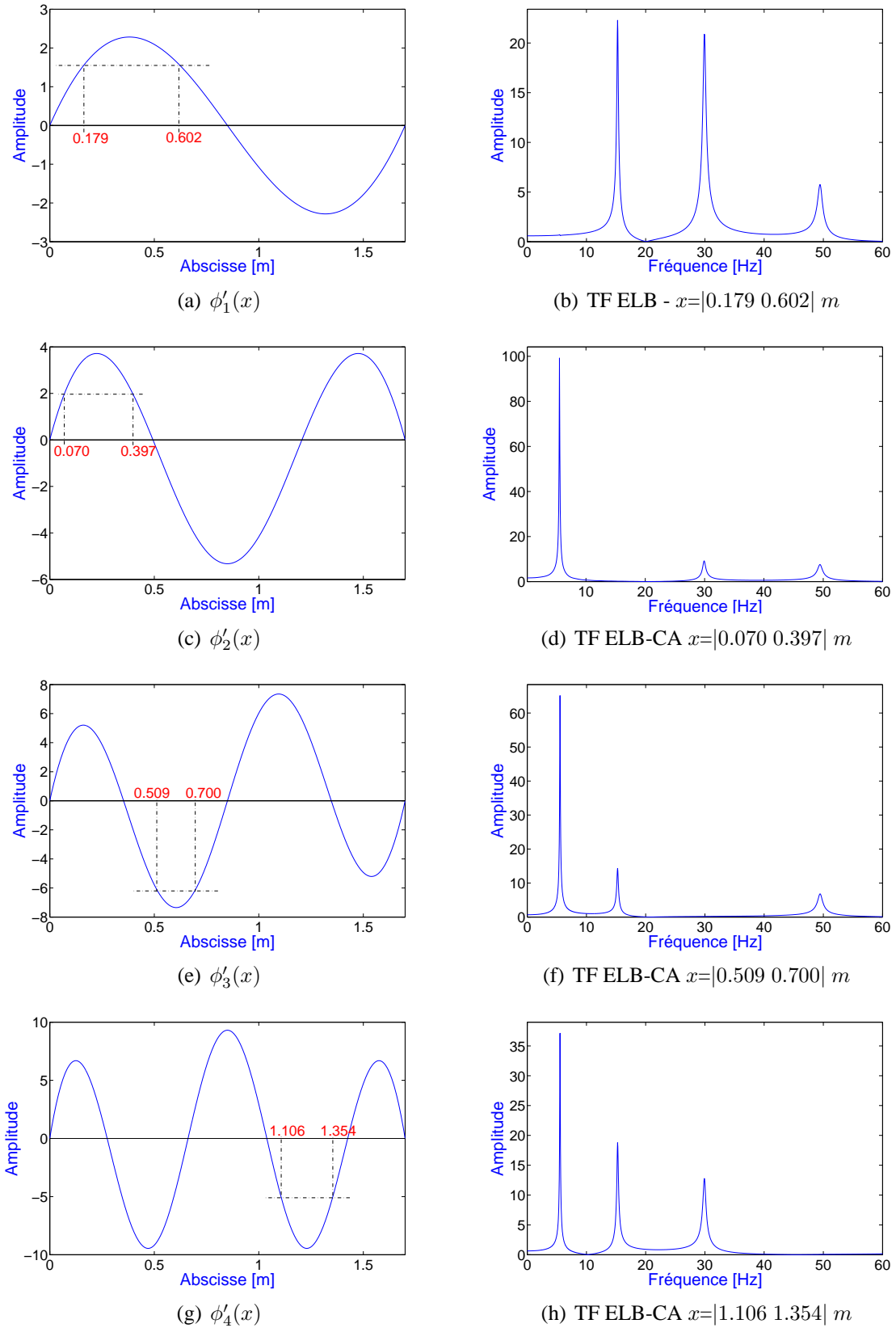
### 4.3.1 Noeuds d'un mode

La notion de noeuds pour les ELB-CA se comprend aisément à partir de l'expression  $\Phi_k = \phi'_k(b) - \phi'_k(a)$  avec  $a$  et  $b$  les bornes de l'ELB-CA où sont situés les miroirs du capteur. En effet, il suffit de choisir le positionnement et la longueur de l'ELB-CA de telle manière que cette différence s'annule, autrement dit de choisir deux points tel que  $\phi'_k(b) = \phi'_k(a)$ . La figure 4.4 présente les quatre premières déformées angulaires modales de la poutre et quatre configurations possibles d'ELB-CA permettant de filtrer chacun des quatre premiers modes séparément.

Les graphes de la figure 4.4 permettent de montrer l'existence d'une multitude de positions et de longueurs associées permettant de filtrer chacun des modes. Sur la figure 4.4(b), par exemple, pour la même valeur de déformée angulaire choisie,  $\phi'_2(x) = 2$ , deux autres abscisses que celles déjà indiquées sur le graphe sont possibles. Il y a donc quatre solutions pour cette équation soit six configurations d'ELB-CA permettant de filtrer ce mode. La variation de la valeur de la déformée angulaire choisie ( $\phi'_2(x) = cst$ ) induit un nombre de configurations possibles très important. Ce n'est pas du tout le cas pour les capteurs ponctuels, où il n'y a que quelques noeuds par modes et dont le nombre augmente avec l'ordre du mode.

*Notons dès à présent que le placement et la longueur du capteur sont des paramètres propres à l'ELB-CA complètement liés l'un à l'autre. Néanmoins, le placement peut être dissocié de la longueur lorsque celle-ci est fixée. L'inverse n'est pas possible puisque si l'on fait varier la longueur de l'ELB-CA, le placement varie également. Nous parlerons alors de **configuration** d'un ELB-CA pour définir le placement et la longueur d'un ELB-CA*

### 4.3 Notions de noeuds et de ventres des modes pour les ELB-CA



**FIGURE 4.4:** Exemple de placement d'ELB-CA permettant de filtrer l'un des quatre premiers modes d'une poutre E-E : (a) premier, (c) deuxième, (e) troisième et (g) quatrième mode.

### 4.3.2 Ventre d'un mode

Pour la notion de ventre, le raisonnement est semblable. Pour les capteurs ponctuels, les ventres sont les maxima des déformées modales. Si un capteur ponctuel est placé au ventre d'un mode, la contribution du mode sera maximale pour le capteur. Ceci se traduira par une amplitude du pic associé au mode<sup>1</sup> plus importante au niveau de la TF du signal du capteur.

Pour un vecteur propre observé par l'ELB-CA, un ventre sera défini par une configuration de l'ELB-CA permettant d'obtenir la contribution maximale du vecteur propre au niveau du capteur (le facteur temporel étant le même pour toutes les configurations d'ELB-CA possibles). Il faut donc que  $\Phi_k$  soit maximum, c'est-à-dire que l'intégrale de la courbure modale soit maximale<sup>2</sup>. Prenons comme exemple la première courbure modale de la poutre E-E. Plusieurs configurations d'ELB-CA ont été choisies et sont répertoriées dans le tableau 4.4.

ELB-CA	Bornes d'intégration de l'ELB-CA	
	$a(m)$	$b(m)$
1	0.75	0.95
2	0.65	1.05
3	0.38	1.35
4	0.3	1.4

**TABEAU 4.4: Placement des ELB-CA sur la poutre E-E.**

Les TF des signaux de mesure numériques des ELB-CA sont tracées sur la figure 4.5(c) afin d'observer l'évolution de l'amplitude du pic associé à la première fréquence propre en fonction des différentes configurations d'ELB-CA. La première déformée angulaire et la première courbure modale de la poutre E-E sont représentées respectivement sur les figures 4.5(a) et 4.5(b).

Le pic maximum est atteint pour la troisième configuration d'ELB-CA soit  $x=[0.38 \ 1.35] \ m$ . C'est la configuration qui permet de maximiser l'intégrale de la courbure modale ou la différence d'angles modaux  $\Phi_k$ . En effet, les bornes de l'ELB-CA se situent entre deux extrema de  $\phi'_k(x)$  (Fig. 4.5(a)).

La figure 4.5(d) présente la même étude mais cette fois-ci en prenant  $\Phi_k = \Gamma_{moy_k}$  définie en (4.15). Dans ce cas, pour obtenir la contribution maximale de  $\Gamma_{moy_k}$ , ce sera l'inverse : plus l'ELB-CA sera petit et centré sur le maximum de la courbure modale, plus l'amplitude du pic de la TF sera élevée.

<sup>1</sup>L'amplitude sera maximale par rapport aux TF d'autres capteurs situés à des abscisses différentes de la poutre autres, qu'un ventre.

<sup>2</sup>Les paramètres pour maximiser l'intégrale sont les bornes d'intégration, c'est-à-dire la configuration de l'ELB-CA (placement et longueur). La distance à l'axe neutre  $y$  pourrait également être prise en compte mais il est immédiat que le maximum sera alors pour un ELB-CA situé en surface de la poutre.

## 4.4 Filtrage de plusieurs modes

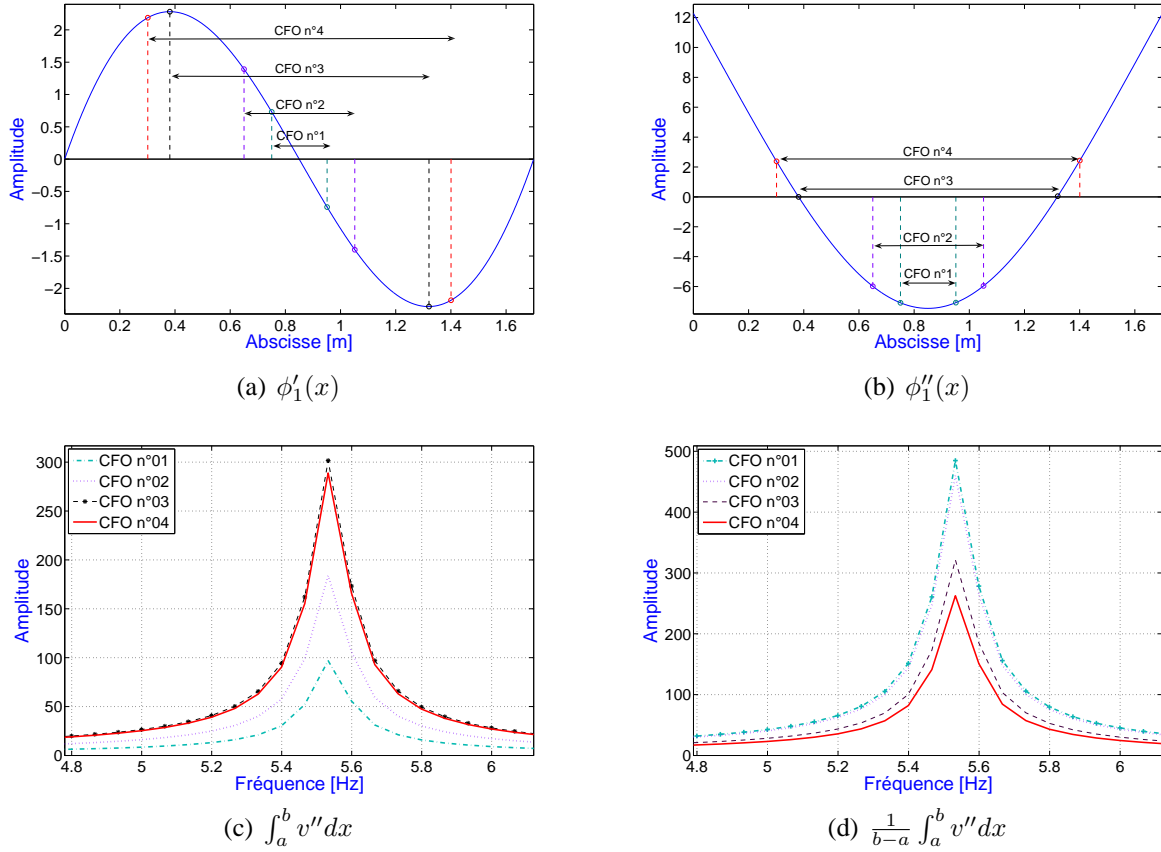


FIGURE 4.5: Placements d'ELB-CA permettant d'améliorer l'observabilité du premier mode d'une poutre E-E.

En résumé, le **noeud** d'un vecteur propre observé par les ELB-CA sera défini par une configuration du capteur permettant d'obtenir :

$$\phi_k'(b) = \phi_k'(a)$$

où  $a$  et  $b$  sont les bornes de l'ELB-CA.

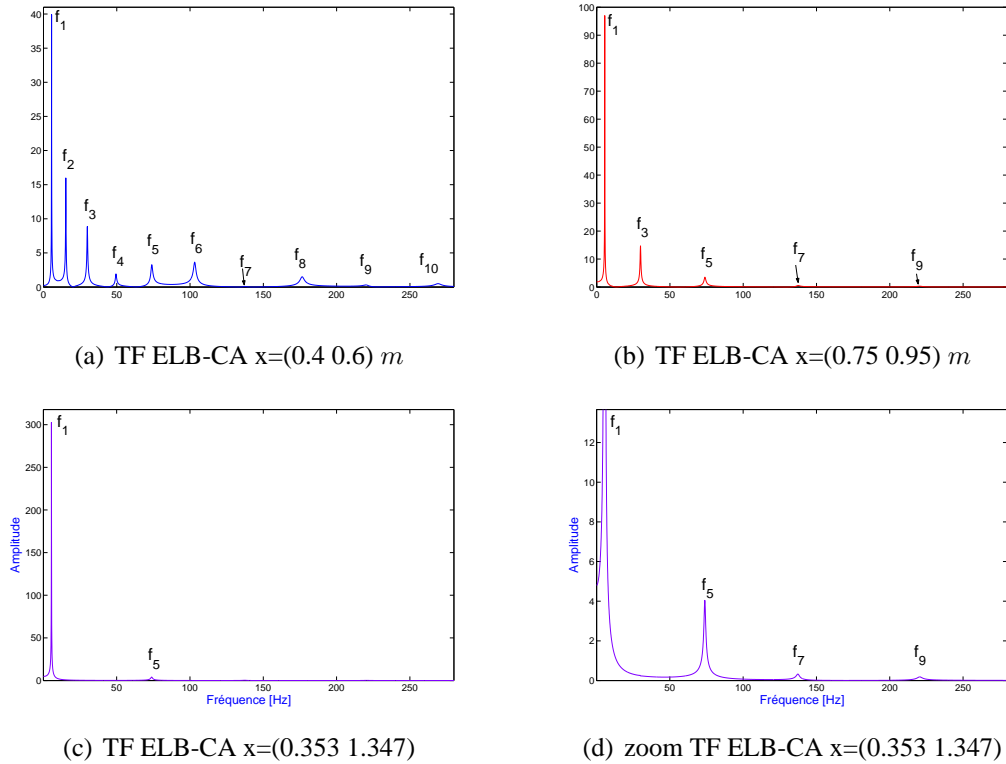
Le **ventre** d'un vecteur propre observé par les ELB-CA sera défini par une configuration de l'ELB-CA permettant de maximiser l'intégrale de la courbure modale :

$$a \text{ et } b \text{ tel que } \Phi_k = \max_{x \in [0, L]} \left( \int_a^b \phi_k''(x) dx \right)$$

## 4.4 Filtrage de plusieurs modes

Précédemment, nous avons montré qu'il était possible de filtrer un mode séparément en choisissant des configurations particulières d'ELB-CA. Du fait de la symétrie des courbures modales, il est possible de trouver des configurations d'ELB-CA permettant de filtrer plusieurs modes en même

temps. Sur la figure 4.6, les TF des signaux de mesure obtenus numériquement pour trois configurations particulières d'ELB-CA sont représentées.



**FIGURE 4.6:** Mise en évidence numérique du filtrage de plusieurs modes de la poutre E-E par un choix judicieux de la configuration d'un ELB-CA.

La première configuration d'ELB-CA (Fig 4.6(a)) permet d'observer les dix modes<sup>1</sup> de la structure pris en compte dans la simulation. La deuxième configuration est symétrique par rapport au centre de la poutre ( $x=0.85 \ m$ ). Par conséquent, tous les modes pairs vont être filtrés (à savoir les modes 2, 4, 6, 8 et 10). La troisième configuration est elle aussi symétrique par rapport au centre de la poutre, filtrant ainsi les mêmes modes, mais de par sa longueur plus importante elle va permettre de filtrer également le mode 3. En poussant le raisonnement, on s'aperçoit qu'un ELB-CA recouvrant l'intégralité de la poutre E-E ne verrait aucun mode. Ce résultat n'est valable que pour ce cas de CL.

Il existe un autre moyen de mettre à profit la base de mesure de l'ELB-CA pour filtrer plusieurs modes. En fait, il est même possible de placer un ELB-CA sur la poutre pour qu'un seul mode soit présent dans la réponse, on parlera alors de capteur modal [6][7][8]. Pour cela, l'ELB-CA doit être placé suivant une forme particulière : pour le calcul de la déformation  $\varepsilon_{xx}$ , la hauteur à l'axe neutre  $y$  ne sera plus constante mais dépendra de l'abscisse de la poutre. Le détail des calculs est présenté en annexe B. Pour le cas des petites déformations et des petites rotations, la déformation subie par l'ELB-CA vaut

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{yv''}{1 + y'^2} \quad (4.26)$$

<sup>1</sup>Le point d'excitation se trouvant à proximité du noeud de la courbure modale n°7, le vecteur propre est très peu excité et donc difficilement observable sur la figure 4.6(a).

#### 4.4 Filtrage de plusieurs modes

et la mesure obtenue à partir de l'ELB-CA est alors

$$\Delta D_{AB} = - \int_0^L y v'' dx \quad (4.27)$$

On retrouve la même expression que précédemment à la différence que  $y$  dépend maintenant de  $x$  et que  $D_{AB}(0) = \int_0^L (1 + y'^2/2) dx = L + \frac{1}{2} \int_0^L y'^2 dx$ .

La figure 4.7 présente les résultats numériques obtenus pour des ELB-CA placés entre les deux extrémités d'une poutre E-E ( $x=[0 L]$ ) et qui auraient une forme proportionnelle au deuxième et cinquième courbures modales de la poutre.

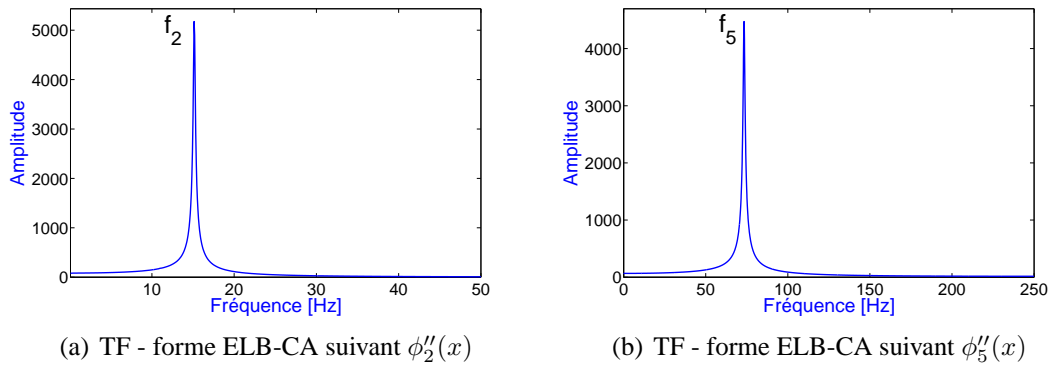


FIGURE 4.7: Filtrage de plusieurs modes de la poutre E-E : capteur modal.

Un système mécanique donné est dépendant de son environnement au moment de son fonctionnement. Cet environnement est caractérisé par l'ensemble des sources d'excitations, les liaisons et les effets indésirables tels que les bruits et les vibrations que produit la structure. Un tel système évolue selon des lois naturelles positives et globales. Le contrôle actif a pour objectif d'agir sur ces lois et permet de conférer au système un comportement avec de meilleures performances dynamiques. Pour ce faire, on intègre à la structure de base un jeu de capteurs pour mesurer son état vibratoire et un jeu d'actionneurs pour appliquer une commande générée par un contrôleur afin d'amener la structure à un état fixé auparavant. Un problème fondamental se pose lors du contrôle actif de structures légères et flexibles, abondamment utilisés en construction aéronautique : c'est le phénomène de la contamination modale ou effet de Spillover qui se manifeste sous forme d'instabilités.

L'utilisation des ELB-CA comme capteurs modaux serait donc très utile pour le contrôle des structures afin de réduire l'effet de Spillover. Il faudra tout de même faire attention au fait que ce sont les déformées modales  $\phi_k(x)$  qui sont généralement utilisées dans les algorithmes de contrôle et non  $\Phi_k(x) = \int_a^b \phi_k''(x) dx$  déterminés par les ELB-CA. Pour plus de détails sur le contrôle actif des structures, on se référera à [9][10][11][12][13][14]. Cette application paraît cependant difficile à mettre en oeuvre notamment pour coller correctement le capteur suivant la forme des courbures modales de la structure étudiée. Par ailleurs, celles-ci ne sont pas toujours bien connues et peuvent changer. Des investigations supplémentaires seraient à mener pour étudier les influences du collage et d'une modification de la forme de la courbure modale sur la qualité du filtrage.

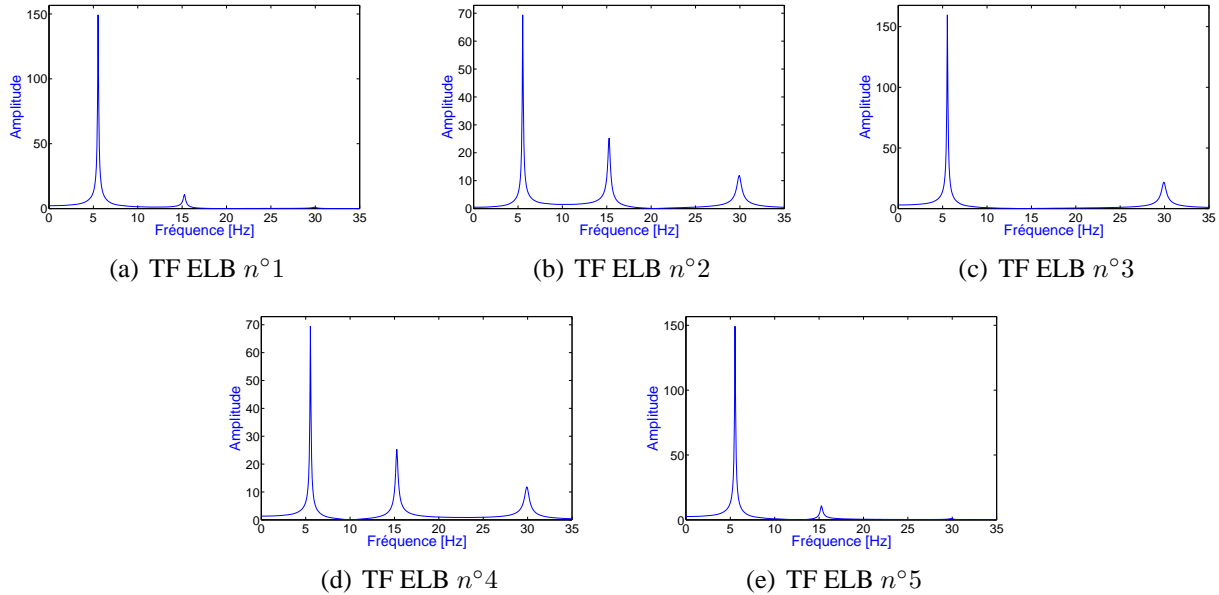
## 4.5 Influence du placement des ELB-CA

Regardons maintenant l'influence du placement de l'ELB-CA pour une base de mesure donnée. Prenons par exemple cinq ELB-CA répartis uniformément au niveau de la poutre. La base de mesure des capteurs sera alors de 34 cm. Les placements des cinq ELB-CA sont répertoriés dans le tableau 4.5.

ELB-CA	Bornes d'intégration de l'ELB-CA	
	$a(m)$	$b(m)$
1	0	0.34
2	0.34	0.68
3	0.68	1.02
4	1.02	1.36
5	1.36	1.70

**TABEAU 4.5:** Placement des ELB-CA sur la poutre E-E.

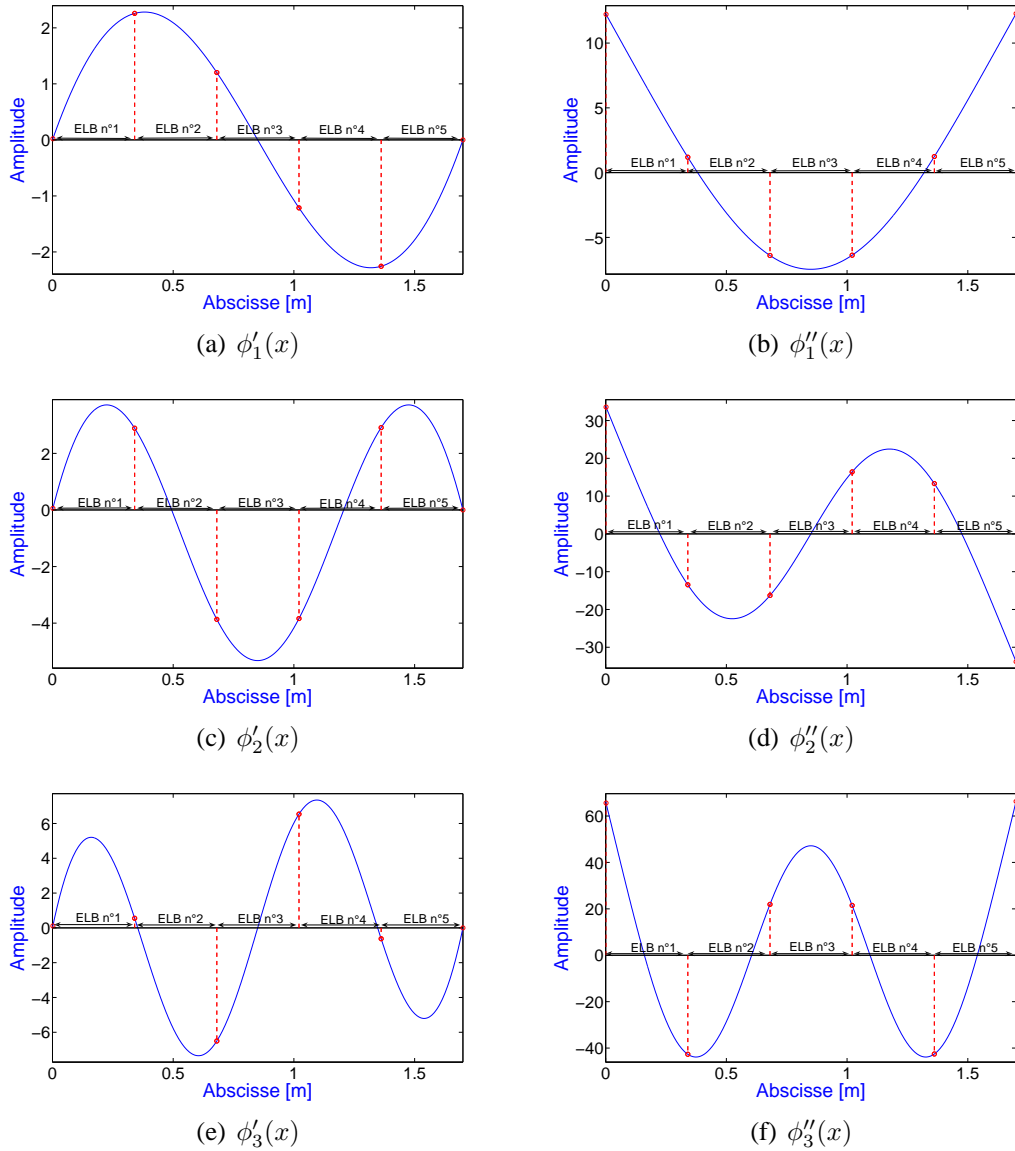
Nous nous intéresserons uniquement aux trois premiers modes de la poutre. La poutre est toujours excitée par un choc à l'abscisse  $x_0 = 0.95 m$ . La figure 4.8 présente les TF obtenues à partir des signaux numériques des cinq ELB-CA et la figure 4.9 les déformées angulaires et courbures modales des trois premiers modes.



**FIGURE 4.8:** TF des cinq ELB-CA positionnés uniformément au niveau de la poutre E-E.



#### 4.5 Influence du placement des ELB-CA



**FIGURE 4.9: Placement des cinq ELB-CA vis-à-vis de  $\phi_k'(x)$  et  $\phi_k''(x)$  pour  $k = 1 \dots 3$ .**

Le positionnement des ELB-CA étant symétrique par rapport au centre de la poutre, les mêmes TF sont obtenues pour les ELB-CA n°1 et n°5, et les ELB-CA n°2 et n°4. Par ailleurs, d'après la figure 4.9, l'amplitude des pics des fréquences propres pour les différents ELB-CA concorde bien avec leur positionnement. En effet, prenons comme exemple le pic associé à la deuxième fréquence propre. Au vu des graphes 4.9(c) et 4.9(d), la valeur de  $\Phi_k$  la plus importante sera pour les ELB-CA n°2 et n°4, puis n°1 et n°5 et enfin l'ELB-CA n°3. La configuration de l'ELB-CA n°3 étant symétrique par rapport au centre de la poutre, il ne verra pas le deuxième mode. Nous retrouvons bien ces observations au niveau de l'amplitude des pics des TF des ELB-CA (Fig. 4.8).

*Le placement des ELB-CA joue sur l'observabilité des modes qui sera déterminée non pas à partir de  $\phi_k(x_i)$ , comme pour les capteurs ponctuels, mais à partir de  $\int_a^b \phi_k''(x)dx$ .*

## 4.6 Analyse modale de signaux numériques

### 4.6.1 ELB-CA « longue base »

Nous allons maintenant appliquer une méthode d'analyse modale pour confirmer les paramètres modaux obtenus à partir des signaux numériques des différents types de capteur :

- Déplacement
- Vitesse
- Accélération
- ELB-CA

Nous nous intéressons uniquement aux trois premiers modes de la poutre E-E et le nombre de capteur est égal à dix pour chaque type de mesure. Leurs placements sont répertoriés dans le tableau 4.6. La poutre est excitée par un choc à l'abscisse  $x_0 = 0.95 \text{ m}$ . Les paramètres de l'étude sont ceux définis dans les tableaux 4.1 et 4.2.

Capteur	Dép. Vit. Acc.	ELB-CA	
	$x(m)$	$a(m)$	$b(m)$
n°1	0	0	0.17
n°2	0.19	0.17	0.34
n°3	0.38	0.34	0.51
n°4	0.57	0.51	0.68
n°5	0.76	0.68	0.85
n°6	0.94	0.85	1.02
n°7	1.13	1.02	1.19
n°8	1.32	1.19	1.36
n°9	1.51	1.36	1.53
n°10	1.7	1.53	1.70

**TABLEAU 4.6: Placement des ELB-CA et des capteurs ponctuels (déplacement, vitesse et accélération) sur la poutre E-E.**

La méthode d'analyse modale utilisée en une méthode dite en output-only, c'est-à-dire que le signal de mesure de l'excitation n'est pas utilisée lors du traitement des données : la Transformée en Ondelettes Continue (TOC) [16][17][18][19]. Les éléments essentiels de la méthode de la TOC, notamment pour le traitement des réponses transitoires, sont rappelées en annexe D.

Pour notre étude ainsi que pour la suite du manuscrit, les ondelettes mères utilisées pour le traitement des signaux par la TOC sont celles de Cauchy. La méthode utilise des paramètres spécifiques (annexe D). Les paramètres sont le temps d'arrêt  $t_f$  des signaux traités, un facteur de qualité  $Q$ , la plage de fréquence à étudier et  $N_{TOC}$  le nombre de points discrétisant cet intervalle fréquentiel. Pour plus de détails sur les paramètres de cette méthode, on se référera à [18][19]. La figure 4.10 présente la TOC globale du capteur n°1 sur la plage de fréquences  $[0-40] \text{ Hz}$  pour les différents types de capteur. Le temps d'arrêt est égal à la durée totale du signal, soit  $t_f = 15 \text{ s}$ ,  $Q = 20$  et  $N_{TOC} = 400$  points. Des graphes similaires seraient obtenus pour les autres capteurs. Ensuite, un traitement local des signaux dans le plan temps-fréquence est réalisé, dont les paramètres sont répertoriés dans le tableau 4.7.

## 4.6 Analyse modale de signaux numériques

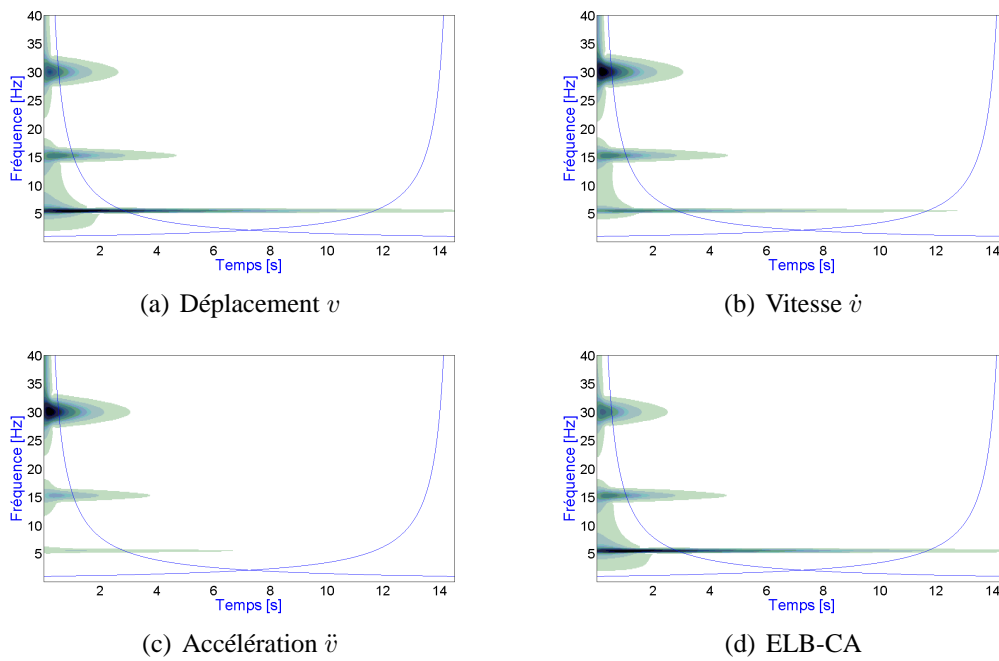


FIGURE 4.10: Traitement des différents types de donnée par la TOC.

Modes	Plage de fréquence (Hz)	$N_{TOC}$	$Q$	$t_f$ (s)			
				Dep.	Vit.	Acc.	ELB
n°1	[5 6]	200	5	15	13	7	15
n°2	[15 16]	200	10	10	5	4	5
n°3	[29.5 30.5]	200	25	3	3.5	4	3

TABLEAU 4.7: Paramètres de la TOC pour le traitement local des signaux numériques des différents types de capteurs.

Les résultats obtenus pour les fréquences propres et les amortissements modaux avec la TOC sont répertoriés dans le tableau 4.8 :

Données	Type de mesure	Mode n°1	Mode n°2	Mode n°3
Fréquence (Hz)	Déplacement	5.538	15.26	29.92
	Vitesse	5.538	15.26	29.92
	Accélération	5.538	15.26	29.92
	ELB-CA	5.538	15.26	29.92
Amortissement (%)	Déplacement	0.80	0.80	0.80
	Vitesse	0.80	0.80	0.80
	Accélération	0.80	0.80	0.80
	ELB-CA	0.80	0.80	0.80

TABLEAU 4.8: Fréquences propres et amortissements obtenus pour les différents types de capteur avec la TOC.

Les fréquences et les amortissements déterminés pour les trois premiers modes sont bien les fréquences théoriques (Tab. 4.3) et l'amortissement défini dans le tableau 4.2.

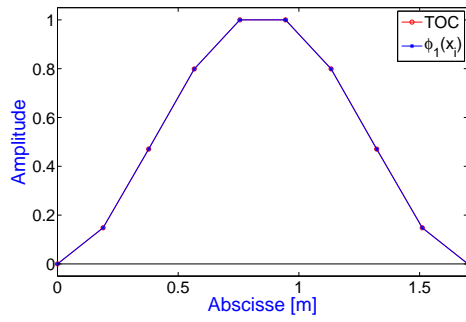
Les vecteurs propres associés aux trois premières fréquences propres, déterminés par la TOC pour les différents types de mesure, sont indiqués dans le tableau 4.9. Les mêmes valeurs de vecteurs propres sont obtenues pour les trois mesures ponctuelles (déplacement, vitesse et accélération). Ainsi dans le tableau 4.9, les vecteurs propres déterminés pour les trois premiers modes,  $\phi_{num_k}$  et  $\Phi_{num_k}$ , sont comparés avec les modes théoriques,  $\phi_{th_k}$  et  $\Phi_{th_k}$  ( $k = 1 \dots 3$ ).

Capteur	Mode $n^\circ 1$				Mode $n^\circ 2$				Mode $n^\circ 3$			
	$\phi_{num_k}$	$\phi_{th_k}$	$\Phi_{num_k}$	$\Phi_{th_k}$	$\phi_{num_k}$	$\phi_{th_k}$	$\Phi_{num_k}$	$\Phi_{th_k}$	$\phi_{num_k}$	$\phi_{th_k}$	$\Phi_{num_k}$	$\Phi_{th_k}$
$n^\circ 1$	0	0	1	1	0	0	-1	-1	0	0	-0.78	-0.78
$n^\circ 2$	0.15	0.15	0.41	0.41	0.38	0.38	0.17	0.17	0.6	0.6	0.7	0.7
$n^\circ 3$	0.47	0.47	-0.12	-0.12	0.93	0.93	0.93	0.93	1	1	1	1
$n^\circ 4$	0.80	0.80	-0.53	-0.53	1	1	1	1	0.26	0.26	0.07	0.07
$n^\circ 5$	1	1	-0.75	-0.75	0.43	0.43	0.42	0.42	-0.77	-0.77	-0.98	-0.98
$n^\circ 6$	1	1	-0.75	-0.75	-0.43	-0.43	-0.42	-0.42	-0.77	-0.77	-0.98	-0.98
$n^\circ 7$	0.8	0.8	-0.53	-0.53	-1	-1	-1	-1	0.26	0.26	0.07	0.07
$n^\circ 8$	0.47	0.47	-0.12	-0.12	-0.93	-0.93	-0.93	-0.93	1	1	1	1
$n^\circ 9$	0.15	0.15	0.41	0.41	-0.38	-0.38	-0.17	-0.17	0.6	0.6	0.7	0.7
$n^\circ 10$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	-0.78	-0.78

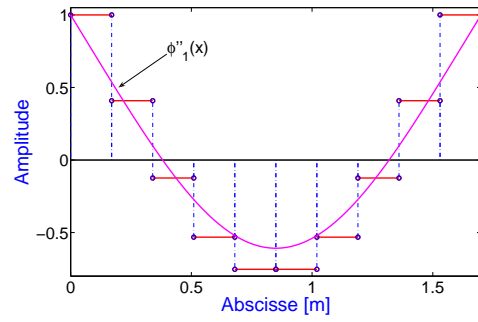
TABLEAU 4.9: Vecteurs propres obtenus pour les différents types de capteur avec la TOC.

Les résultats obtenus à partir de la TOC correspondent parfaitement aux modes théoriques pour les capteurs ponctuels ainsi que pour l'ELB-CA, permettant de vérifier que les vecteurs propres déterminés par les ELB-CA diffèrent de ceux obtenus avec des capteurs ponctuels, comme anticipé en 4.2.2.

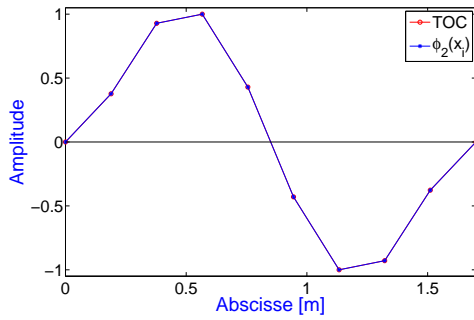
Sur la figure 4.11, les vecteurs propres identifiés et théoriques sont représentés pour les capteurs ponctuels et les ELB-CA. Pour les graphes concernant les ELB-CA, la courbe théorique tracée pour chacun des modes est la courbure modale  $\phi_k''(x)$ .



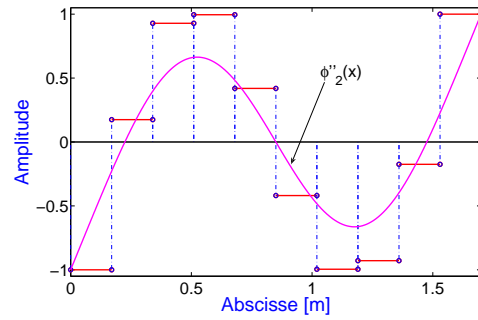
(a) Déformée modale  $n^{\circ}1$  (capteurs ponctuels)



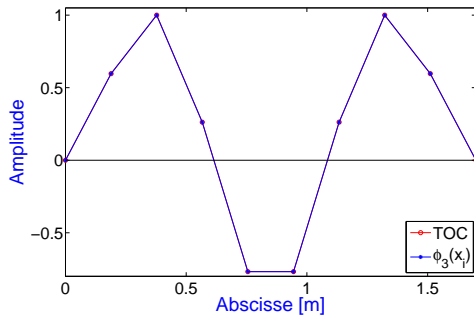
(b) Vecteur propre  $n^{\circ}1$  ELB-CA



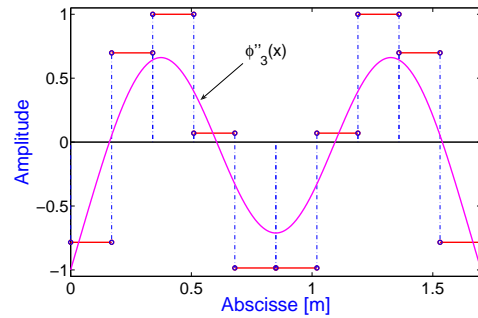
(c) Déformée modale  $n^{\circ}2$  (capteurs ponctuels)



(d) Vecteur propre  $n^{\circ}2$  ELB-CA



(e) Déformée modale  $n^{\circ}3$  (capteurs ponctuels)



(f) Vecteur propre  $n^{\circ}3$  ELB-CA

**FIGURE 4.11: Vecteurs propres obtenus pour les différents types de capteur.**

La figure 4.11 permet de montrer la forme particulière des vecteurs propres obtenus à partir de mesures d'ELB-CA. En effet, la valeur du vecteur propre est l'intégrale de la courbure modale et elle est associée non pas à un point mais à la base de mesure de l'ELB-CA. L'allure du vecteur propre sera alors une courbe en forme de marches d'escalier ou de diagramme en barres [21].

### 4.6.2 ELB-CA « ponctuels »

Nous venons de montrer un exemple d'application d'ELB-CA de 17 cm sur une poutre de 1.70 m de long. Gardons à l'esprit que l'objectif d'application visé est la mise en oeuvre des ELB-CA sur des ouvrages d'art. Ainsi, un ELB-CA de 50 cm pourra être considéré comme ponctuel pour un ouvrage de plusieurs dizaines voire centaines de mètres. Prenons l'exemple, quelque peu irréaliste, d'une poutre E-E en acier de 100 m de long équipée de neuf ELB-CA de 50 cm pour illustrer ces

propos. La poutre est excitée par un choc permettant d'obtenir une flèche maximale de la poutre de quelques centimètres. Les caractéristiques de la poutre et de la simulation numérique qui diffèrent de la précédente sont répertoriés dans le tableau 4.10. Le placement des ELB-CA est indiqué dans le tableau 4.11.

Longueur	Hauteur	Epaisseur	Abscisse du choc	Instant du choc	Instant final des mesures	Nombre de pas de temps
$L(m)$	$e(m)$	$h(m)$	$x_0(m)$	$t_0(s)$	$t_f(s)$	$N_t$
100	20	5	50	0	25	12500

TABLEAU 4.10: Paramètres de la poutre et de la simulation numérique.

ELB-CA	Bornes d'intégration de l'ELB-CA	
	$a(m)$	$b(m)$
1	10	10.5
2	20	20.5
3	30	30.5
4	40	40.5
5	50	50.5
6	60	60.5
7	70	70.5
8	80	80.5
9	90	90.5

TABLEAU 4.11: Placement des ELB-CA sur la poutre E-E de 100 m.

Comme précédemment, nous utilisons la TOC pour obtenir les vecteurs propres observés par les ELB-CA. La figure 4.12 représente le traitement du signal de l'ELB-CA n°1, à l'aide de la TOC, sur la plage de fréquences [0-30] Hz.

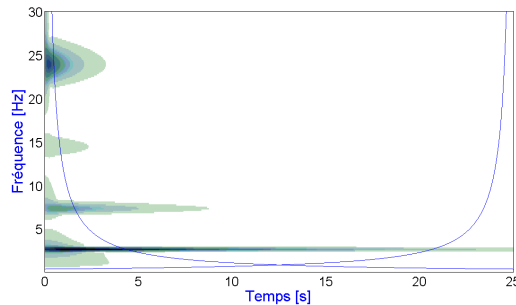


FIGURE 4.12: Traitement de l'ELB-CA n°1 par la TOC pour une poutre E-E de 100 m.

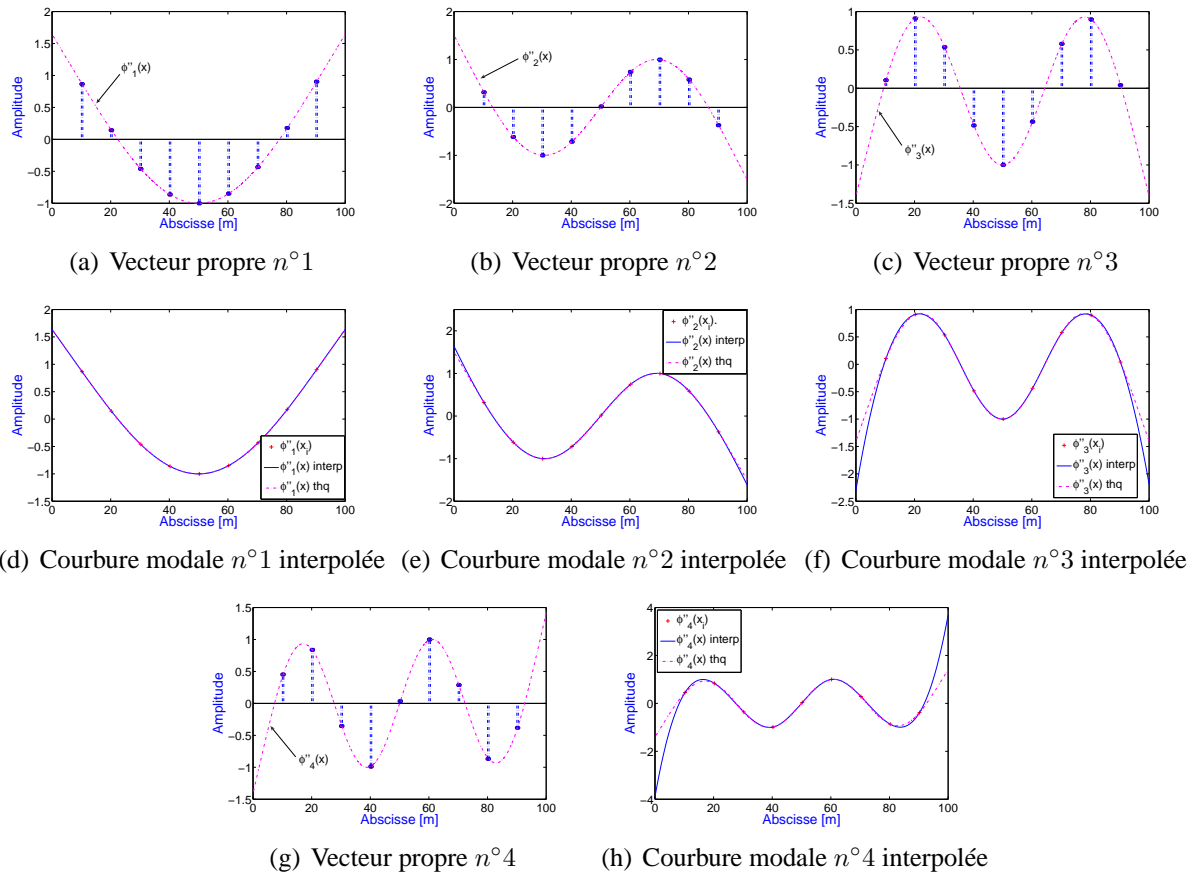
Nous allons nous intéresser aux quatre premiers modes de la poutre E-E. Les paramètres du traitement local des signaux à l'aide de la TOC sont répertoriés dans le tableau 4.12. La figure 4.13

## 4.6 Analyse modale de signaux numériques

présente les quatre premiers modes de la poutre obtenus avec la TOC à partir des signaux numériques des ELB-CA.

Modes	Plage de fréquence (Hz)	$N_{TOC}$	$Q$	$t_f$ (s)
n°1	[2.2 3.2]	200	5	25
n°2	[6.8 7.8]	200	7	9
n°3	[13.9 14.9]	200	10	3
n°4	[23.3 24.3]	200	15	4

**TABEAU 4.12: Paramètres de la TOC pour le traitement local des signaux numériques des ELB-CA pour la poutre de 100 m.**



**FIGURE 4.13: Vecteurs propres obtenus par des ELB-CA de 50 cm sur une poutre E-E de 100 m.**

La figure 4.13 permet de montrer que, dans le cas d'ELB-CA de 50 cm pour une poutre de 100 m de long, les valeurs des vecteurs propres obtenues au niveau des ELB-CA peuvent être considérées comme ponctuelles et associées au point situé au milieu de l'ELB-CA. Le vecteur propre  $\Phi_k$  observé par les ELB-CA sera alors directement la courbure modale  $\phi_k''(x_i)$ , où  $x_i$  est l'abscisse du milieu du  $i^{\text{ème}}$  ELB-CA. En interpolant ces points, il est possible d'obtenir une allure correcte de la courbure modale du mode (Fig. 4.13(d), 4.13(e), 4.13(f) et 4.13(h)). Un plus grand nombre de capteurs sera nécessaire pour obtenir une interpolation correcte des courbures modales élevées et l'ajout d'ELB-CA proches des limites permettra d'améliorer l'interpolation au niveau des extrémités de la poutre. Sur la

figure 4.14, la quatrième courbure modale obtenue avec deux ELB-CA supplémentaires, situés entre les abscisses  $x=[0 \ 0.5] \text{ m}$  et  $x=[99 \ 99.5] \text{ m}$ , est tracée. Avec l'ajout de deux ELB-CA à proximité des extrémités, l'interpolation est nettement plus proche de la courbure modale théorique, normalisée au maximum de courbure, que celle de la figure 4.13(h).

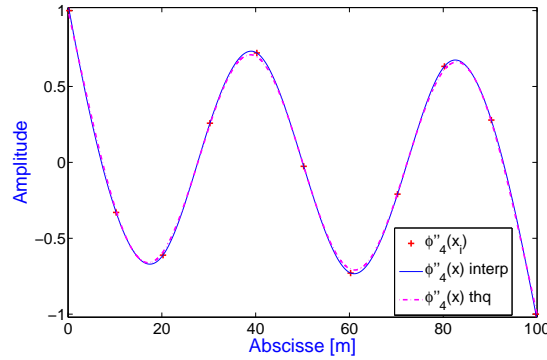


FIGURE 4.14: Courbure modale n°4 obtenue avec 11 ELB-CA.

## 4.7 Obtention des déformées modales à partir des ELB-CA

Intéressons nous maintenant aux possibilités de déduire les déformées modales  $\phi_k(x)$  à partir des vecteurs propres  $\Phi_k$  déterminés par les ELB-CA. Prenons une configuration où les ELB-CA seraient mis bout à bout. Chacun possède alors une borne d'intégration commune avec les capteurs adjacents (Fig. 4.15).

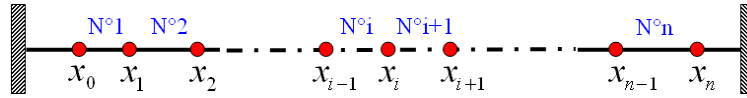


FIGURE 4.15: Placement d'ELB-CA en continu sur la poutre E-E.

Par analyse modale, l'ELB-CA n°i permettra d'obtenir les quantités  $\phi'_k(x_i) - \phi'_k(x_{i-1})$ . Pour les capteurs ayant une extrémité en commun, la somme des résultats obtenus pour le vecteur propre de deux capteurs voisins va être égale au résultat obtenu avec un seul ELB-CA équivalent, dont la longueur serait égale à la somme des longueurs des deux capteurs :

$$\begin{aligned} \text{ELB-CA n}^\circ i + \text{ELB-CA n}^\circ i + 1 &\rightarrow \text{ELB-CA équivalent} \\ \phi'_k(x_i) - \phi'_k(x_{i-1}) + \phi'_k(x_{i+1}) - \phi'_k(x_i) &\rightarrow \phi'_k(x_{i+1}) - \phi'_k(x_{i-1}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ainsi, pour chaque ELB-CA, si la somme des valeurs des vecteurs propres obtenues pour le capteur et tous les capteurs précédents est effectuée, il est possible de remonter aux  $\phi'_k(x)$  discrétisés aux bornes des ELB-CA à une constante additive près (ici  $\phi'_k(x_0)$ ) :



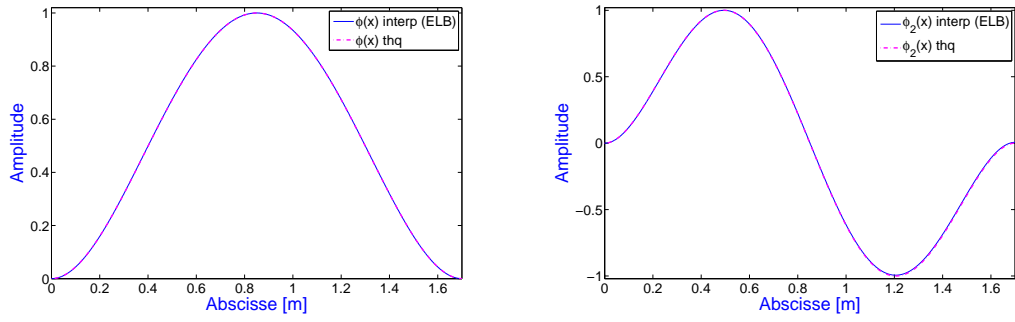
$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^1 [\phi'_k(x_j) - \phi'_k(x_{j-1})] &= \phi'_k(x_1) - \phi'_k(x_0) \\
\sum_{j=1}^2 [\phi'_k(x_j) - \phi'_k(x_{j-1})] &= \phi'_k(x_2) - \phi'_k(x_0) \\
\vdots & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
\sum_{j=1}^i [\phi'_k(x_j) - \phi'_k(x_{j-1})] &= \phi'_k(x_i) - \phi'_k(x_0) \\
\vdots & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
\sum_{j=1}^{n-1} [\phi'_k(x_j) - \phi'_k(x_{j-1})] &= \phi'_k(x_{n-1}) - \phi'_k(x_0) \\
\sum_{j=1}^n [\phi'_k(x_j) - \phi'_k(x_{j-1})] &= \phi'_k(x_n) - \phi'_k(x_0)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Nous avons appliqué cette procédure aux vecteurs propres obtenus par analyse modale en 4.6.1 (Tab. 4.9). Les résultats sont répertoriés dans le tableau 4.13.

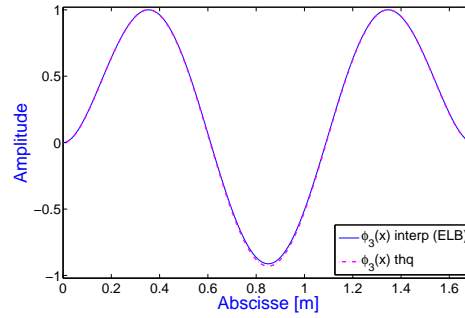
$\phi'_i - \phi'_0$	Mode n°1	Mode n°2	Mode n°3
$\phi'_1 - \phi'_0$	1	1	0.78
$\phi'_2 - \phi'_0$	1.41	0.83	0.09
$\phi'_3 - \phi'_0$	1.28	-0.10	-0.91
$\phi'_4 - \phi'_0$	0.75	-1.10	-0.98
$\phi'_5 - \phi'_0$	0	-1.52	0
$\phi'_6 - \phi'_0$	-0.75	-1.10	0.98
$\phi'_7 - \phi'_0$	-1.28	-0.10	0.91
$\phi'_8 - \phi'_0$	-1.41	0.83	-0.09
$\phi'_9 - \phi'_0$	-1	1	-0.78
$\phi'_{10} - \phi'_0$	0	0	0

**TABEAU 4.13: Obtention de  $\phi'_k(x_i)$  à partir des ELB-CA.**

En interpolant les  $\phi'_k(x_i)$  à l'aide de splines d'ordre 5 et en intégrant ensuite, il est possible de remonter aux déformées modales. Pour le cas présent, les constantes d'intégration sont nulles car les extrémités sont encastées. La figure 4.16 montre les déformées modales théoriques et celles obtenues après intégration, normalisées au maximum.



(a) Déformée modale interpolée du premier mode (b) Déformée modale interpolée du deuxième mode



(c) Déformée modale interpolée du troisième mode

FIGURE 4.16: Trois premières déformées modales de la poutre E-E obtenues par interpolation à partir des ELB-CA.

Les déformées modales théoriques et celles obtenues par intégration numérique à partir des ELB-CA se superposent. Le fait que les signaux numériques ne soient pas bruités permet d'obtenir de bons résultats. Cependant, les méthodes d'interpolation et d'intégration numériques, tout comme celles de dérivation numérique, sont très sujettes aux bruits de mesure. La comparaison entre les déformées modales théoriques et celles obtenues par intégration à partir des ELB-CA serait très certainement moins bonne avec des signaux de mesures expérimentaux donc bruités.

Nous avons proposé une configuration permettant d'obtenir les  $\phi'_k(x_i)$  en chaque borne des ELB-CA mais il en existe des variantes. Trois autres configurations possibles à partir de trois ELB-CA sont présentées sur la figure 4.17. Des combinaisons de ces trois configurations peuvent ensuite être réalisées afin de remonter aux déformées modales.

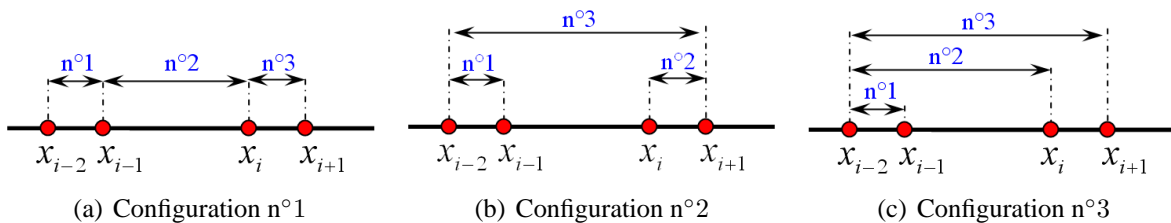


FIGURE 4.17: Configurations d'ELB-CA possibles pour remonter à  $\phi'_k(x_i)$ .

Les informations obtenues à partir des trois ELB-CA pour ces configurations sont :

#### 4.7 Obtention des déformées modales à partir des ELB-CA

- Configuration n°1 : c'est la configuration que nous avons présentée au début du paragraphe.

$$\begin{aligned} \text{ELB-CA n}^\circ 1 + \text{ELB-CA n}^\circ 2 + \text{ELB-CA n}^\circ 3 &\rightarrow \phi'_k(x_{i+1}) - \phi'_k(x_{i-2}) \\ \text{ELB-CA n}^\circ 1 + \text{ELB-CA n}^\circ 2 &\rightarrow \phi'_k(x_i) - \phi'_k(x_{i-2}) \\ \text{ELB-CA n}^\circ 1 &\rightarrow \phi'_k(x_{i-1}) - \phi'_k(x_{i-2}) \end{aligned}$$

Cette configuration donnera des erreurs de détermination d'autant plus importantes que le nombre d'ELB-CA sera important, puisque les erreurs de détermination de chaque capteur s'additionneront.

- Configuration n°2 : pour cette configuration, on obtient

$$\begin{aligned} \text{ELB-CA n}^\circ 3 &\rightarrow \phi'_k(x_{i+1}) - \phi'_k(x_{i-2}) \\ \text{ELB-CA n}^\circ 3 - \text{ELB-CA n}^\circ 2 &\rightarrow \phi'_k(x_i) - \phi'_k(x_{i-2}) \\ \text{ELB-CA n}^\circ 1 &\rightarrow \phi'_k(x_{i-1}) - \phi'_k(x_{i-2}) \end{aligned}$$

Avec cette configuration, les erreurs seront moins importantes que pour la configuration précédente.

- Configuration n°3 : cette configuration donne directement accès, à partir d'un seul ELB-CA, à  $\phi'_k(x_i)$  discrétisés aux bornes des ELB-CA, à une constante additive près. Cette configuration permet donc de minimiser les erreurs faites sur la détermination de  $\phi'_k(x_i)$ .

$$\begin{aligned} \text{ELB-CA n}^\circ 3 &\rightarrow \phi'_k(x_{i+1}) - \phi'_k(x_{i-2}) \\ \text{ELB-CA n}^\circ 2 &\rightarrow \phi'_k(x_i) - \phi'_k(x_{i-2}) \\ \text{ELB-CA n}^\circ 1 &\rightarrow \phi'_k(x_{i-1}) - \phi'_k(x_{i-2}) \end{aligned}$$

La mise en pratique de cette configuration sera tout de même limitée par la longueur maximale de fabrication d'un ELB-CA. Elle ne pourra donc pas s'appliquer sur la totalité des structures de longueur très supérieure à cette longueur maximale mais seulement sur des portions de celle-ci.

La figure 4.18 montre deux configurations ne permettant pas de déterminer les  $\phi'_k(x_i)$  en chaque borne des ELB-CA, ceci car les ELB-CA sont indépendants les uns des autres et ne sont plus liés par une de leurs extrémités comme pour les configurations précédentes.

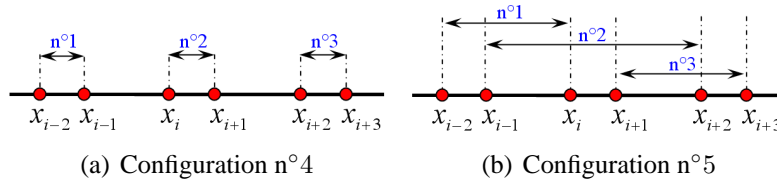


FIGURE 4.18: Configurations d'ELB-CA ne permettant pas de remonter à  $\phi'(x_i)$ .

Pour le cas particulier vu en 4.6.2, où les résultats obtenus pour les vecteurs propres observés par les ELB-CA peuvent être considérés comme «ponctuels», il faudra alors effectuer une double intégration de l'interpolation par splines (opérations là encore sujettes au bruit de mesure) afin de pouvoir remonter aux déformées modales. La figure 4.19 montre la comparaison entre les déformées

modales et angulaires théoriques du premier mode avec celles obtenues par double intégration à partir des données des ELB-CA de la figure 4.13. Les courbes se superposent également.

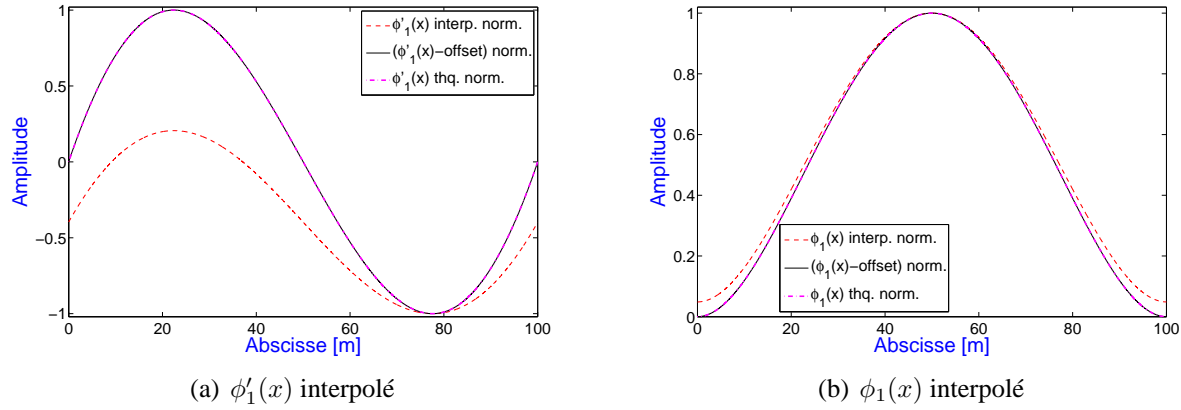


FIGURE 4.19: Interpolation de  $\phi_1(x)$  à partir d'ELB-CA pour la poutre de 100 m.

## 4.8 Confrontation théorie-expérience : analyse modale expérimentale d'une poutre

### 4.8.1 Poutre E-E

Dans cette partie, nous allons réaliser une analyse modale expérimentale sur une poutre E-E dont les dimensions sont les mêmes que celles choisies pour l'exemple numérique (Tab. 4.1). La poutre est instrumentée avec six accéléromètres, trois ELB-CA SMARTape et excitée à l'aide d'un marteau à choc. Les caractéristiques respectives de ces appareils sont répertoriées dans les tableaux 6.6, 2.1 et 6.4. Le positionnement des capteurs est répertorié dans le tableau 4.14 et illustré sur la figure 4.20. La figure 4.21 présente des photos des deux faces de la poutre sur lesquelles sont positionnés les différents capteurs. Les accéléromètres et les ELB-CA sont répartis chacun sur des faces différentes de la poutre.

La poutre étant mince et la masse ajoutée des accéléromètres non négligeable par rapport à celle de la poutre ( $\approx +8\%$ ), ceux-ci sont intrusifs et modifient les fréquences de vibration de la poutre. En les prenant en compte pour le calcul des fréquences propres avec le logiciel EF CosmosWorks, on trouve  $f_1 = 5.45 \text{ Hz}$  et  $f_3 = 29.65 \text{ Hz}$  au lieu de  $5.54 \text{ Hz}$  et  $29.92 \text{ Hz}$ .

Capteur	Dép. Vit. Acc.	ELB-CA	
	$x(m)$	$a(m)$	$b(m)$
$n^\circ 1$	0.243	0.2	0.7
$n^\circ 2$	0.486	0.6	1.1
$n^\circ 3$	0.729	1	1.5
$n^\circ 4$	0.972	-	-
$n^\circ 5$	1.215	-	-
$n^\circ 6$	1.458	-	-

TABEAU 4.14: Placement des ELB-CA et des accéléromètres sur la poutre E-E.

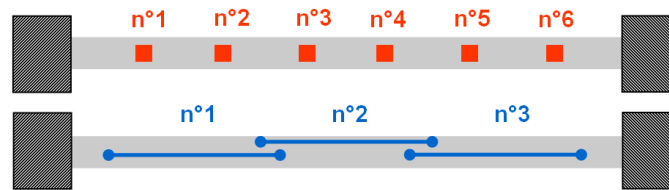
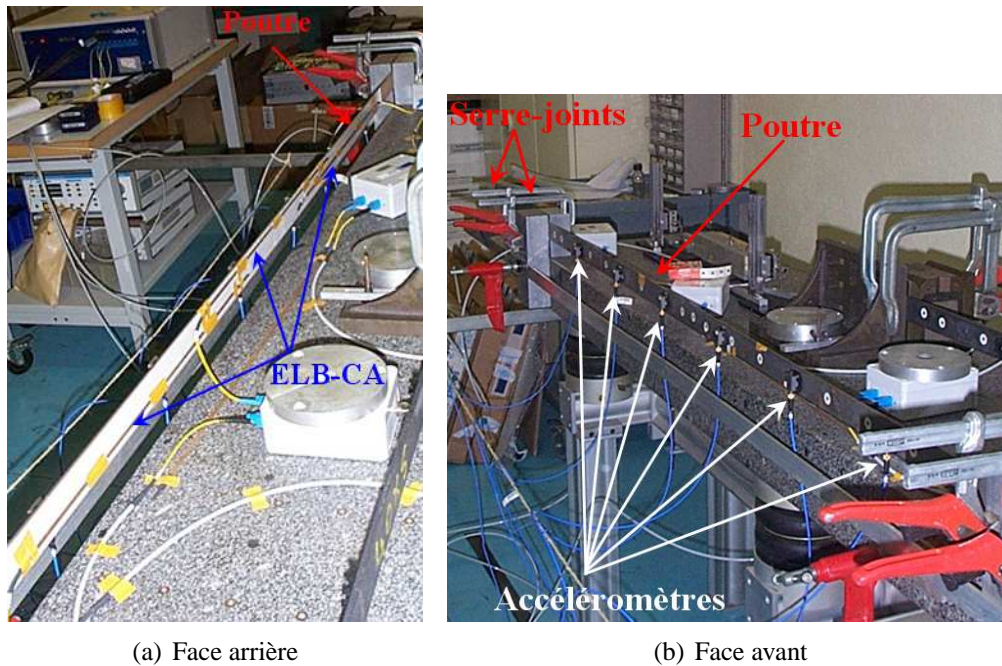


FIGURE 4.20: Placement des capteurs sur la poutre E-E.



(a) Face arrière

(b) Face avant

FIGURE 4.21: Photos de la poutre E-E instrumentée.

Les mesures des ELB-CA sont obtenues à partir de l'appareil de mesure optique SOFO Dynamic Reading Unit, qui possède pour chacune de ses huit voies d'acquisition une sortie BNC. Ces sorties sont ensuite connectées à une carte d'acquisition dSPACE ainsi que les six accéléromètres et le marteau à choc. La carte est pilotée par l'intermédiaire du logiciel Simulink qui permet de synchroniser les mesures avec le signal du marteau, ce qui n'est pas possible avec l'appareil FOGALE. La fréquence d'échantillonnage est prise égale à  $1\text{ kHz}$ .

La figure 4.22 présente les signaux temporels et les TF obtenus avec l'accéléromètre et l'ELB-CA n°1 pour la poutre E-E excitée par un choc d'amplitude égale à  $3\text{ N}$  et appliqué à l'abscisse  $x_0=0.85\text{ m}$ .

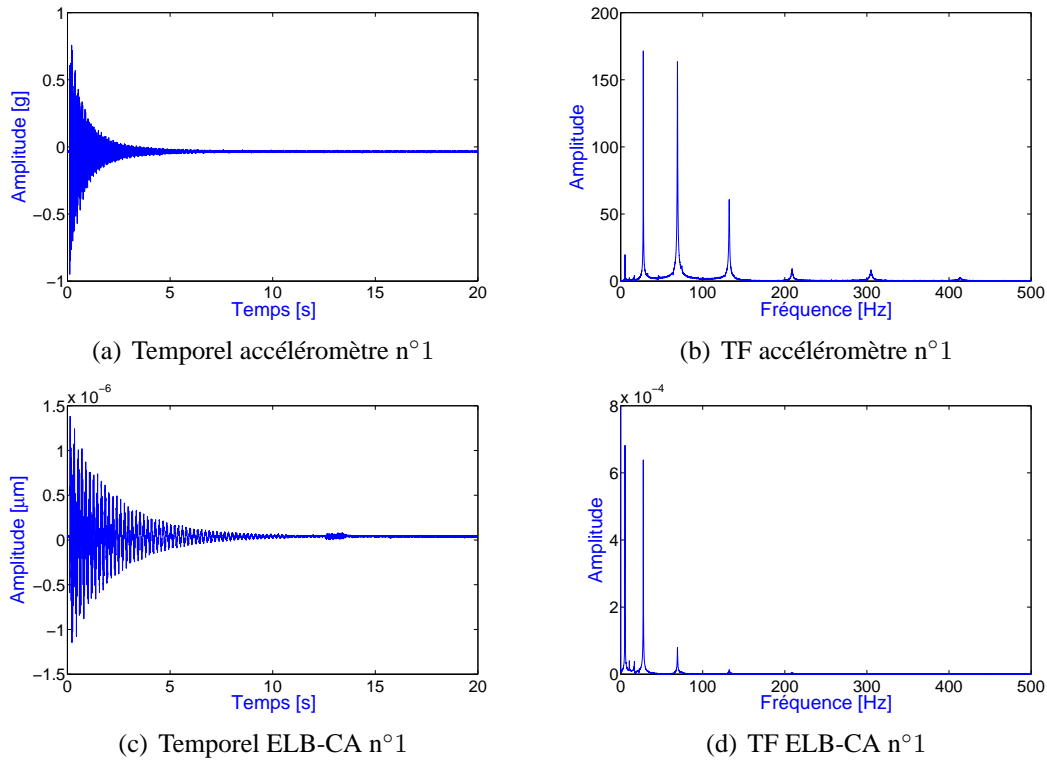


FIGURE 4.22: Signaux temporels et TF correspondantes obtenus pour la poutre E-E à partir de l'accéléromètre et de l'ELB-CA n°1.

Les signaux temporels permettent de montrer le faible niveau de bruit des mesures, aussi bien pour l'accéléromètre que pour l'ELB-CA, et les TF la répartition spectrale des mesures. L'accéléromètre privilégie en général les hautes fréquences cependant, comme les accéléromètres utilisés sont des accéléromètres capacitifs, leur plage de fréquences se limite aux moyennes fréquences tandis que l'ELB-CA va privilégier les basses fréquences comme les capteurs de déplacement. On retrouve bien le fait que le facteur temporel des ELB-CA est identique à celui du déplacement. Par ailleurs, il y a peu de fréquences présentes dans les spectres car, l'excitation étant appliquée au milieu de la poutre, aucun des modes pairs n'est excité.

La réalisation de cette expérience n'avait pas été faite dans ce but, mais dans celui de détecter des non-linéarités géométriques avec les ELB-CA (voir Chapitres 6 et 8). Nous recherchions à obtenir un comportement de la poutre non linéaire avec des chocs d'amplitudes importantes. Cependant, certains essais ont été réalisés avec une amplitude moindre ( $\approx 3 N$ ). Ce sont ces données que nous avons choisi de traiter pour illustrer ce qui a été montré en 4.6. Cinq essais de faible amplitude ont été réalisés et traités. Pour ces essais, l'abscisse du point d'excitation se situe au milieu de la poutre, soit  $x_0=0.85 m$ . Le deuxième mode de la poutre n'est pas excité et nous nous intéresserons donc seulement aux premier et troisième modes.

Les signaux des accéléromètres et des ELB-CA ont été traités à l'aide de la TOC afin d'obtenir les paramètres modaux. Le tableau 4.15 présente les valeurs moyennes et les dispersions des fréquences propres et amortissements modaux des premier et troisième modes obtenus avec les accéléromètres et les ELB-CA pour les cinq essais.

#### 4.8 Confrontation théorie-expérience : analyse modale expérimentale d'une poutre

Capteur	Mode n°1				Mode n°3			
	$f_1$ (Hz)		$\xi_1$ (%)		$f_3$ (Hz)		$\xi_3$ (%)	
	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)
Acc. n°1	5.324	0.29	1.04	4.6	27.63	0.11	0.33	1.4
Acc. n°2	5.324	0.3	1.01	2.3	27.63	0.11	0.33	1.5
Acc. n°3	5.325	0.3	1.00	1.6	27.63	0.11	0.33	1.5
Acc. n°4	5.324	0.3	1.00	1.7	27.63	0.11	0.33	1.8
Acc. n°5	5.324	0.3	1.01	1.7	27.63	0.11	0.33	1.6
Acc. n°6	5.323	0.32	0.97	2.4	27.63	0.11	0.33	1.7
<b>Moy. Acc.</b>	<b>5.324</b>	<b>0.3</b>	<b>1.01</b>	<b>2.38</b>	<b>27.63</b>	<b>0.11</b>	<b>0.33</b>	<b>1.58</b>
ELB n°1	5.323	0.3	1.01	1.3	27.65	0.12	0.33	2.2
ELB n°2	5.319	0.3	0.92	2.5	27.64	0.12	0.34	3
ELB n°3	5.314	0.3	0.87	3.7	27.64	0.12	0.33	3.4
<b>Moy. ELB</b>	<b>5.319</b>	<b>0.3</b>	<b>0.93</b>	<b>2.5</b>	<b>27.64</b>	<b>0.12</b>	<b>0.33</b>	<b>2.87</b>

**TABEAU 4.15: Fréquences et amortissements déterminés avec la TOC à partir des signaux des accéléromètres et des ELB-CA pour la poutre E-E.**

Les résultats sont sensiblement identiques avec les accéléromètres et les ELB-CA pour la détermination des fréquences propres (0.09 % d'écart relatif pour le premier mode et 0.04 % pour le troisième). Pour les amortissements, les écarts sont plus importants (8 % d'écart relatif pour le premier mode et 1 % pour le troisième) mais restent corrects étant donné la sensibilité de la détermination de ce paramètre. Les fréquences théoriques de la poutre E-E recalculées avec la prise en compte du caractère intrusif des accéléromètres ( $f_1 = 5.45$  Hz et  $f_3 = 29.65$  Hz) donnent respectivement comme erreurs pour les fréquences déterminées expérimentalement avec les accéléromètres et les ELB-CA,  $\Delta f_1/f_1 = 2.4\%$  et  $\Delta f_3/f_3 = 6.8\%$ . L'erreur pour la fréquence du premier mode est raisonnable, par contre celle obtenue pour le troisième mode est assez élevée et provient sans doute de la difficulté de réaliser des encastresments parfaits au niveau des CL.

Le tableau 4.16 présente les résultats obtenus pour la détermination des vecteurs propres des premier et troisième modes avec les accéléromètres et les ELB-CA. La figure 4.23 illustre ces résultats. Sur les figures 4.23(b) et 4.23(d), les courbes tracées avec des traits discontinus représentent respectivement les courbures modales  $\phi_1''(x)$  et  $\phi_3''(x)$  pour la poutre E-E.

Capteur	Mode n°1				Mode n°3			
	$\phi_{1exp}$	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)	$\phi_{1th}$	Erreur (%)	$\phi_{3exp}$	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)	$\phi_{3th}$	Erreur (%)
Acc. n°1	0.272	0.85	0.234	16	1	0	1	0
Acc. n°2	0.724	0.21	0.679	6.6	0.839	0.11	0.862	2.7
Acc. n°3	1	0	1	0	-0.802	0.12	-0.821	2.4
Acc. n°4	0.952	0.39	0.999	5	-0.811	0.07	-0.815	0.6
Acc. n°5	0.607	0.45	0.679	10	0.845	0.11	0.867	2.5
Acc. n°6	0.196	1.07	0.234	16	0.999	0.07	0.996	0.3
	$\Phi_{1exp}$	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)	$\Phi_{1th}$	Erreur (%)	$\Phi_{3exp}$	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)	$\Phi_{3th}$	Erreur (%)
ELB n°1	0.273	0.6	0.215	27	0.781	0.1	0.743	5
ELB n°2	1	0	1	0	-1	0	-1	0
ELB n°3	0.089	2.82	0.209	57	0.733	0.2	0.748	2

**TABEAU 4.16: Vecteurs propres déterminés avec la TOC à partir des signaux des accéléromètres et des ELB-CA pour la poutre E-E.**

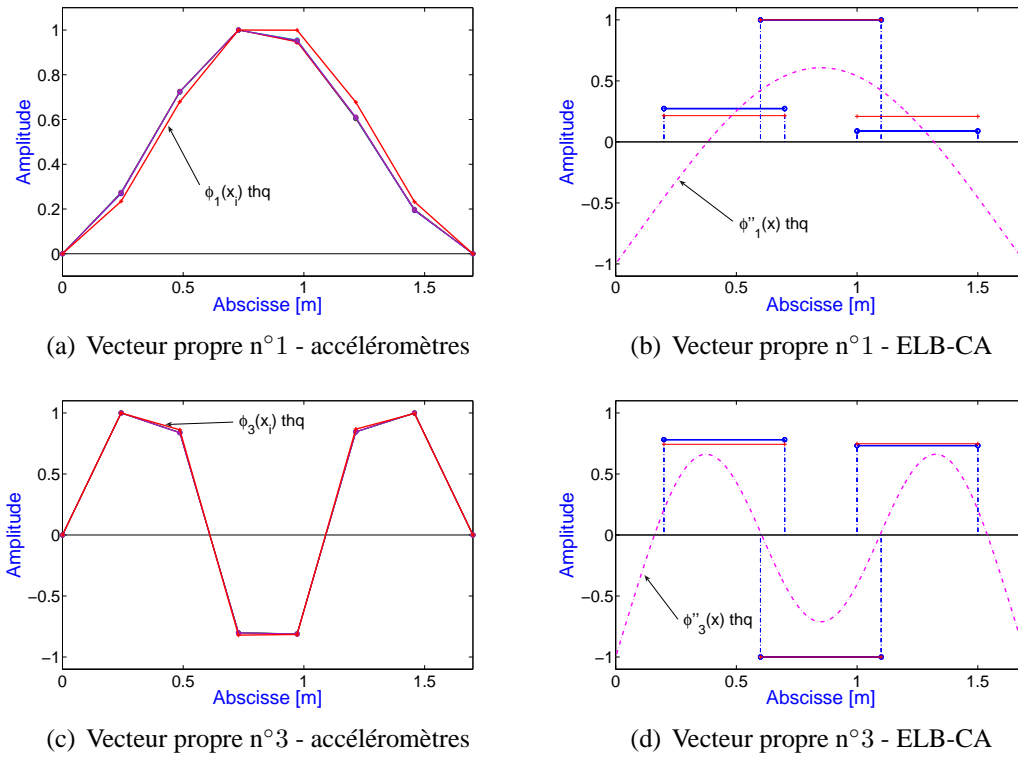


FIGURE 4.23: Vecteurs propres obtenus avec la TOC à partir des signaux des accéléromètres et des ELB-CA.

L'erreur entre le premier mode déterminé expérimentalement et le premier mode théorique est assez importante pour les accéléromètres ( $<16\%$ ) et encore plus pour les ELB-CA ( $\approx 60\%$  pour l'ELB-CA n°3). La déformée modale du premier mode étant différente de la théorie, il en sera de même pour la courbure modale du premier mode. De plus, comme l'ELB-CA réalise une mesure intégrale, l'erreur sera même d'autant plus importante.

En interpolant par splines la déformée modale du premier mode obtenue expérimentalement à partir des accéléromètres, l'allure de  $\phi'_1(x)$  et  $\phi''_1(x)$  peut être déterminée afin de recalculer les valeurs des vecteurs propres théoriques des ELB-CA. La figure 4.24 présente les déformées angulaires et les courbures modales théoriques du premier mode et celles obtenues à partir de l'interpolation de la déformée modale des accéléromètres. Le tableau 4.17 donne la comparaison entre les valeurs recalculées des vecteurs propres théoriques des ELB-CA et celles déterminées expérimentalement.

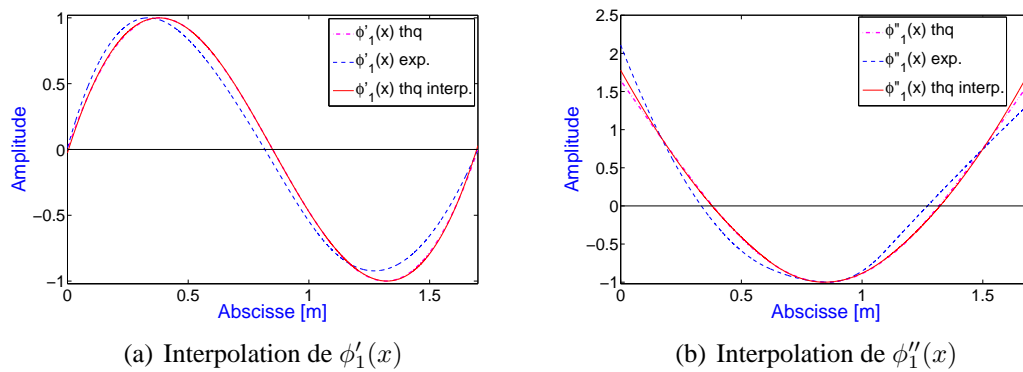


FIGURE 4.24: Interpolation permettant de remonter à  $\phi''_1(x)$ .



#### 4.8 Confrontation théorie-expérience : analyse modale expérimentale d'une poutre

Capteur	Mode n°1			
	$\Phi_{1exp}$	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)	$\Phi_{1th}$	Erreur (%)
ELB n°1	0.273	0.6	0.368	26
ELB n°2	1	0	1	0
ELB n°3	0.089	2.82	0.079	13

**TABEAU 4.17:** Comparaison du premier mode déterminé à l'aide de la TOC à partir des signaux des ELB-CA pour la poutre E-E avec l'interpolation de la déformée modale obtenue à partir des accéléromètres.

Les erreurs entre les valeurs recalées du vecteur propre théorique des ELB-CA et celles déterminées expérimentalement ont fortement diminué mais restent tout de même importantes. Elles peuvent provenir du fait que, pour ce type de CFO (SMARTape), la base de mesure de l'ELB-CA n'est pas connue de manière très précise et que les perturbations évoquées au Chapitre 2 peuvent être assez importantes ici.

En revanche, pour le troisième mode les valeurs obtenues expérimentalement sont plus en accord avec la théorie aussi bien pour les accéléromètres (écart<3%) que pour les ELB-CA (écart<5%).

Au vu des graphes de la figure 4.23, il ne paraît pas très évident de confirmer les résultats de l'analyse modale numérique, à savoir que les vecteurs propres déterminés par les deux types de capteur sont différents. Pour s'en convaincre, nous allons présenter plus brièvement l'analyse modale d'une poutre E-L.

#### 4.8.2 Poutre E-L

La poutre E-L est en plexiglas et ses dimensions sont répertoriées dans le tableau 4.18. Elle est instrumentée avec huit accéléromètres, quatre jauges, trois ELB-CA FOGALE et excitée à l'aide d'un marteau à choc. Les caractéristiques respectives de ces capteurs et du marteau sont répertoriées, au Chapitre 6, dans les tableaux 6.6, 6.7 et 6.4. Le lieu d'excitation de la poutre se situe au niveau de l'extrémité libre de la poutre.

Les jauges étant collées continûment à la surface de la poutre, tout comme l'ELB-CA, nous supposons en première approximation qu'elles permettent également de mesurer la longueur physique  $D_{AB}(t)$  définie en (3.2). A l'indice de réfraction près, elles vont donc permettre de valider la mesure des ELB-CA. Par ailleurs, comme nous le verrons plus tard, le bruit de mesure est beaucoup plus faible pour les jauges que pour les ELB-CA FOGALE.

Le positionnement des différents capteurs est répertorié dans le tableau 4.19 et illustré sur la figure 4.25. La figure 4.26 présente une photo de la poutre avec les différents capteurs. Les accéléromètres et les jauges sont répartis sur la même face de la poutre et les ELB-CA sur l'autre face.

Longueur	Epaisseur	Hauteur	Module d'Young	Densité	Inertie
$L(m)$	$e(m)$	$h(m)$	$E(GPa)$	$\rho(kg \cdot m^{-3})$	$I(m^4)$
1	0.07	0.005	2.4	1200	$7.3 \cdot 10^{-10}$

**TABEAU 4.18:** Caractéristiques de la poutre E-L en plexiglas.

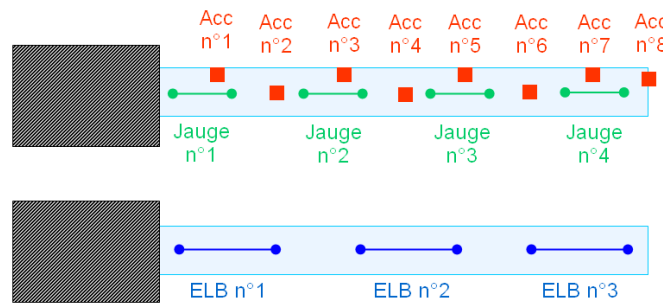


FIGURE 4.25: Placement des capteurs sur la poutre E-L.

Capteur	Accéléromètre	Jauge		ELB-CA	
	$x(m)$	$a(m)$	$b(m)$	$a(m)$	$b(m)$
$n^{\circ}1$	0.125	0.02	0.14	0.05	0.25
$n^{\circ}2$	0.25	0.29	0.41	0.4	0.6
$n^{\circ}3$	0.375	0.56	0.68	0.76	0.96
$n^{\circ}4$	0.5	0.82	0.94	-	-
$n^{\circ}5$	0.625	-	-	-	-
$n^{\circ}6$	0.75	-	-	-	-
$n^{\circ}7$	0.875	-	-	-	-
$n^{\circ}8$	1	-	-	-	-

TABLEAU 4.19: Placement des ELB-CA, des accéléromètres et des jauges sur la poutre E-L.

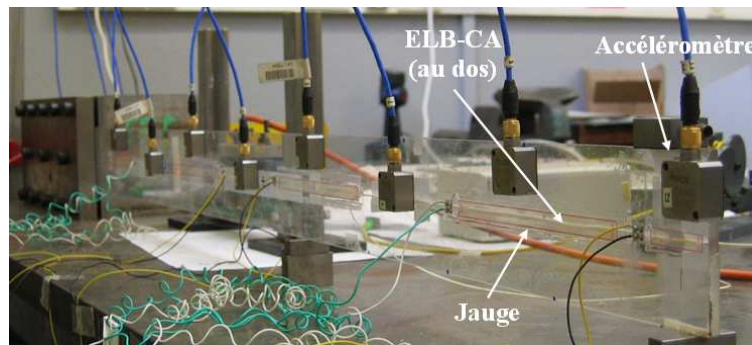
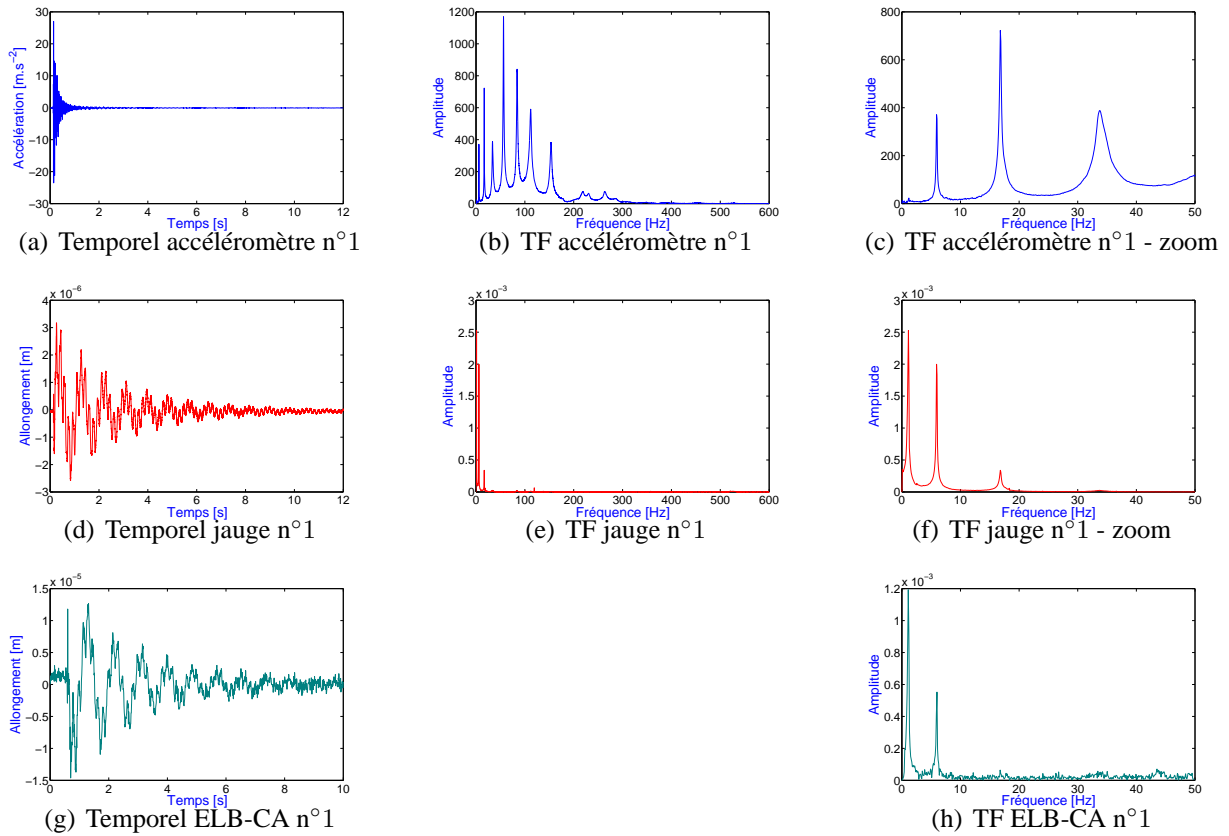


FIGURE 4.26: Photo de la poutre E-L instrumentée.

Les mesures des ELB-CA sont obtenues à partir de l'appareil de mesure optique FOGALE. Les signaux des accéléromètres et des jauges sont directement conditionnés (mesure en demi pont) et numérisés par le système Spider 8 de HBM. Ils sont également synchronisés par rapport au signal du marteau. L'appareil FOGALE ne possédant pas de sortie adéquate, la mesure est déclenchée un peu avant que le coup de marteau ait été donné. La fréquence d'échantillonnage est prise égale à  $1.2\text{ kHz}$  pour l'acquisition des accéléromètres et des jauges. Rappelons que pour l'appareil optique, la fréquence d'échantillonnage est fixe et est égale à  $100\text{ Hz}$ .

La figure 4.22 présente les signaux temporels et les TF obtenus avec l'accéléromètre, la jauge et l'ELB-CA  $n^{\circ}1$  pour la poutre E-L excitée par choc d'amplitude égale à  $3\text{ N}$  et appliqué à l'abscisse  $x_0=0.98\text{ m}$ .



**FIGURE 4.27: Signaux temporels et TF correspondantes obtenus pour la poutre E-L à partir de l'accéléromètre, de la jauge et de l'ELB-CA n°1.**

Les signaux temporels et les TF permettent de montrer que le niveau de bruit est beaucoup plus important au niveau de l'ELB-CA FOGALE. Comme précédemment pour la poutre E-E, l'accéléromètre capacitif va privilégier les moyennes fréquences et la jauge, dont la mesure est similaire à celle d'un ELB-CA, les basses fréquences.

La réalisation de cette expérience a également été faite dans le but de détecter des non-linéarités géométriques avec les ELB-CA. Certains essais de faible amplitude ( $\approx 3 \text{ N}$ ) ont été réalisés et traités pour illustrer ce qui a été montré en 4.6. Pour ces essais, l'abscisse du point d'excitation se situe à l'extrémité libre de la poutre, soit  $x_0 = 0.98 \text{ m}$ . Nous nous intéresserons uniquement aux deux premiers modes de la poutre.

Les signaux des accéléromètres, des jauges et des ELB-CA ont également été traités en utilisant la TOC afin d'obtenir les paramètres modaux. Le tableau 4.20 présente les valeurs moyennes et les dispersions des fréquences propres et amortissements modaux des deux premiers modes obtenus avec les accéléromètres, les jauges et les ELB-CA pour les cinq essais.

Capteur	Mode n°1				Mode n°2			
	$f_1$ (Hz)		$\xi_1$ (%)		$f_2$ (Hz)		$\xi_2$ (%)	
	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)
Acc. n°1	1.132	1.30	6.58	6.0	5.936	0.03	0.76	1.1
Acc. n°2	1.132	1.33	6.56	6.7	5.936	0.03	0.77	0.9
Acc. n°3	1.132	1.28	6.46	6.5	5.936	0.03	0.77	0.9
Acc. n°4	1.134	1.32	5.75	6.2	5.936	0.03	0.77	0.7
Acc. n°5	1.054	1.96	11.68	40.1	5.936	0.04	0.33	0.5
Acc. n°6	1.071	0.81	5.16	5.2	5.936	0.03	0.76	0.8
Acc. n°7	1.072	0.82	5.08	5.5	5.936	0.03	0.76	0.7
Acc. n°8	1.072	0.82	5.10	5.0	5.936	0.04	0.76	0.8
<b>Moy. Acc.</b>	<b>1.100</b>	<b>1.2</b>	<b>6.55</b>	<b>10.15</b>	<b>5.936</b>	<b>0.03</b>	<b>0.76</b>	<b>0.80</b>
Jauge n°1	1.072	0.83	5.05	5.5	5.936	0.04	0.76	0.8
Jauge n°2	1.072	0.83	5.06	5.3	5.937	0.04	0.76	0.7
Jauge n°3	1.072	0.82	5.05	5.3	5.936	0.03	0.76	0.9
Jauge n°4	1.072	0.80	5.01	5.8	5.936	0.03	0.76	0.8
<b>Moy. Jauge</b>	<b>1.072</b>	<b>0.8</b>	<b>5.04</b>	<b>5.46</b>	<b>5.936</b>	<b>0.03</b>	<b>0.76</b>	<b>0.79</b>
ELB n°1	1.083	0.52	5.93	5.6	5.886	0.28	0.77	202
ELB n°2	1.082	0.66	5.60	14.1	5.922	0.67	-0.48	-355
ELB n°3	1.086	0.71	6.15	22.6	5.832	1.73	0.41	296
<b>Moy. ELB</b>	<b>1.083</b>	<b>0.6</b>	<b>5.90</b>	<b>14.1</b>	<b>5.880</b>	<b>0.90</b>	<b>0.24</b>	<b>47.7</b>

**TABEAU 4.20: Fréquences et amortissements déterminés avec la TOC à partir des signaux des accéléromètres, des jauges et des ELB-CA pour la poutre E-L.**

La masse totale de la poutre est de 700 g et un accéléromètre, en prenant en compte une partie du poids du câble, pèse environ 20 g (soit 160 g pour l'ensemble des accéléromètres). Les accéléromètres sont donc très intrusifs puisque la masse de la poutre augmente de presque 23 % avec l'instrumentation. Des essais ont été réalisés avant la mise en place de tous les accéléromètres avec un seul accéléromètre, une jauge et un ELB-CA. Les fréquences alors obtenues étaient en accord avec les fréquences théoriques : 1.09 Hz pour le premier mode (1.14 Hz pour la théorie, soit  $\approx 4$  % d'écart) et 6.94 Hz pour le premier mode (7.16 Hz pour la théorie, soit  $\approx 3$  % d'écart). Après la mise en place de tous les accéléromètres, la deuxième fréquence est passée de 6.94 Hz à 5.92 Hz, soit une variation d'environ 15 %. La fréquence du premier mode n'a pas ou peu varié, par contre l'amortissement est devenu important (de l'ordre de 5-6 %). Cette stabilité de la première fréquence vient peut être d'un effet combiné de l'ajout de masse et de l'amortissement introduit par les fils des accéléromètres.

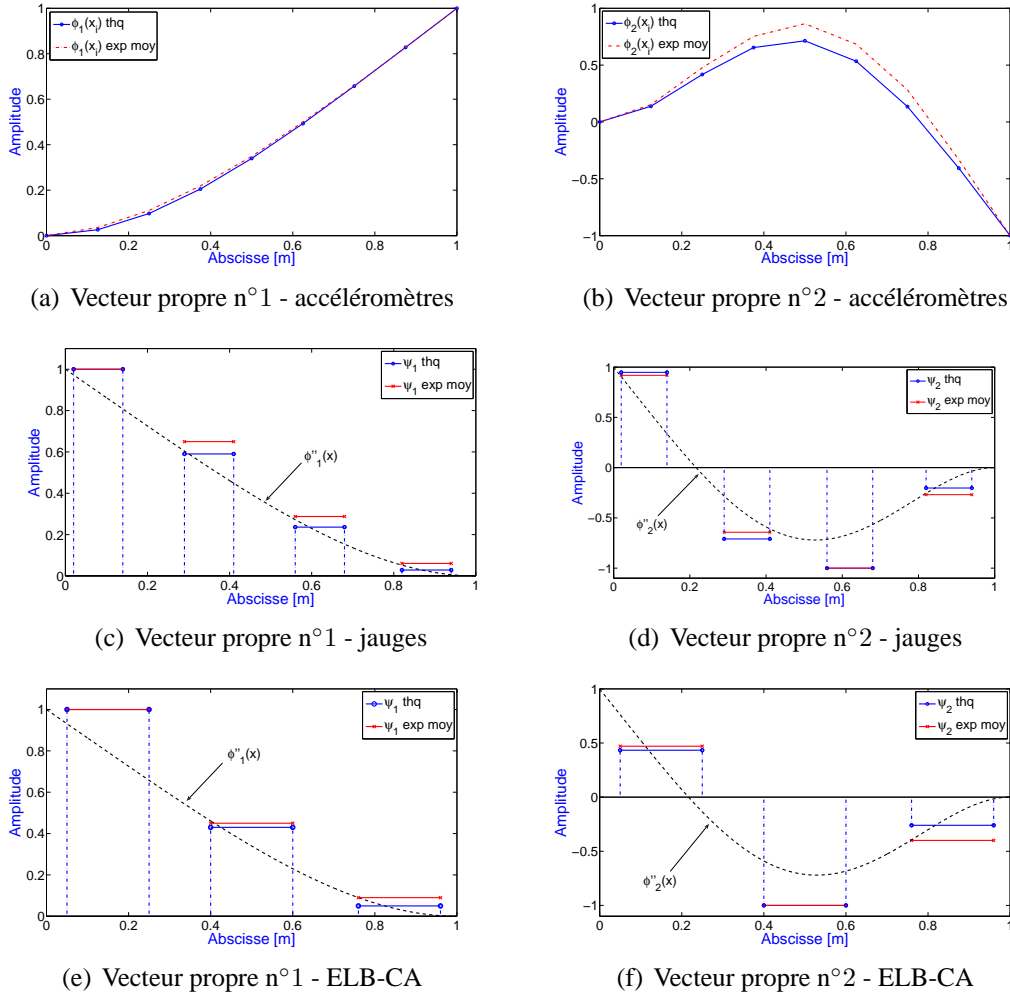
Pour le premier mode, les quatre premiers accéléromètres ne donnent pas les mêmes résultats que les quatre derniers. Les valeurs de dispersion plus élevées pour les fréquences et les amortissements obtenus à partir de ces capteurs laissent penser que l'observabilité est limitée par le fort amortissement du mode (cf Fig. 4.27(c) pour l'accéléromètre n°1).

Au vu des valeurs d'amortissement des deux modes et de la fréquence du deuxième mode obtenues à partir des ELB-CA FOGALE ainsi que de leurs dispersions, il apparaît que la répétabilité est moins bonne pour les ELB-CA FOGALE que pour les accéléromètres et les jauges. En effet, les valeurs de fréquences et d'amortissements obtenues à partir des trois ELB-CA diffèrent et les dispersions au niveau des valeurs d'amortissement sont très importantes comparées à celles obtenues avec les accéléromètres et les jauges, en particulier pour le deuxième mode ( $> 0.28$  % pour les ELB-CA et  $< 0.04$  % pour les accéléromètres et les jauges).

La figure 4.28 illustre les résultats obtenus pour la détermination des vecteurs propres des deux

#### 4.8 Confrontation théorie-expérience : analyse modale expérimentale d'une poutre

premiers modes avec les accéléromètres, les jauges et les ELB-CA. Sur les figures 4.28(c), 4.28(d), 4.28(e) et 4.28(f), les courbes tracées en traits discontinus représentent respectivement les courbures modales  $\phi_1''(x)$  et  $\phi_2''(x)$  pour la poutre E-L.



**FIGURE 4.28: Vecteurs propres obtenus avec la TOC à partir des signaux des accéléromètres, des jauges et des ELB-CA.**

La figure 4.28(a) montre que, comme pour les fréquences, la déformée modale du premier mode propre de la poutre est peu sensible à l'ajout de masse, au contraire du deuxième mode (Fig. 4.28(b)). Pour les vecteurs propres déterminés à partir des jauges et des ELB-CA, l'écart avec la théorie est plus important pour le premier mode. L'ajout de masse a sans doute plus d'influence sur la courbure modale  $\phi_1''(x)$  que sur la déformée modale  $\phi_1(x)$  du fait de la double dérivation spatiale, comme pour la méthode de détection d'endommagements basée sur les courbures modales  $\phi_k''(x)$  que nous évoquerons au Chapitre suivant.

Les valeurs de dispersion obtenues pour les vecteurs propres déterminés à partir des ELB-CA, non répertoriées ici, sont beaucoup plus importantes que pour les accéléromètres et les jauges. Ceci confirme que la mesure des ELB-CA FOGALE, avec la technologie actuelle des capteurs et de l'appareil de mesure, n'est pas de très bonne qualité (mauvaise répétabilité) comparée à celle réalisée par les accéléromètres et les jauges de déformation. Par ailleurs, l'un des miroirs de l'ELB-CA n°3 étant

endommagé et localisé dans une zone proche d'un noeud de vibration des courbures modales  $\phi_k''(x)$ , les résultats obtenus à partir de ce capteur sont moins fiables.

*Pour la poutre E-L, il apparaît clairement au vu des graphes de la figure 4.23 que les vecteurs propres déterminés par les accéléromètres et les capteurs extensométriques (jauge, ELB-CA) sont différents, conformément aux résultats de l'analyse modale numérique.*

## 4.9 Notion de FRF pour les ELB-CA

En analyse modale, un des outils utilisé classiquement dans le domaine fréquentiel est le traitement de Fonctions de Réponse en Fréquences (FRF). On distingue deux familles de méthodes de traitement de FRF pour déterminer les caractéristiques modales : les méthodes locales et les méthodes globales. Les méthodes locales consistent à traiter localement chaque résonance de la FRF, ce qui revient à traiter un petit nombre de points sélectionnés sur l'ensemble mesuré. Les méthodes globales consistent à traiter la réponse en fréquence sur toute la bande de fréquences et ainsi les modes présents dans la bande de fréquences sont traités simultanément.

Dans ce paragraphe, nous allons regarder dans quelle mesure ces méthodes de traitement peuvent être appliquées aux mesures d'ELB-CA.

La FRF, également appelée fonction de transfert, est définie par le rapport de la transformée de Fourier de la réponse stationnaire d'un système linéaire à celle de l'excitation harmonique de pulsation  $\omega$ . Cette FRF est à valeurs complexes. Pour une réponse en déplacement, elle s'écrit :

$$H_{ij}(\omega) = \frac{\hat{u}(x_i, \omega)}{\hat{f}(x_j, \omega)} \quad (4.30)$$

où l'indice  $i$  correspond au degré de liberté (position et direction) de la mesure, notée  $u$ , produite par une force, notée  $f$ , appliquée au degré de liberté repéré par l'indice  $j$ .  $\hat{u}$  et  $\hat{f}$  sont les TF respectives de la mesure et de la force. Le formalisme des fonctions de transfert permet de calculer la réponse dynamique à une excitation quelconque d'une structure dont le comportement est linéaire.

La réponse pour le déplacement transverse de la poutre à un choc suivant  $\vec{j}$  est donnée classiquement par superposition modale [15] :

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \phi_k(x) \quad (4.31)$$

avec  $b_k(t)$  le produit de convolution de la réponse impulsionnelle  $h_k(t)$ , dont l'amortissement est choisi de type Rayleigh, et de la projection  $F_k(t)$  de la force  $f(x, t)$  sur le mode  $k$ .

$$\begin{cases} h_k(t) &= \frac{1}{\rho S \tilde{\omega}_k} \cdot \sin(\tilde{\omega}_k t) \cdot e^{-\xi_k \omega_k t} \\ f(x, t) &= F \cdot \delta_t^{t_0} \cdot \delta_x^{x_j} \\ F_k(t) &= \int_0^L g(x, t) \phi_k(x) dx \end{cases} \quad (4.32)$$

D'après (4.31), la TF du déplacement transverse  $v(x, t)$  s'exprime par

$$\widehat{v}(x, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{b}_k(\omega) \phi_k(x) \quad (4.33)$$

Les propriétés du produit de convolution et les relations définies en (4.32) permettent d'écrire, après calcul

$$\begin{aligned} \widehat{b}_k(\omega) &= \frac{1}{\rho S \tilde{\omega}_k} \cdot \widehat{F}_k(\omega) \cdot \widehat{h}_k(\omega) \\ &= \frac{F}{\rho S} \cdot \frac{\phi_k(x_j)}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2I\xi_k \omega_k \omega} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Comme  $\widehat{f}(x_j, \omega) = F$ , il vient immédiatement pour la fonction de transfert

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{ij}^k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2I\xi_k \omega_k \omega} \quad (4.35)$$

où  $A_{ij}^k = \frac{1}{\rho S} \cdot \phi_k(x_i) \cdot \phi_k(x_j)$  est la constante modale du mode  $k$  relative aux points  $i$  et  $j$ .

Du fait des propriétés de la transformée de Fourier, les FRF des capteurs ponctuels (déplacement, vitesse et accélération) sont liées par les relations suivantes :

$$H_{ij}^{\text{vitesse}}(\omega) = i\omega \cdot H_{ij}^{\text{déplacement}}(\omega) \quad (4.36)$$

$$H_{ij}^{\text{accélération}}(\omega) = i\omega \cdot H_{ij}^{\text{vitesse}}(\omega) \quad (4.37)$$

$$H_{ij}^{\text{accélération}}(\omega) = -\omega^2 \cdot H_{ij}^{\text{déplacement}}(\omega) \quad (4.38)$$

Pour l'ELB-CA, la TF de la mesure définie en (4.14)<sup>2</sup> est

$$\Delta \widehat{D}_{AB}(\omega) = -y \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_j^k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2I\xi_k \omega_k \omega} \quad (4.39)$$

$$\text{où } B_j^k = \frac{F}{\rho S} \cdot \phi_k(x_j) \cdot \int_a^b \phi_k''(x) dx.$$

On comprend bien à partir de cette expression que les principes de réciprocité et de normalisation par rapport à la masse ne s'appliquent plus pour les ELB-CA.

Une des méthodes d'analyse modale les plus répandues suppose qu'un mode de la structure a pu être isolé ou que les modes sont suffisamment découplés pour qu'au voisinage de la fréquence de résonance, la structure se comporte comme un système à un degré de liberté. Les méthodes d'analyse locales reposent donc sur l'hypothèse qu'au voisinage de la résonance étudiée la FRF peut s'écrire

$$H_{ij}^k(\omega) = \frac{A_{ij}^k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2I\xi_k \omega_k \omega} + R_{ij}^k \quad (4.40)$$

où la contribution des autres modes de vibration est représentée par la constante  $R_{ij}^k$ . On retrouve alors la forme de la FRF théorique d'un système à un degré de liberté, translatée dans le plan complexe, et

<sup>2</sup>Ici la réponse n'est pas limitée aux  $N$  premiers modes mais comprend tous les modes.

ayant subi une rotation d'angle égal à la phase de la constante modale. La représentation géométrique de cette approximation locale de la FRF dans le plan de Nyquist est un cercle ou s'en approche suivant le type de FRF : réceptance (déplacement), mobilité (vitesse) et inertance (accélération). Le tableau 4.21 issu de [20] répertorie les équations de  $H$  obtenues dans le plan de Nyquist pour les différents types de FRF.

Type de FRF	Réceptance	Mobilité	Inertance
Expression	$H_{\text{Re}}^2 + \left(H_{\text{Im}} + \frac{1}{2\xi_k\omega}\right)^2 = \frac{1}{4\xi_k^2\omega^2}$	$\left(H_{\text{Re}}^2 - \frac{1}{2\xi_k}\right)^2 + H_{\text{Im}}^2 = \frac{1}{4\xi_k^2}$	$H_{\text{Re}}^2 + \left(H_{\text{Im}} + \frac{\omega}{2\xi_k}\right)^2 = \frac{\omega^2}{4\xi_k^2}$
Forme	Non cercle	Cercle de centre $(\frac{1}{2\xi_k}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2\xi_k}$	Non cercle

**TABEAU 4.21: Expression des FRF (réceptance, mobilité et inertance) dans le plan de Nyquist pour un amortissement de type Rayleigh.**

Etant donné que l'expression (4.39) est identique à un facteur multiplicatif près à celle définie en (4.35) pour le déplacement, l'approximation locale de la FRF obtenue pour l'ELB-CA dans le plan de Nyquist sera donc identique à celle obtenue pour la réceptance.

Les paramètres modaux sont ensuite identifiés à partir d'un lissage (de cercle) des points expérimentaux. Il s'avère souvent préférable de tracer l'inverse de la fonction de transfert  $J = 1/H$ . En effet, lorsque l'on a un cercle pour le tracé de  $H$  dans le plan de Nyquist, le tracé de  $J$  dans le même plan se ramène à une droite dont le lissage est évidemment plus aisé à faire que celui d'un cercle. Le tableau 4.22 issu de [20] répertorie les équations de  $J$  obtenues dans le plan de Nyquist pour les différents types de FRF : raideur dynamique (déplacement), impédance mécanique (vitesse) et masse apparente (accélération). Là encore, l'ELB-CA correspondra au cas du déplacement, c'est-à-dire à la raideur dynamique.

Type de FRF	Raideur dynamique	Impédance mécanique	Masse apparente
Expression	$J_{\text{Re}} = k - \frac{m}{\xi^2} J_{\text{Im}}^2$	$J_{\text{Re}} = c$	$J_{\text{Re}} = m - \frac{k}{\xi^2} J_{\text{Im}}^2$
Forme	Parabole ( $\omega > 0 \rightarrow J_{\text{Im}} > 0$ )	Droite // à l'axe des $J_{\text{Im}}$	Parabole ( $\omega > 0 \rightarrow J_{\text{Im}} < 0$ )

**TABEAU 4.22: Expression de l'inverse des FRF (raideur dynamique, impédance mécanique et masse apparente) dans le plan de Nyquist pour un amortissement de type Rayleigh.**

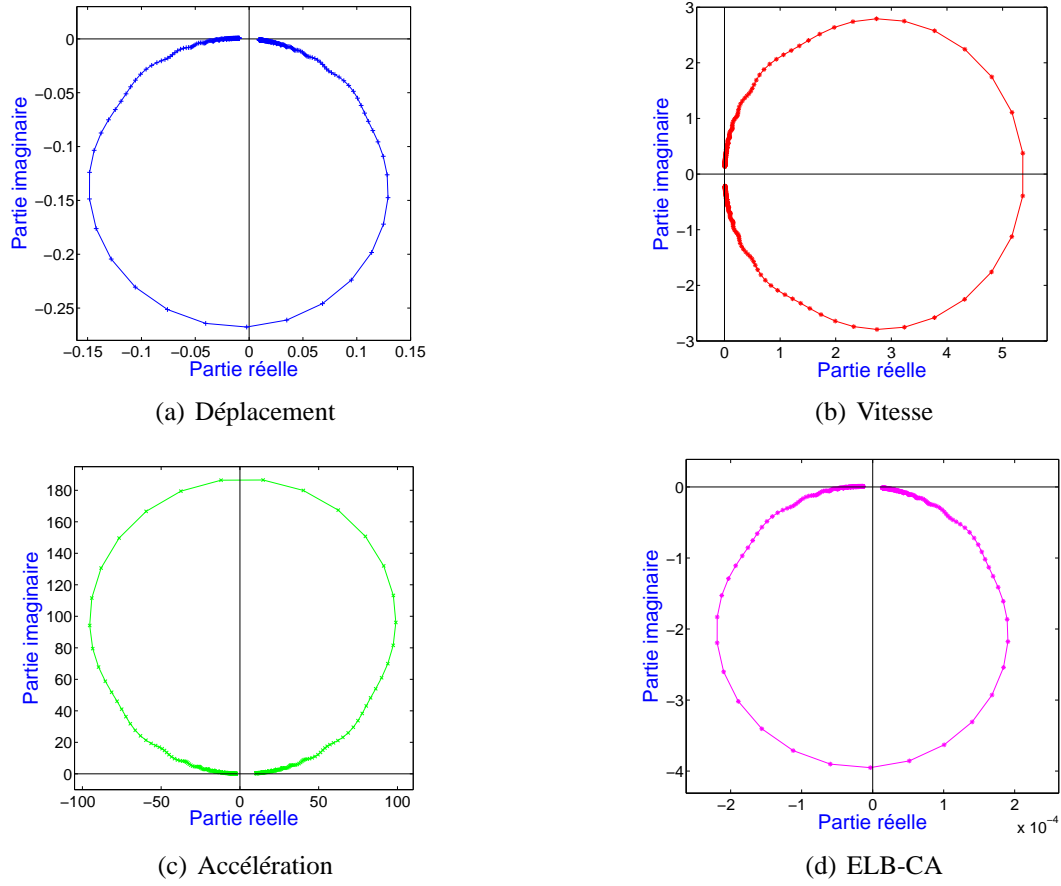
Regardons ce que l'on obtient pour un ELB-CA sur un exemple numérique. Prenons l'exemple de la réponse vibratoire de capteurs ponctuels (déplacement, vitesse et accélération) et d'un ELB-CA situés sur la poutre E-E. Leur placement est répertorié dans le tableau 4.23.

Dép. Vit. Acc.	ELB-CA	
$x(m)$	$a(m)$	$b(m)$
0.76	0.68	0.85

**TABEAU 4.23: Placement de l'ELB-CA et des capteurs ponctuels (déplacement, vitesse et accélération) sur la poutre E-E.**

Sur la figure 4.29, les points de la FRF autour du premier pic de fréquence sont représentés dans le plan complexe pour les différents types de capteur.





**FIGURE 4.29:** Allure du premier mode de la poutre tracé dans le plan complexe et obtenu à partir des FRF des différents types de capteur.

Les graphes de la figure 4.29 montrent que la représentation géométrique, dans le plan des nombres complexes, de l'approximation locale de la FRF est proche d'un cercle pour les capteurs ponctuels mais également pour l'ELB-CA.

Cela peut s'expliquer en développant l'expression (4.14) :

$$\begin{aligned}\Delta D_{AB}(t) &\approx -y \sum_{k=1}^N b_k(t) (\phi'(b) - \phi'(a)) \\ &\approx -y(\gamma(b) - \gamma(a))\end{aligned}\quad (4.41)$$

avec

$$\gamma(x) = \sum_{k=1}^N b_k(t) \phi'(x) \quad (4.42)$$

La mesure de l'ELB-CA est donc la différence de la réponse de deux degrés de liberté angulaires aux emplacements des miroirs du capteur ( $x = a$  et  $x = b$ ), produite par une force, notée  $f$ , appliquée au degré de liberté repéré par l'indice  $k$ .

Pour illustrer ce résultat, les points autour du deuxième pic de fréquence des FRF de l'ELB-CA, de  $\gamma(a)$ ,  $\gamma(b)$  et  $-y(\gamma(b) - \gamma(a))$  sont tracés dans le plan complexe sur la figure 4.31. Nous avons choisi de regarder le deuxième pic car pour le premier la contribution de  $\gamma(b)$  est nulle (Fig. 4.30).

En effet, l'emplacement de la borne supérieure du capteur  $x = b = 0.85 \text{ m}$  est un noeud des modes impairs (Fig. 4.2(b)).

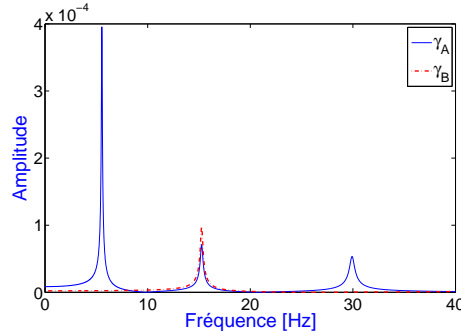


FIGURE 4.30: TF de  $\gamma(a)$  et  $\gamma(b)$ .

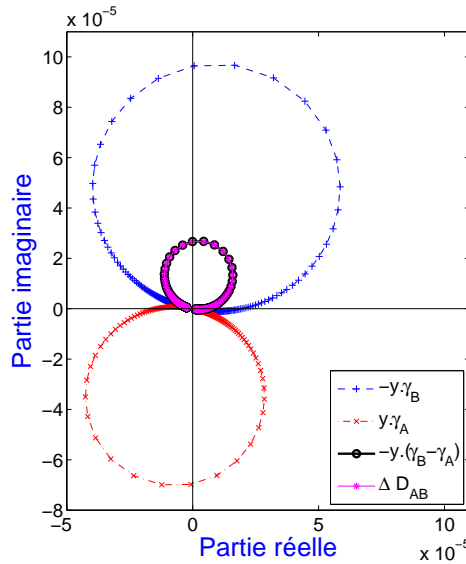


FIGURE 4.31: Allure du deuxième mode de la poutre tracé dans le plan complexe et obtenu à partir des FRF de l'ELB-CA,  $\gamma(a)$ ,  $\gamma(b)$  et  $-y(\gamma(b) - \gamma(a))$ .

Le graphe de la figure 4.31 montre qu'il y a bien coïncidence entre la représentation géométrique locale de la FRF de l'ELB-CA et de la différence  $-y(\gamma(b) - \gamma(a))$ .

*Les méthodes de traitement des FRF permettant de déterminer les caractéristiques modales peuvent donc également être appliquées aux ELB-CA. Ainsi les principes de mesure d'une FRF basés sur ceux des densités spectrales sont applicables. Par contre, les vecteurs propres obtenus ne pourront pas être normalisés par rapport à la masse. En effet, la mesure étant intégrale, il n'y a plus de co-localisation possible entre l'excitation et la mesure.*

Rappelons les deux relations utilisées pour évaluer la fonction de transfert expérimentalement :

$$H_1(\omega) = \frac{G_{fu}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} \quad (4.43)$$

où  $G_{fu}(\omega) = F^*(\omega) \cdot U(\omega)$  et  $G_{ff}(\omega) = F(\omega) \cdot F^*(\omega)$  avec  $*$  : conjugué

$$H_2(\omega) = \frac{G_{uu}(\omega)}{G_{uf}(\omega)} \quad (4.44)$$

où  $G_{uf}(\omega) = U^*(\omega) \cdot F(\omega)$  et  $G_{uu}(\omega) = U(\omega) \cdot U^*(\omega)$

La relation  $H_1$  est choisie pour estimer la fonction de transfert lorsque la source du bruit est principalement localisée au niveau de la mesure de la réponse car l'effet du bruit tend à être éliminé par le calcul de la moyenne. En revanche,  $H_2$  conduit à une meilleure détermination dans le cas où la source de bruit agit principalement au niveau de la mesure de la force. Les densités spectrales,  $G_{uu}(\omega)$ ,  $G_{ff}(\omega)$  (les autospectres) et  $G_{fu}(\omega)$ ,  $G_{uf}(\omega)$  (les interspectres) sont évaluées en fonction des TF des enregistrements de la force, de la mesure et moyennées sur le nombre d'essais.

La fonction de cohérence est définie par :

$$\phi^2(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)} = \frac{|\overline{G_{fu}(\omega)}|^2}{\overline{G_{ff}(\omega)} \cdot \overline{G_{uu}(\omega)}} \quad (4.45)$$

Elle est utilisée pour définir la qualité de la détermination expérimentale de la fonction de transfert.

La figure 4.32 présente les FRF et les fonctions de cohérence obtenues à partir des données des accéléromètres et des ELB-CA pour l'expérience réalisée sur la poutre E-E présentée précédemment en 4.8. Elle permet de montrer le faible niveau de bruit obtenu pour les mesures réalisées à partir des ELB-CA SMARTape et de l'appareil de mesure SMARTEC. Par rapport à la quantité mesurée (la déformation), le niveau de bruit est même plus faible que celui obtenu pour les accéléromètres avec l'accélération. En effet, les FRF sont moins bruitées et les fonctions de cohérence de meilleure qualité pour les ELB-CA SMARTape que pour les accéléromètres. Les mesures n'ayant pas été réalisées dans le but d'effectuer une analyse modale, la qualité des essais réalisés permettant d'obtenir des fonctions de cohérence plus propres n'a pas été prise en compte.

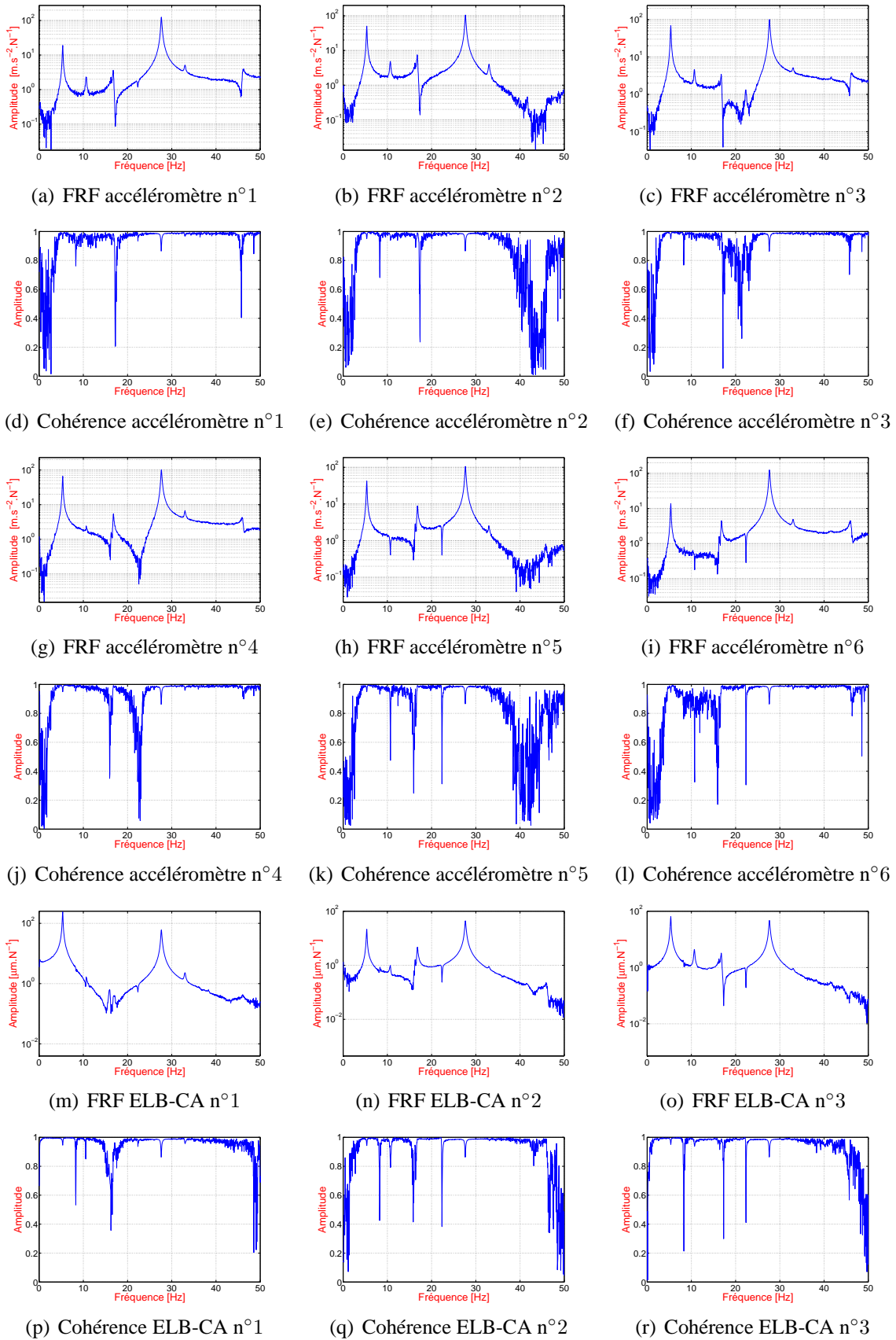


FIGURE 4.32: FRF et fonctions de cohérence obtenues pour la poutre E-E à partir des accéléromètres et des ELB-CA.

## 4.10 Conclusion

Il est ensuite possible de traiter les FRF obtenues à partir des ELB-CA avec divers logiciels d'analyse modale basés sur l'identification de fonctions de transfert comme SDTools ou Modent (ICATS). La figure 4.33 présente un exemple de traitement de la FRF obtenue à partir de l'ELB-CA n°1 avec le logiciel Modent : (a) détermination de la fonction de transfert et (b) lissage de cercle appliqué au troisième mode.

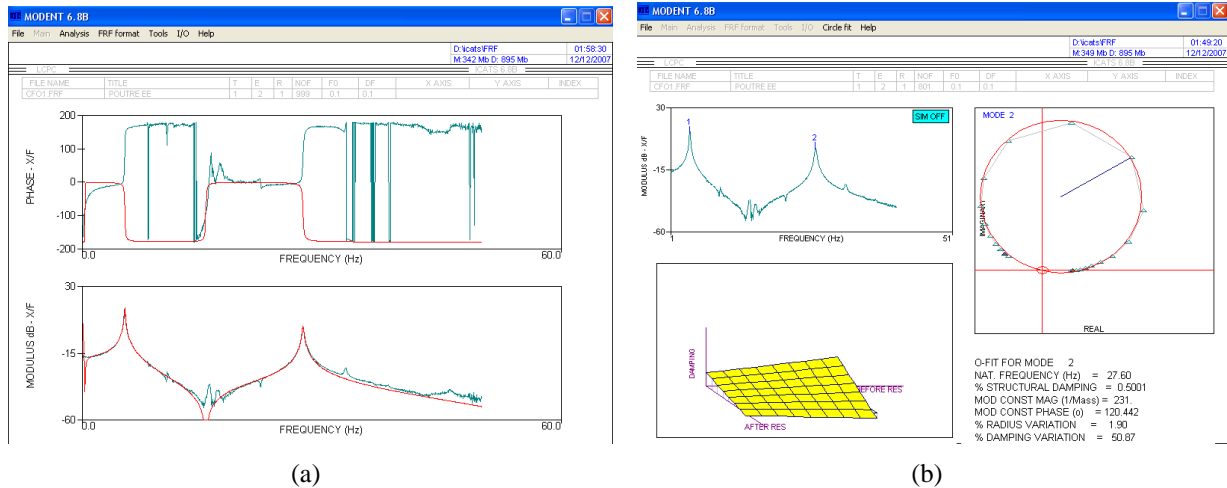


FIGURE 4.33: Exemples de traitement réalisés avec Modent (ICATS) à partir de la FRF de l'ELB-CA n°1.

Cependant, comme nous l'avons mentionné précédemment, le fait que l'ELB-CA possède une base de mesure d'une certaine longueur entraîne la perte de la co-localisation. Ainsi toutes les méthodes reposant sur ce principe ne sont pas applicables aux ELB-CA. Les déformées modales obtenues à partir des ELB-CA sont donc normées par rapport au maximum.

## 4.10 Conclusion

Dans ce Chapitre, les capacités des ELB-CA à réaliser une analyse modale ont été étudiées. Nous avons vérifié que les résultats et conclusions tirés de l'étude de la poutre E-E sont applicables aux autres cas de CL.

Nous avons mis en avant le fait que les vecteurs propres obtenus à partir de la mesure d'ELB-CA ne sont pas les mêmes que ceux obtenus à partir de capteurs ponctuels classiques (déplacement, vitesse et accélération). En effet, ces derniers permettent d'obtenir les déformées modales,  $\phi_k(x)$ , tandis qu'à partir des ELB-CA l'intégrale de la courbure modale entre les bornes du capteur,  $\int_a^b \phi_k''(x) dx$ , est obtenue. Ce résultat a été confirmé par des expériences réalisées avec les deux systèmes de mesure optique présentés au Chapitre 2 : l'appareil SMARTEC sur une poutre E-E et l'appareil FOGALE sur une poutre E-L. D'après ces études expérimentales, il apparaît que le système de mesure SMARTEC réalise, à l'heure actuelle, une mesure beaucoup plus fiable et moins bruitée que celle du système de mesure FOGALE. En ce qui concerne les caractéristiques fréquentielles, la mesure des ELB-CA possède les mêmes caractéristiques qu'une mesure de déplacement, à savoir qu'elle privilégie les basses fréquences contrairement aux accéléromètres, plus sensibles aux hautes ou moyennes fréquences suivant la technologie du capteur (piezoélectrique, capacitif ou inductif).

Les notions de noeuds et de ventres des modes observés par les ELB-CA ont été définies. Elles sont différentes de ce que l'on obtient classiquement pour des capteurs ponctuels et permettent d'envisager des perspectives intéressantes quant au placement optimal des ELB-CA et au filtrage de modes.

Pour le filtrage, nous avons également montré numériquement que les ELB-CA peuvent servir de capteurs modaux si leur forme est proportionnelle à la courbure modale du mode que l'on souhaite observer, l'application visée étant le contrôle de structures.

La notion de FRF est applicable aux ELB-CA, cependant les vecteurs propres observés au niveau des capteurs, dépendant de la base de mesure, entraîne la perte de plusieurs propriétés inhérentes aux FRF définies habituellement pour des capteurs ponctuels : la réciprocité, la co-localisation et la normalisation par rapport à la masse. Par ailleurs, la base de mesure des ELB-CA étant relative à la structure étudiée, elle peut être considérée comme ponctuelle si la longueur du capteur est très petite par rapport à la structure étudiée (une longueur de 50 *cm* pour une structure du génie civil de plusieurs centaines de mètres par exemple). La mesure donnera alors directement la courbure modale et les propriétés des FRF pourront s'appliquer.

Nous avons également montré qu'il est possible de remonter aux déformées modales à partir des ELB-CA. Cependant, les méthodes d'intégration numériques augmentent la dispersion présente au niveau des vecteurs propres. Cette démarche est quelque peu similaire à la méthode de détection de défauts basée sur la courbure modale pour laquelle les déformées modales, obtenues à partir d'accéléromètres, sont dérivées numériquement deux fois afin d'obtenir la courbure modale. Les méthodes de dérivation numérique amplifient également la dispersion présente au niveau des déformées modales. Il est donc préférable d'utiliser le type de capteur permettant d'obtenir directement l'information désirée plutôt que d'utiliser un autre type de capteur qui nécessitera des calculs numériques supplémentaires, sources d'erreurs, pour parvenir à la même information. Ainsi, l'utilisation des ELB-CA (ou tout autre type de capteur extensométrique) sera plus approprié à la détection de défauts par la méthode de la courbure modale que celle d'accéléromètres (ou tout autre type de capteur ponctuel menant aux déformées modales), tandis que ces derniers seront plus adaptés pour obtenir les déformées modales d'une structure.

Dans le Chapitre suivant, nous allons donc présenter une application possible permettant de mettre à profit les particularités de la mesure réalisée par l'ELB-CA : la détection de défaut à partir de la méthode de la courbure modale.

## 4.11 Bibliographie

- [1] Maia N.M.M. et al, *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Research studies press Ltd, 1986.
- [2] Vurpillot S., Krueger G., Benouaich D., Clément D., Inaudi D., *Vertical deflection of a pre-stressed concrete bridge obtained using deformation sensors and inclinometer measurements*, ACI Structural Journal, 95(5)(1998) 518-526.
- [3] Vurpillot S., *Analyse automatisée des systèmes de mesure de déformation pour l'auscultation des structures*, Thèse, EPFL Lausanne, 1999.
- [4] Reynders E., De Roeck G., *Measurement of modal curvature using optical fiber strain sensors and application to damage identification using vibration monitoring*, Proceedings of the 17th International Conference on Optical Fiber Sensors, 2005, p. 1076-1079.
- [5] Zonta D., Pozzi M., Forti M., Zanon P., *Vibration-based condition monitoring of smart prefabricated concrete elements*, Key Engineering Materials, 293-294(2005) 743-750.
- [6] Bourquin F., *Towards Modal Fiber Optical Sensors for Slender Beams*, Proceedings of the 2nd European Workshop on Structural Health Monitoring, Munich, Germany, 2004, p. 1193-1198.

- [7] Sun D.C., Tong L., *Sensor/actuator equations for curved piezoelectric fibers and vibration control of composite beams using fiber modal actuators/sensors*, Journal of Sound and Vibration, 241(2)(2001) 297-314.
- [8] Friswell M.I., *On the design of modal actuators and sensors*, Journal of Sound and Vibration, 241(3)(2001) 361-372.
- [9] Preumont A., *Vibration Control of active structures : an introduction*, Lavoisier, 2002.
- [10] Collet M., *Contrôle actif des structures rayonnantes*, Thèse, Ecole Centrale Lyon, 1996.
- [11] Brahim J., *Contrôle actif de structures flexibles à l'aide de matériaux piezo-électriques : application*, Thèse, Ecole Centrale Lyon, 1999.
- [12] Urquiza J., *Contrôle actif des ouvrages*, Thèse, ENPC, Paris/Marne la Vallée, 2000.
- [13] Ratier L., *Mise en oeuvre de la loi de contrôle de Komornik*, Thèse, ENPC, Paris/Marne la Vallée, 2000.
- [14] Malhis M., *Contrôle actif modal flou des rotors flexibles par plan d'action piezoélectrique*, Thèse, INSA Lyon, 2002.
- [15] Géradin M., Rixen D., *Théorie des vibrations : Application à la dynamique des structures*, Masson, 1996.
- [16] Le T.P., *Auscultation dynamique des structures à l'aide de l'analyse continue en ondelettes*, Thèse, ENPC, Paris/Marne la Vallée, 2003.
- [17] Lardies J., Ta M.N., Berthillier M., *Modal parameter estimation based on the wavelet transform of output data*, Archive of Applied Mechanics, 73(2004) 718-733.
- [18] Le T.P., Argoul P., *Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response*, Journal of Sound and Vibration, 277(2004) 73-100.
- [19] Erlicher S., Argoul P., *Modal identification of linear non-proportionally damped systems by wavelet transform*, Mechanical Systems and Signal Processing, 21(3)(2007) 1386-1421.
- [20] Argoul P., *Identification des structures vibrantes*, Thèse, ENPC, Paris/Marne la Vallée, 1990.
- [21] Calvert S., Conte J.P., Moaveni B., Schulz W.L., de Callafon R., *Real time damage assessment using fiber optic grating sensors*, Proceedings of SPIE, Vol. 5278, 2003.





## Chapitre 5

### Détection de défauts à partir d'ELB-CA : méthode de la courbure modale

---

**C**E CHAPITRE présente une application des ELB-CA, où les caractéristiques de la mesure déterminées au Chapitre 4 permettent d'améliorer les résultats obtenus classiquement avec des accéléromètres : la méthode de détection d'endommagements par la courbure modale.

Des simulations numériques sont réalisées et permettent de comparer les résultats obtenus pour la méthode de la courbure modale à partir de mesure de capteurs ponctuels (capteurs de déplacement, de vitesse ou accéléromètres) et d'ELB-CA. Pour un nombre de capteurs peu élevé, les ELB-CA donnent de meilleurs résultats notamment au niveau de la localisation du défaut. Cela est d'autant plus vrai que, pour les capteurs ponctuels, la détermination de la courbure modale n'est pas directe, comme pour les ELB-CA, mais nécessite une double dérivation numérique. Pour un nombre de capteurs plus élevé, les résultats numériques obtenus pour la détection de l'endommagement à partir d'ELB-CA et de capteurs ponctuels sont similaires. Cependant, les simulations numériques sont réalisées sans ajout de bruit numérique, or il s'avère que l'approximation de la différence finie centrée permettant d'obtenir la courbure modale, à partir des déformées modales issues des capteurs ponctuels, amplifie les erreurs.

L'influence de la normalisation (par rapport à la masse ou au maximum) et de la configuration des ELB-CA sur la détection de l'endommagement est étudiée. La détection est faussée lorsque le défaut se situe au niveau de l'ELB-CA servant à la normalisation du mode. Par ailleurs, pour les configurations continues d'ELB-CA, il s'avère que la détection de différents niveaux d'endommagement est plus précise lorsque la base de mesure est petite.

---

## Plan du Chapitre 5

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>147</b>
<b>5.2</b>	<b>Méthode de la courbure modale</b>	<b>147</b>
5.2.1	Utilisation de capteurs ponctuels « classiques »	149
5.2.2	Utilisation d'ELB-CA	149
<b>5.3</b>	<b>Cas d'application : poutre E-L entaillée</b>	<b>150</b>
5.3.1	Présentation du modèle	150
5.3.2	Modèle EF et endommagements	151
<b>5.4</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>152</b>
5.4.1	Evolution des fréquences propres avec le défaut	152
5.4.2	Evolution des déformées modales avec le défaut	153
5.4.3	Courbure modale obtenue à partir de capteurs ponctuels	156
5.4.4	Intégrale de la courbure modale obtenue à partir des ELB-CA	157
5.4.5	Comparaison ELB-CA/capteurs ponctuels	159
5.4.6	Influence de la normalisation des vecteurs propres	159
5.4.7	Influence de la configuration des ELB-CA	161
<b>5.5</b>	<b>Confrontation théorie-expérience</b>	<b>166</b>
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>168</b>
<b>5.7</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>169</b>

---

### 5.1 Introduction

D'après ce que nous avons montré au Chapitre 4, les ELB-CA présentent un intérêt fort par rapport aux capteurs ponctuels (accéléromètre, capteur de vitesse ou de déplacement) pour les méthodes de détection de défaut basées sur la courbure modale.

Les charges de services, les paramètres environnants et les actions accidentelles peuvent endommager les structures. L'inspection régulière de l'état des structures permet de détecter des défauts éventuels et d'assurer la fiabilité de ces ouvrages. Cependant, pour palier à la subjectivité des inspecteurs et également réaliser des inspections plus fréquentes, les méthodes globales sont attrayantes. Ce besoin de méthodes globales pour l'évaluation quantitative de l'endommagement des ouvrages a conduit au développement et à la recherche de méthodes examinant les changements des caractéristiques vibratoires.

L'idée de base, dans toutes les techniques de détection d'endommagements par essais vibratoires, réside dans l'idée que les paramètres modaux (fréquences propres, amortissements modaux et déformées modales) mesurés s'expriment en fonction des propriétés physiques de la structure (rigidité, masse, amortissement). De ce fait, les modifications pouvant intervenir sur les propriétés physiques ou mécaniques doivent être détectables au travers de changements des paramètres modaux. En général, les effets d'endommagements dans une structure peuvent être classés comme étant linéaire ou non linéaire, suivant le comportement de la structure après endommagement. Nous nous intéressons aux endommagements linéaires pour lesquels la réponse de la structure peut toujours être modélisée en utilisant les équations linéaires du mouvement. Les méthodes linéaires peuvent ensuite être classées en deux catégories suivant qu'elles se basent ou non sur un modèle numérique de la structure étudiée. Les méthodes n'utilisant pas de modèle sont souvent basées sur le changement des paramètres modaux et leurs dérivées ou bien sur le changement de matrices particulières comme celles de flexibilité et de rigidité.

Les avancées technologiques en matériels de mesure et en informatique ont largement contribué aux récentes améliorations dans la détection d'endommagements par analyse vibratoire. L'objectif de ce Chapitre n'est donc pas de faire l'inventaire ni la classification des différentes méthodes de détection d'endommagements déjà réalisés dans de nombreux ouvrages [1][2][3][4][5][6], mais de montrer pour quels types de méthode les caractéristiques de la mesure des ELB-CA permettraient d'améliorer les résultats : les méthodes des courbures modales [7], des courbures de flexibilité [8][9], de l'énergie de déformation<sup>1</sup> [10][11] et toutes les autres méthodes dérivées de ces dernières. En effet, des jauges de déformation ont été utilisées dans [16] pour déterminer directement la courbure modale au lieu d'accéléromètres habituellement employés et une amélioration des résultats obtenus a été constatée.

Dans ce Chapitre, nous nous intéresserons uniquement à la méthode des courbures modales afin d'étudier la potentialité des ELB-CA à améliorer les résultats obtenus avec cette méthode par rapport aux accéléromètres (ou capteurs ponctuels) utilisés classiquement.

### 5.2 Méthode de la courbure modale

Plutôt que d'utiliser les déformées modales directement pour obtenir des informations sur la source des changements vibratoires, une autre façon est d'étudier leurs dérivées. Il y a en effet une

---

<sup>1</sup>La méthode de l'énergie de déformation est également appelée méthode de l'indice d'endommagement.

relation directe entre les courbures modales et les déformations de flexion.

Dans [7], il a été mis en évidence que le changement absolu des courbures modales peut être un bon indicateur d'endommagement pour un modèle EF. En utilisant un schéma aux différences finies centrées, les valeurs de la courbure peuvent être calculées à partir des déformées modales.

En formulant le problème classique aux valeurs propres de la dynamique, il est supposé [7] que les endommagements structuraux affectent seulement la matrice de rigidité, mais pas la matrice de masse. Pour le cas non endommagé, le problème aux valeurs propres s'écrit :

$$([K] - \lambda_k [M]) \{\phi_k\} = \{0\} \quad (5.1)$$

où  $[K]$  et  $[M]$  sont respectivement les matrices de rigidité et de masse,  $\lambda_k$  la  $k^{\text{ème}}$  valeur propre et  $\{\phi_k\}$  le  $k^{\text{ème}}$  vecteur propre.

Identiquement, l'équation aux valeurs propres pour le cas endommagé est donnée par :

$$([K^*] - \lambda_k^* [M]) \{\phi_k^*\} = \{0\} \quad (5.2)$$

Les astérisques indiquent les termes modifiés par l'endommagement.

Les vecteurs propres obtenus pour les cas endommagé et non endommagé sont normalisés par rapport à la masse :

$$\{\phi_k\}^T [M] \{\phi_k\} = 1 \quad (5.3)$$

L'existence d'un endommagement dans une structure diminue la rigidité  $EI$  de la partie fissurée. Considérons une section de la poutre d'abscisse  $x$  soumise au moment de flexion  $\mathcal{M}(x)$ . La courbure en ce point,  $v''(x)$  pour le cas linéaire, s'écrit :

$$v''(x) = \frac{\mathcal{M}(x)}{EI} \quad (5.4)$$

où  $E$  est le module d'Young et  $I$  le moment d'inertie de la section. La diminution de  $EI$  mène à l'augmentation de la courbure  $v''$  dans la section. Comme les changements de courbure sont locaux et qu'ils dépendent du taux de réduction de la rigidité  $EI$ , le changement de courbure peut être utilisé pour la détection et la localisation des endommagements.

La différence absolue des courbures modales des états endommagé et non endommagé doit être maximale dans la région de l'endommagement. Plus la réduction de la rigidité en flexion est grande (correspondant à un niveau d'endommagement plus élevé), plus le changement de courbure sera important. Dans le cas où plusieurs déformées modales sont utilisées, les valeurs absolues du changement de courbure de chaque mode peuvent être additionnées pour fournir un paramètre unique [12] :

$$I_C(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\phi_k''(x_i) - \phi_k^{1''}(x_i)| \quad (5.5)$$

où l'indice 1 désigne l'état non endommagé (état de référence) et  $N$  le nombre de modes utilisés.

### 5.2.1 Utilisation de capteurs ponctuels « classiques »

Nous avons montré au Chapitre 4 en 4.2.1 que les capteurs ponctuels (accéléromètres, capteurs de vitesse et de déplacement) permettaient de remonter aux déformées modales de la poutre  $\phi_k(x_i)$  et la courbure, qui dans le cas linéaire est égale à  $v''(x, t)$ , aux courbures modales  $\phi_k''(x_i)$  (4.13).

Ainsi, pour remonter aux courbures modales à partir des déformées modales déterminées avec des capteurs ponctuels, il faut effectuer une double dérivation spatiale. La formule de la différence finie centrée est généralement utilisée [7][12] :

$$\phi_k''(x_i) \approx \frac{\phi_k^{i+1} - 2\phi_k^i + \phi_k^{i-1}}{p^2} \quad (5.6)$$

$i$  étant l'indice du point considéré et  $p$  le pas constant entre deux points de mesure.

L'erreur introduite par cette approximation de la courbure modale dépend du carré du pas de mesure. Expérimentalement, la déformée modale est généralement déterminée pour un nombre réduit de points de mesure. Or si le pas  $p$  est trop important, c'est-à-dire si le nombre de capteurs est insuffisant, le calcul de la différence finie centrée introduit une erreur importante sur la valeur de la courbure modale obtenue. A cela, il faut également ajouter les erreurs de dispersion sur la détermination de la déformée modale qui seront amplifiées par le calcul de l'approximation de la courbure. L'utilisation de cette approximation est donc limitée. Une technique consiste alors à lisser les valeurs de la déformée modale par des polynômes afin de filtrer les erreurs de dispersion. La justification du choix des paramètres du polynôme de lissage, ordre du polynôme et nombre de points, n'est généralement pas donnée. Par exemple, pour un lissage à l'aide d'un polynôme optimal de degré 2 construit avec 5 points de mesure, il faut appliquer l'expression suivante [18] :

$$\phi_k(x_i) = \frac{1}{35}(-3\phi_k^{i-2} + 12\phi_k^{i-1} + 17\phi_k^i + 12\phi_k^{i+1} - 3\phi_k^{i+2}) \quad (5.7)$$

Les expressions (5.6) et (5.7) mettent en évidence que les valeurs de courbure modale ne seront pas déterminées aux bords. En effet, suivant le nombre de points choisis pour le lissage polynômial, des points aux bords sont perdus. Dans notre exemple, avec un polynôme construit sur cinq points, deux points sont perdus au niveau de chaque extrémité soit quatre points au total. L'application de la différence finie centrée fait perdre deux points supplémentaires. Au final, six points de mesures sont perdus pour la détermination de la courbure modale. On voit donc que la procédure d'obtention des courbures modales ne permettra pas de détecter des défauts aux bords de la structure étudiée.

Des études permettant de déterminer le nombre de capteurs optimal pour la détection d'endommagements par les méthodes des courbures modales et de l'énergie de déformation ont été réalisées [15]. Le nombre de capteurs optimal est déterminé en minimisant les erreurs de mesure et de troncature pour le calcul de la courbure modale.

### 5.2.2 Utilisation d'ELB-CA

Des CFO de type Bragg, modifiés afin d'augmenter leur base de mesure, ont également servis dans [17] pour la détection d'endommagements à partir de la méthode des courbures modales. Les résultats semblent montrer que les CFO sont plus sensibles aux défauts que les accéléromètres.

Les ELB-CA permettant d'obtenir une mesure similaire à celle des jauges de déformation et des CFO à réseaux de Bragg, avec cependant des bases de mesure plus importantes que les jauges, nous

allons nous intéresser à leur utilisation pour la méthode des courbures modales et notamment à l'influence de la base de mesure sur la détection d'endommagements. Pour le cas linéaire (petites déformations et petites rotations), nous avons montré au Chapitre 4 en 4.2.2 qu'un ELB-CA permettait d'obtenir comme mesure l'intégrale de la courbure  $v''(x, t)$  et de remonter directement, à un facteur multiplicatif près égal à l'inverse de la longueur du capteur ( $1/(b-a)$ ), à la courbure moyenne modale définie en (4.15) :

$$\Phi_k = \int_a^b \phi_k''(x) dx$$

L'objectif de l'étude numérique réalisée dans la suite est de comparer les résultats obtenus avec les courbures modales  $\phi_k''(x)$ , déterminées à partir des capteurs ponctuels (5.6), et les vecteurs propres  $\Phi_k$  issus des ELB-CA pour différents cas d'endommagements.

### 5.3 Cas d'application : poutre E-L entaillée

#### 5.3.1 Présentation du modèle

Le cas d'application choisi est celui d'une poutre E-L dont le schéma est représenté sur la figure 5.1. Nous avons choisi cette application car, le démonstrateur étant déjà réalisé, la validation expérimentale était plus simple à mettre en oeuvre. Les caractéristiques de la poutre sont rappelées dans le tableau 5.1. La réalisation de l'encastrement, le choix des dimensions et du matériau du démonstrateur sont expliqués au Chapitre 6.

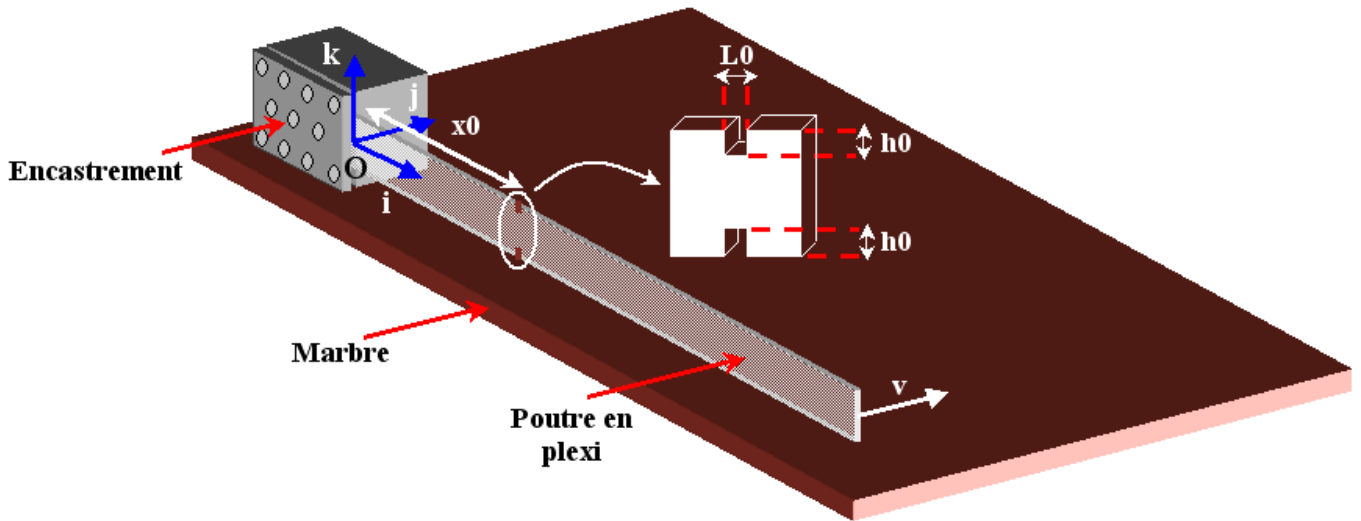


FIGURE 5.1: Schéma de la poutre E-L entaillée.

Longueur	Epaisseur	Hauteur	Module d'Young	Densité	Inertie
$L(m)$	$e(m)$	$h(m)$	$E(GPa)$	$\rho(kg \cdot m^{-3})$	$I(m^4)$
1	0.07	0.005	2.4	1200	$7.3 \cdot 10^{-10}$

TABLEAU 5.1: Caractéristiques de la poutre.

La fréquence d'échantillonnage de l'appareil de mesure optique FOGALE utilisé pour ce démonstrateur étant limitée à  $50Hz$ , les trois premières fréquences propres de la poutre E-L pourront

### 5.3 Cas d'application : poutre E-L entaillée

être observées :  $f_1 = 1.14Hz$ ,  $f_2 = 7.16Hz$  et  $f_3 = 20.04Hz$ . La figure 5.2 présente les déformées et courbures modales théoriques des trois premiers modes pour la poutre E-L, ainsi que lieu de l'endommagement choisi.

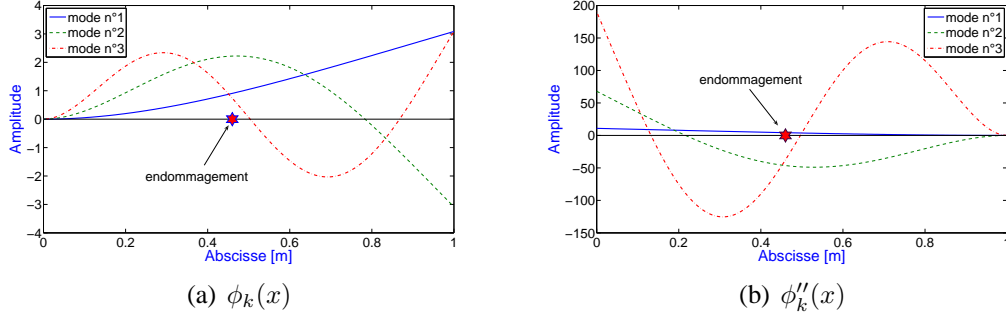


FIGURE 5.2: Trois premières déformées et courbures modales théoriques pour la poutre E-L.

#### 5.3.2 Modèle EF et endommagements

Un modèle EF de la poutre E-L est réalisé à l'aide de la toolbox SDTools sous *Matlab*. La poutre est discrétisée avec des éléments de poutre de type Euler-Bernoulli. Le pas du maillage est choisi égal à  $10^{-2}m$ , la poutre est alors discrétisée par 100 éléments et le modèle comprend donc 101 noeuds.

Nous avons choisi de modéliser le défaut par une modification de la section  $S$  d'un élément. Dans notre étude, le défaut sera alors une réduction de section locale représentant une entaille qui serait appliquée symétriquement de part et d'autre de l'axe neutre. Cette réduction de section va entraîner une perte d'inertie ( $I$ ) locale au niveau de la poutre et donc une perte de rigidité ( $EI$ ) locale. Deux possibilités sont envisageables pour réduire la section (Fig. 5.3).

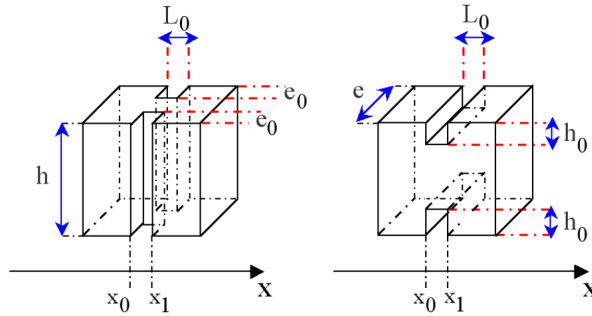


FIGURE 5.3: Réductions de section possibles : entailles sur l'épaisseur (à gauche) ou sur la hauteur (à droite).

Une première simulation a été réalisée en réduisant la section sur l'épaisseur (Fig. 5.3, à gauche), cependant ce type de défaut étant déjà identifiable en étudiant les variations des fréquences propres et des déformées modales de la poutre par rapport à l'état de référence, il n'y avait alors plus grand intérêt à utiliser la méthode des courbures modales. La modélisation du défaut qui a donc été choisie est une réduction de section sur la hauteur (Fig. 5.3, à droite). Dans notre étude, la taille du défaut ainsi que son emplacement ont été choisis arbitrairement : **la taille du défaut est égal à  $1cm$  ( $= 1$  élément poutre), soit  $1/100$  de la longueur totale de la poutre, et il est situé entre les abscisses  $x_0 = 0.455cm$  et  $x_1 = 0.465cm$ .**

En 5.4, nous présenterons les résultats numériques obtenus pour la méthode de la courbure modale pour dix cas d'endommagements, c'est-à-dire dix profondeurs d'entaille différentes, le cas n°1 étant l'état de référence non endommagé. Les dix cas d'endommagements sont répertoriés dans le tableau 5.2.

Cas	Profondeur entaille	Hauteur	Inertie	Raideur	Variation de raideur locale
	$h_0(m)$	$h(m)$	$I(m^4)$	$EI(GPa.m^4)$	$\Delta EI(\%)$
1	0	0.07	$7.3 \cdot 10^{-10}$	1.75	0
2	0.001	0.068	$7.1 \cdot 10^{-10}$	1.7	2.8
3	0.002	0.066	$6.9 \cdot 10^{-10}$	1.65	5.7
4	0.003	0.064	$6.7 \cdot 10^{-10}$	1.6	8.6
5	0.004	0.062	$6.5 \cdot 10^{-10}$	1.55	11.4
6	0.005	0.060	$6.3 \cdot 10^{-10}$	1.5	14.3
7	0.006	0.058	$6.0 \cdot 10^{-10}$	1.45	17.1
8	0.007	0.056	$5.8 \cdot 10^{-10}$	1.4	20
9	0.008	0.054	$5.6 \cdot 10^{-10}$	1.35	22.9
10	0.009	0.052	$5.4 \cdot 10^{-10}$	1.3	25.7

TABLEAU 5.2: Différents cas d'endommagement pour la poutre E-L.

## 5.4 Simulations numériques

Les déformées modales et fréquences propres de la poutre sont obtenues avec la toolbox SDTools à partir de la résolution du problème aux valeurs propres du modèle EF :

$$-[M] \{\phi_k\} \omega_k^2 + [K] \{\phi_k\} = \{0\} \quad (5.8)$$

Les déplacements modaux obtenus ne sont pas bruités (pas d'ajout de bruit numérique). Le calcul de la courbure modale pour les capteurs ponctuels est alors réalisé à partir des déformées modales issues de SDTools,  $\phi_k(x_i)$  ( $x_i$  représentant l'abscisse du  $i^{\text{ème}}$  noeud ou capteur), et en appliquant directement l'équation (5.6) sans filtrage polynômial préalable.

Pour les ELB-CA, afin d'obtenir  $\Phi^k$  de manière suffisamment précise, la discrétisation des points a été augmentée (interpolation par splines) au voisinage des abscisses  $a$  et  $b$ , permettant ainsi d'améliorer la précision du calcul numérique des dérivées premières des déformées modales. Le pas  $p$  de cette discrétisation a été choisi égal à  $10^{-6} m$ .

### 5.4.1 Evolution des fréquences propres avec le défaut

L'évolution des trois premières fréquences propres de la poutre E-L en fonction des cas d'endommagement a été tracée sur la figure 5.4 et les valeurs minimales et maximales obtenues sont répertoriées dans le tableau 5.3.



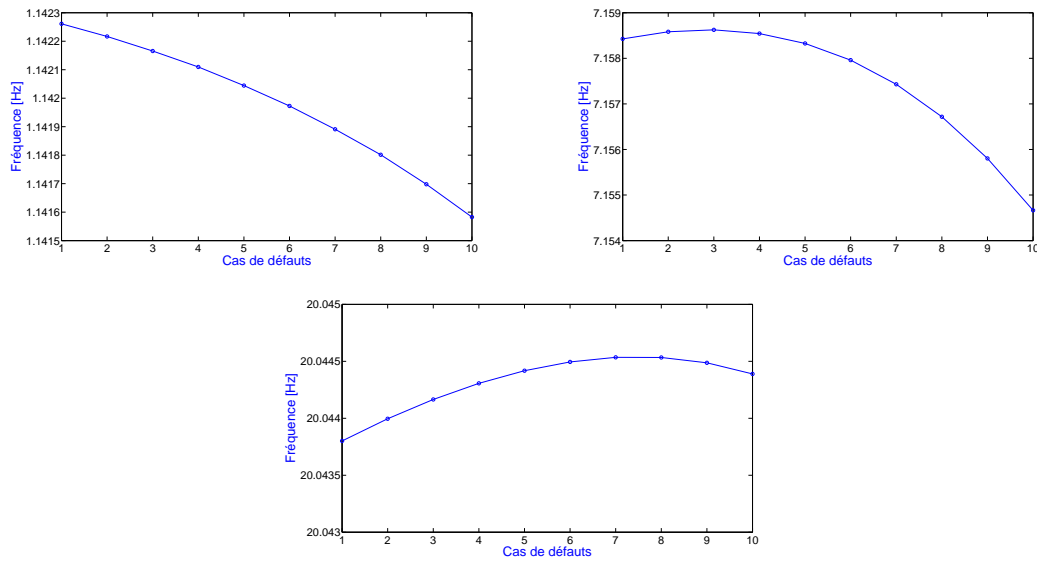


FIGURE 5.4: Evolution des trois premières fréquences en fonction des cas d'endommagement.

Mode	Min (Hz)	Max (Hz)	Variation (Hz)
1	1.1416	1.1423	$7 \cdot 10^{-4}$
2	7.155	7.159	0.004
3	20.044	20.045	$7 \cdot 10^{-4}$

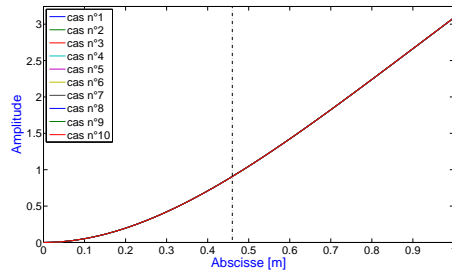
TABLEAU 5.3: Fréquences min. et max. des trois premiers modes.

Les variations des trois premières fréquences propres de la poutre sont très faibles comme souhaité. En effet, d'un point de vue expérimental, ces variations de fréquences seraient complètement noyées dans la dispersion des fréquences propres et donc indécélables. Ainsi, nous allons pouvoir tester la méthode des coubures modales pour détecter le défaut.

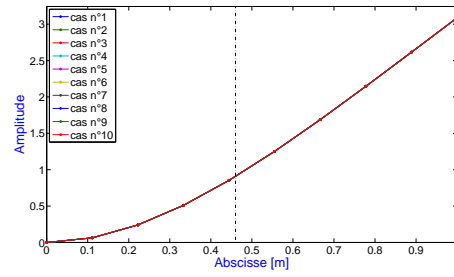
### 5.4.2 Evolution des déformées modales avec le défaut

Pour l'étude des déformées modales, deux configurations sont présentées. La première, où la poutre serait couverte de capteurs ponctuels, est peu réaliste. Cette configuration est simulée en supposant que chacun des cent noeuds du maillage correspond à un capteur. Le pas  $p$  pour le calcul de l'approximation de la courbure (5.6) est alors égal à  $0.0101 \text{ m}$ . La deuxième configuration est plus réaliste avec seulement dix capteurs instrumentés sur la poutre. Le pas  $p$  vaut alors  $0.1 \text{ m}$  et les abscisses des dix capteurs sont donc :  $0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  et  $1 \text{ m}$ . Ces abscisses ne faisant pas partie des noeuds déjà existants, les valeurs des déformées modales en ces points ont été obtenues par interpolation par splines (fonction *interp1* de *Matlab*).

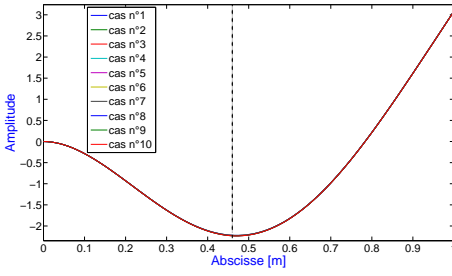
La figure 5.5 présente les déformées modales obtenues pour les dix cas d'endommagements avec les deux configurations de capteurs ponctuels. Le trait vertical en pointillé représente l'emplacement du défaut.



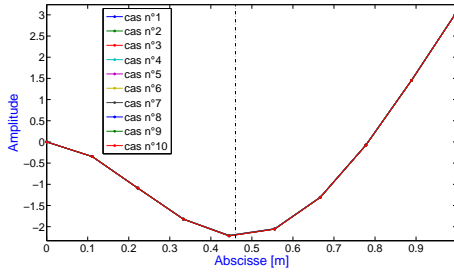
(a) Mode n°1 - 100 capteurs équidistants



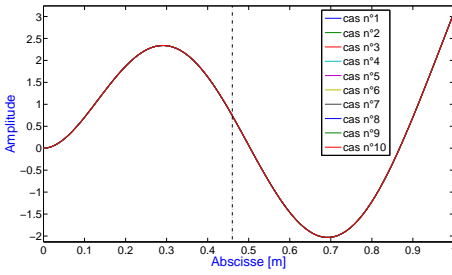
(b) Mode n°1 - 10 capteurs équidistants



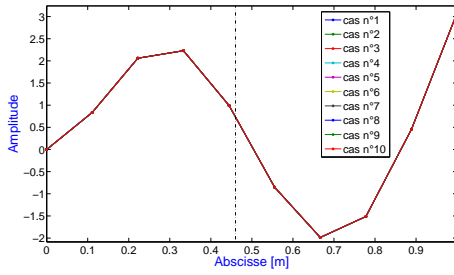
(c) Mode n°2 - 100 capteurs équidistants



(d) Mode n°2 - 10 capteurs équidistants



(e) Mode n°3 - 100 capteurs équidistants



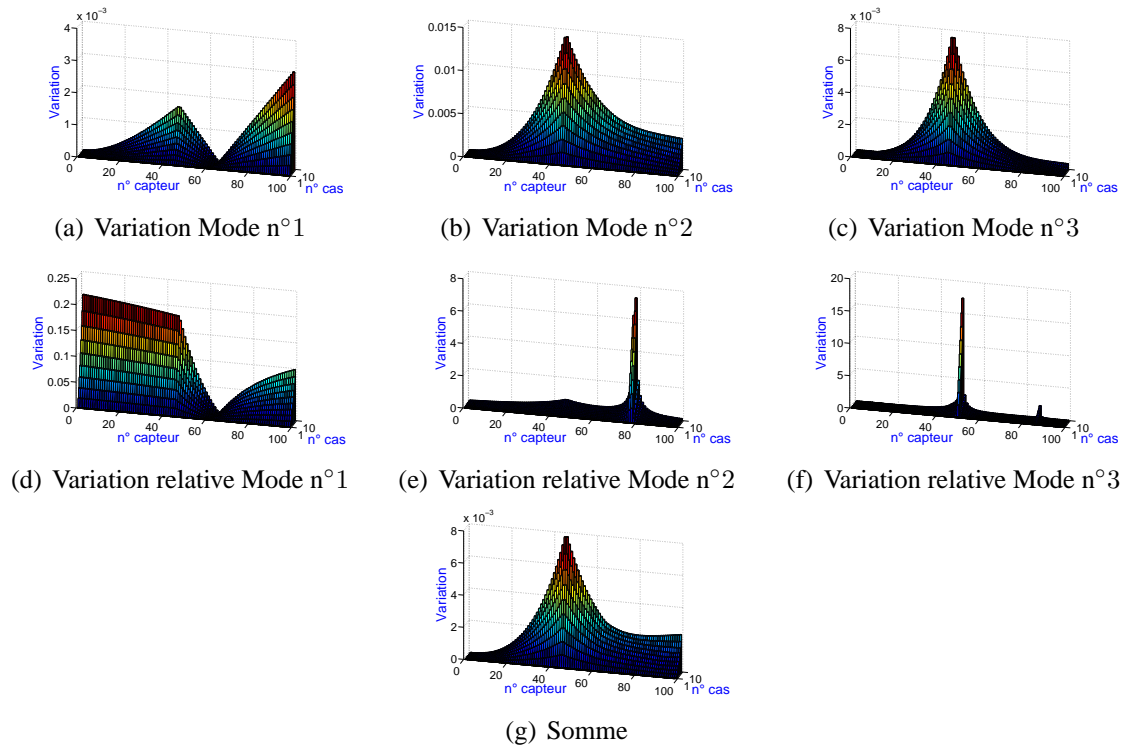
(f) Mode n°3 - 10 capteurs équidistants

FIGURE 5.5: Trois premiers modes propres obtenus avec les deux configurations de capteurs ponctuels pour les 10 cas d'endommagement.

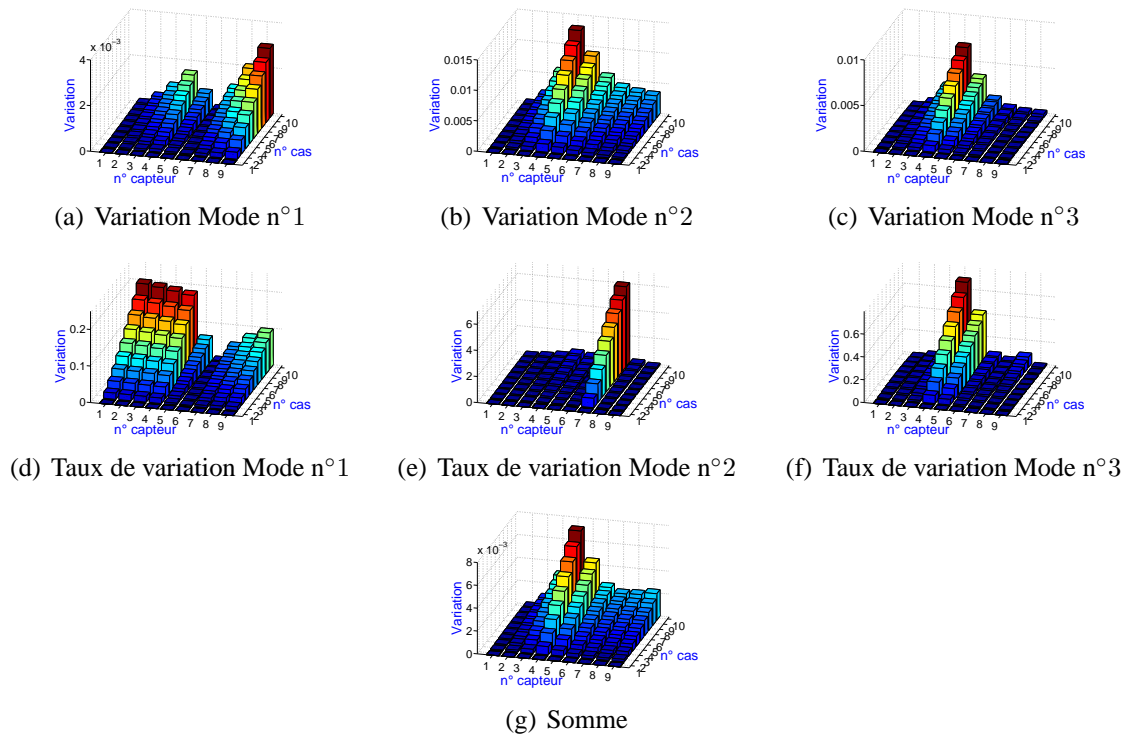
Les déformées modales obtenues pour les deux configurations choisies sont quasiment confondues pour tous les cas d'endommagement : la variation est tellement faible que le défaut n'est pas décelable et ce d'autant plus qu'expérimentalement la dispersion des mesures est généralement plus importante que la variation des déformées modales observées ici.

Si l'on utilise le même indicateur pour les déformées modales que celui défini pour les courbures modales en (5.5), en remplaçant  $\phi_k''$  par  $\phi_k$ , on obtient pour les deux configurations les graphes présentés sur les figures 5.6(g) et 5.7(g). Les valeurs absolues de la différence des déformées modales des états endommagé et non endommagé,  $|\phi_k^n(x_i) - \phi_k^1(x_i)|$  où l'indice  $n$  représente le cas d'endommagement, ainsi que les variations relatives (en %) définies par  $|\phi_k^n(x_i) - \phi_k^1(x_i)| / |\phi_k^1(x_i)|$  sont également tracées sur les figures 5.6 et 5.7 pour les dix cas d'endommagements et chacun des trois premiers modes.

## 5.4 Simulations numériques



**FIGURE 5.6:** Variation relative, taux de variation et indicateur des déformées modales obtenus pour les dix cas d'endommagements avec 100 capteurs équidistants.



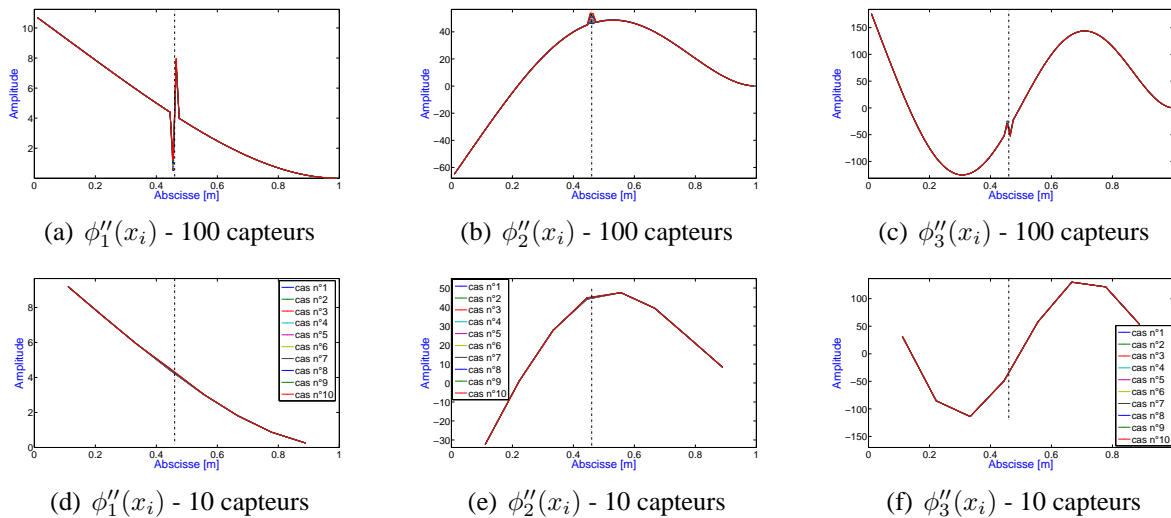
**FIGURE 5.7:** Variation relative, taux de variation et indicateur des déformées modales obtenus pour les dix cas d'endommagements avec 10 capteurs équidistants.

Les graphes (a), (b), (c) et (g) des figures 5.6 et 5.7 permettent de détecter l'endommagement respectivement avec 100 et 10 capteurs ponctuels, cependant la localisation n'est pas très précise (autour des capteurs n°45-n°46 avec 100 capteurs et du capteur n°4 avec 10 capteurs). Par ailleurs, les variations relatives des déformées modales observées (graphes (d), (e) et (f) des figures 5.6 et 5.7) ne sont au maximum, à l'emplacement de l'endommagement et pour le cas d'endommagement le plus important, que de l'ordre de 0.5 %. Il paraît donc difficile de pouvoir déceler l'endommagement pour les différents cas étant données les valeurs de dispersion généralement obtenues pour la détermination de déformées modales expérimentales (de l'ordre de quelques %). Les autres pics observés sur les différents graphes des variations relatives correspondent aux noeuds des modes, où la moindre variation de la déformée modale provoque une variation relative importante du fait que la valeur soit presque nulle.

*Dans cette étude, les déformées modales ne permettent pas de détecter l'endommagement d'un point de vue expérimental. Nous allons donc étudier la courbure modale déterminée à partir des capteurs ponctuels.*

### 5.4.3 Courbure modale obtenue à partir de capteurs ponctuels

Comme nous l'avons signalé précédemment, le calcul de la courbure modale avec des capteurs ponctuels est réalisé à partir des déformées modales en appliquant directement l'équation (5.6) sans filtrage polynômial préalable. Sur la figure 5.8, les courbures modales obtenues pour les différents cas d'endommagement sont tracées pour les deux configurations de capteurs ponctuels (100 et 10 capteurs). Sur les graphes, les données ne sont tracées que pour 99 et 9 points (ou capteurs), puisqu'un point est perdu dans le calcul de l'approximation de la courbure (5.6). Normalement, l'approximation (5.6) engendre la perte de deux points de mesure (un à chaque extrémité), cependant nous avons pris en compte le point situé à l'encastrement dans les calculs, où toutes les déformées modales sont nulles et où il n'est donc pas nécessaire de mettre un capteur.



**FIGURE 5.8:** Courbures modales obtenues à partir des deux configurations de capteurs ponctuels pour les dix cas d'endommagement.

La courbure modale pour la configuration comprenant 100 capteurs comporte une forte disconti-

## 5.4 Simulations numériques

nuité au niveau du défaut, qui est donc bien détecté. En revanche, la détection du défaut est beaucoup moins visible lorsque seulement 10 capteurs sont pris en compte.

Afin de mieux visualiser les variations de courbure, nous allons représenter les résultats obtenus pour l'indicateur d'endommagement défini en (5.5). Les valeurs de l'indicateur  $I_C$  sont tracées pour les deux configurations de capteurs et les différents cas d'endommagement sur la figure 5.9.

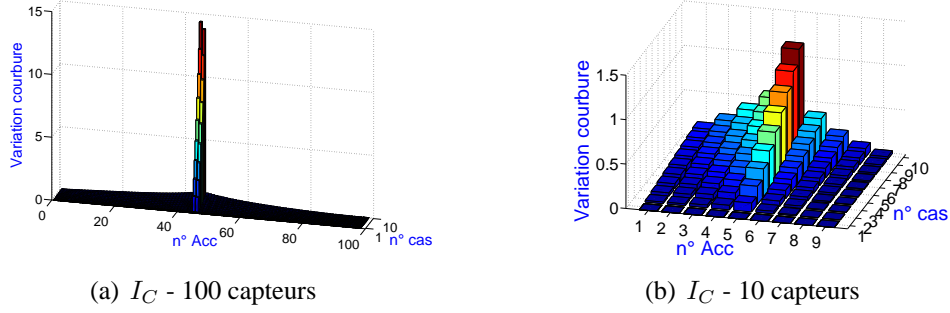


FIGURE 5.9: Indicateur d'endommagement obtenu à partir des deux configurations des capteurs ponctuels pour les dix cas d'endommagement.

La détection du défaut avec 100 capteurs étant déjà très nette au niveau des courbures modales (Fig. 5.8), elle l'est d'autant plus ici. Pour le cas où seulement 10 capteurs sont pris en compte, l'indicateur  $I_C$  permet une meilleure détection et localisation de l'endommagement, à proximité du quatrième capteur. Par ailleurs, il serait intéressant de réaliser une étude plus poussée afin de déterminer à partir de quel niveau de dispersion sur la détermination des déformées modales il est possible de faire la différence entre les différents cas d'endommagement.

### 5.4.4 Intégrale de la courbure modale obtenue à partir des ELB-CA

Pour les ELB-CA, nous avons pris une configuration similaire à celle où seulement dix capteurs ponctuels sont pris en compte. La base de mesure des ELB-CA vaut alors 0.1 m et ils sont répartis de manière continue au niveau de la poutre, intercalés entre les capteurs ponctuels soit neuf ELB-CA.

Sur la figure 5.10, les vecteurs propres  $\Phi^k$  déterminés à partir des neuf ELB-CA ont été tracés pour les trois premiers modes et les dix cas d'endommagement.

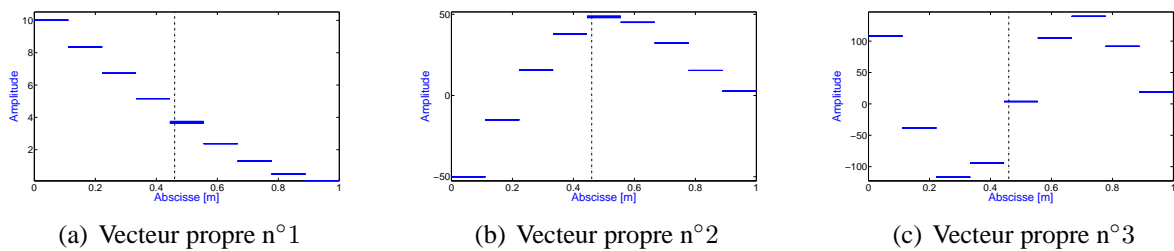


FIGURE 5.10: Vecteurs propres des trois premiers modes déterminés à partir des neuf ELB-CA pour les dix cas d'endommagement.

La figure 5.10 montre clairement que la variation des vecteurs propres est plus importante pour l'ELB-CA n°5 au niveau duquel le défaut est situé. L'endommagement peut donc être détecté directement à partir des vecteurs propres issus des ELB-CA sans avoir à effectuer de calculs numériques supplémentaires, très sujets aux erreurs d'arrondis numériques.

De plus, de manière analogue aux capteurs ponctuels (5.5), il est possible de définir un indicateur d'endommagement pour les ELB-CA :

$$I_C^{\text{ELB}}(i) = \sum_{k=1}^3 |\Phi_k^n(i) - \Phi_k^1(i)| \quad (5.9)$$

où l'indice 1 désigne l'état non endommagé (de référence), l'indice  $i$  le  $i^{\text{ème}}$  ELB et l'indice  $n$  le cas d'endommagement.

Comme pour le cas des déformées modales obtenues à partir des capteurs ponctuels, afin de déterminer si la variation des vecteurs propres est suffisamment importante pour être détectée expérimentalement, les valeurs absolues de la différence des vecteurs propres des états endommagé et non endommagé,  $|\Phi_k^n(i) - \Phi_k^1(i)|$ , ainsi que les variations relatives (en %) définies par  $|\Phi_k^n(i) - \Phi_k^1(i)| / |\Gamma_{\text{moy}_1}^k(i)|$  ont été tracées sur la figure 5.11 pour les dix cas d'endommagements et chacun des trois premiers modes.

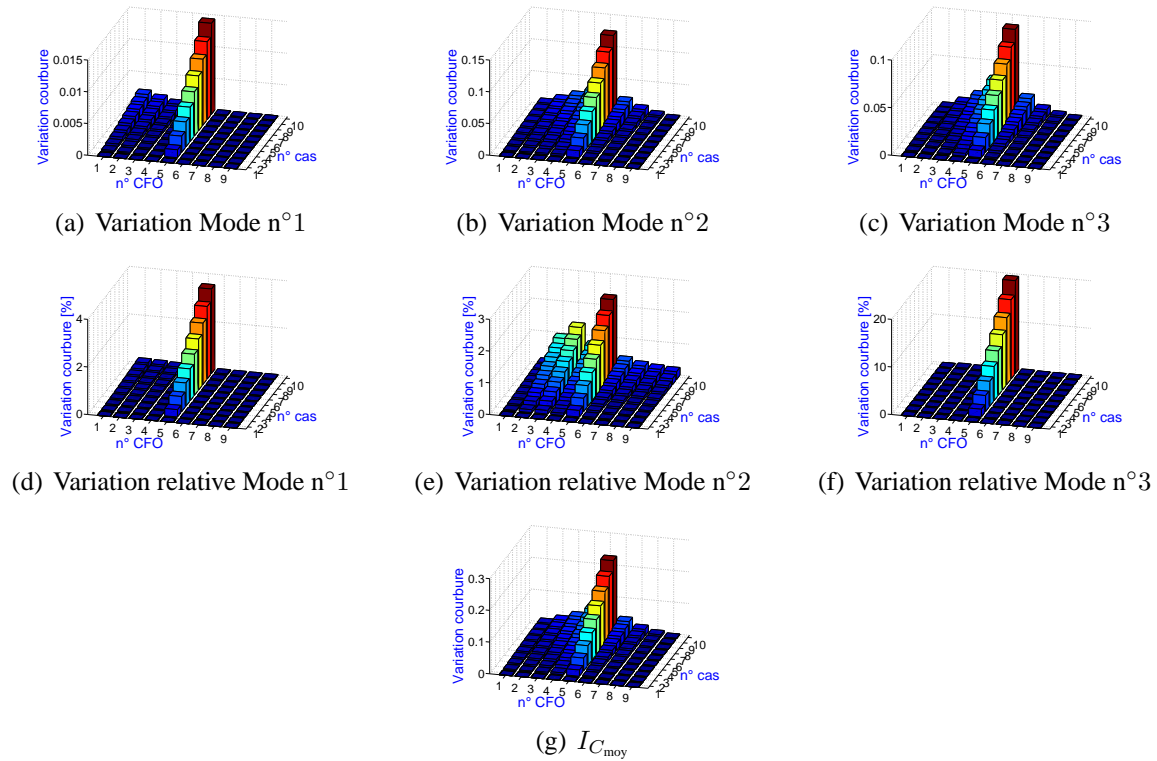


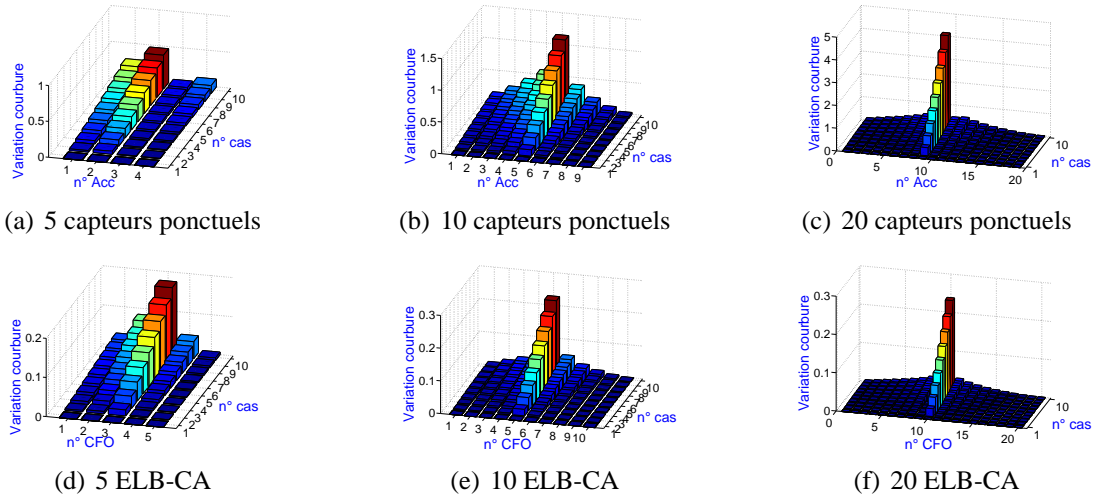
FIGURE 5.11: Variation relative, taux de variation et indicateur des courbures moyennes modales obtenus à partir des ELB-CA pour les dix cas d'endommagement.

Les variations relatives des vecteurs propres obtenus à partir des ELB-CA sont de l'ordre de quelques pourcents (jusqu'à 4 % pour le mode n°1 et 2.5 % pour le mode n°2). Pour le mode n°3, la variation relative va même jusqu'à 20 % pour le cas d'endommagement le plus sévère. Ceci est dû au fait que le défaut est situé à proximité de l'un des noeuds du mode, ayant pour effet d'amplifier la détection, d'où le pourcentage élevé trouvé pour ce mode. Au vu des dispersions observées dans le tableau 4.16 pour la détermination des vecteurs propres expérimentaux de la poutre E-E (de l'ordre de 0.8 % pour le mode n°3), il paraît tout à fait envisageable de pouvoir détecter les endommagement

expérimentalement. Cependant, peut-être que tous les niveaux d'endommagements ne pourront pas être détectés, notamment les moins sévères.

### 5.4.5 Comparaison ELB-CA/capteurs ponctuels

Dans ce paragraphe, nous avons comparé les résultats obtenus pour les indicateurs d'endommagements,  $I_C(x_i)$  et  $I_C^{\text{ELB}}(i)$ , obtenus respectivement à partir de capteurs ponctuels (accéléromètres par exemple) et d'ELB-CA, pour les différents cas d'endommagement et pour différents nombres de capteurs (5, 10 et 20). Les résultats sont présentés sur la figure 5.12.



**FIGURE 5.12: Indicateurs d'endommagement obtenus à partir d'ELB-CA et de capteurs ponctuels pour les dix cas d'endommagement et différents nombres de capteur.**

*Pour un nombre de capteurs assez élevé, les résultats obtenus avec les deux indicateurs sont équivalents. Par contre, pour un nombre de capteurs plus faible (5 ou 10), les résultats obtenus avec les ELB-CA sont de meilleure qualité, notamment au niveau de la localisation du défaut.*

*Un des avantages des ELB-CA, pour un faible nombre de capteur, vient du fait que le calcul de l'indicateur est obtenu directement et ne nécessite pas de double dérivation numérique comme pour les capteurs ponctuels. De plus, comme nous l'avons dit précédemment, l'approximation (5.6) fait perdre deux points de mesure. Pour des données expérimentales, l'opération de filtrage polynômial entraîne la perte d'au moins deux autres points. Pour dix capteurs ponctuels, il ne restera donc au mieux que quatre points de mesure de la courbure modale. Ainsi, la méthode des courbures modales devient inutilisable avec un faible nombre de capteurs ponctuels. L'autre avantage des ELB-CA, découlant directement de ce qui vient d'être énoncé, est qu'ils sont capables de détecter des défauts au niveau des CL, au contraire des capteurs ponctuels.*

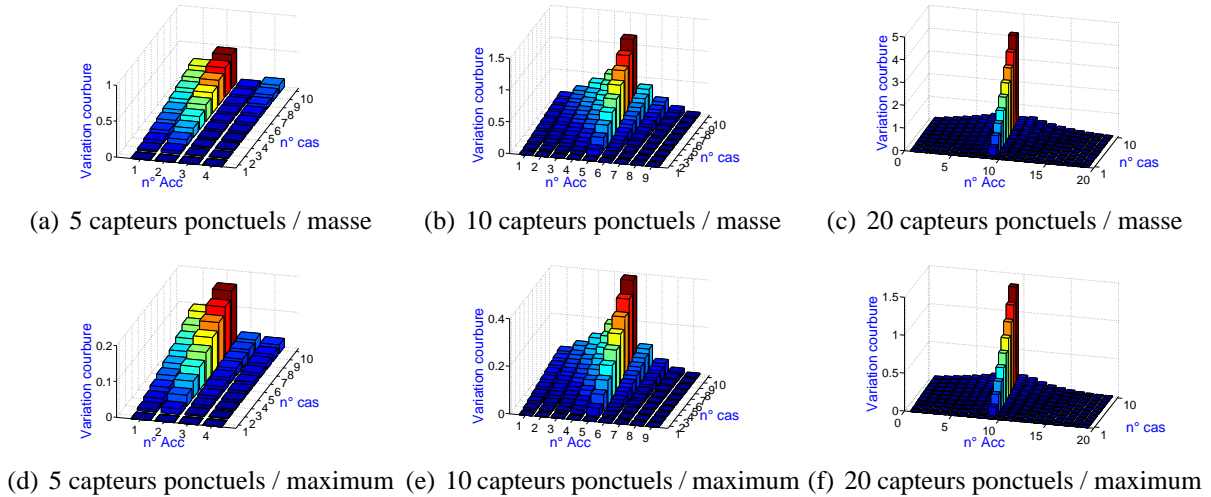
### 5.4.6 Influence de la normalisation des vecteurs propres

Dans le Chapitre 4, nous avons montré que l'une des particularités des ELB-CA en analyse modale était que la propriété de co-localisation et donc de normalisation par rapport à la masse des vecteurs

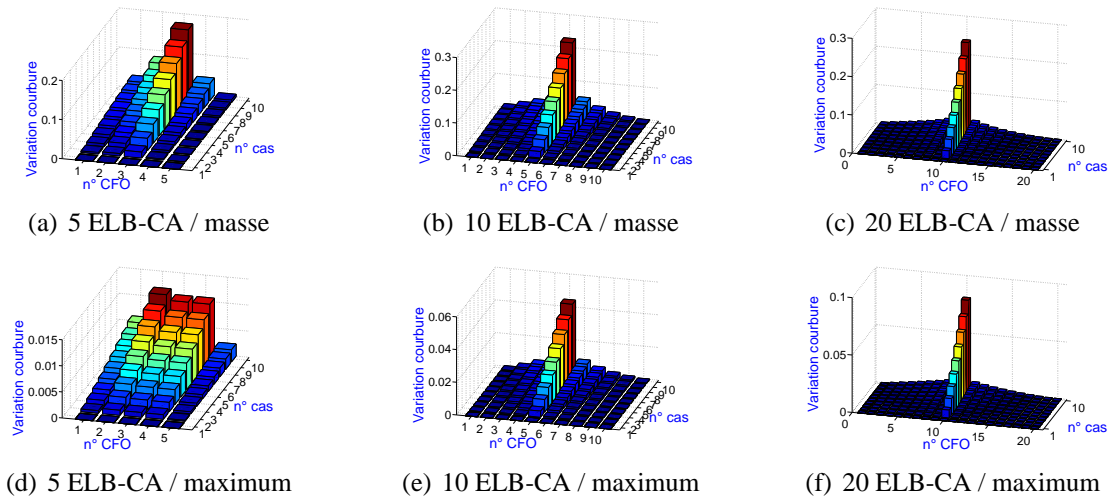


propres obtenus avec les ELB-CA n'existe plus. Les vecteurs propres sont donc normalisés au maximum comme pour les déformées modales obtenues à partir de méthodes d'analyse modale dites en «output-only». Jusqu'à présent, les indicateurs ont été calculés à partir des déformées modales et des courbures modales normalisées par rapport à la masse. Nous avons donc étudié l'influence de la normalisation des vecteurs propres sur les résultats obtenus pour les indicateurs d'endommagement.

Les figures 5.13 et 5.14 présentent respectivement les indicateurs calculés pour différents nombres de capteurs à partir des déformées modales pour les capteurs ponctuels et des intégrales de courbures modales pour les ELB-CA, normalisées par rapport à la masse et au maximum.



**FIGURE 5.13: Influence de la normalisation des déformées modales sur la détection d'endommagement.**



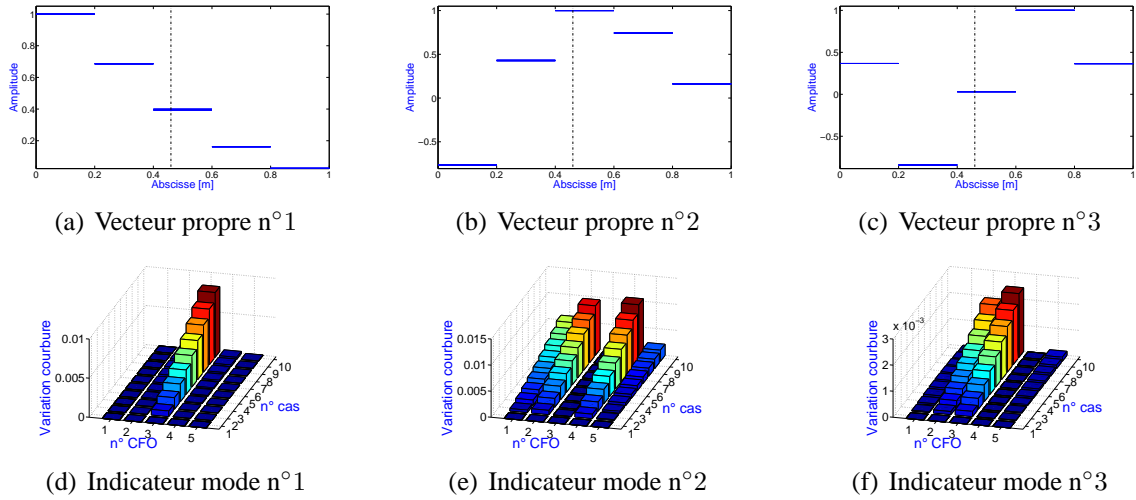
**FIGURE 5.14: Influence de la normalisation des vecteurs propres obtenus à partir d'ELB-CA sur la détection d'endommagement.**

Pour les capteurs ponctuels (Fig. 5.13), la normalisation semble avoir très peu d'influence sur les résultats obtenus pour l'indicateur (légère amélioration de la localisation), hormis l'amplitude de la variation de courbure ce qui découle directement de la différence des normalisations.



## 5.4 Simulations numériques

Pour l'ELB-CA, les résultats obtenus pour l'indicateur avec les deux normalisations sont identiques sauf pour le cas comprenant cinq ELB-CA. Afin de déterminer la cause de cette différence importante, nous avons tracé sur la figure 5.15 les vecteurs propres et leurs variations par rapport à l'état de référence pour chacun des trois modes de la poutre E-L et les différents cas d'endommagement.



**FIGURE 5.15: Vecteurs propres et leurs variations pour les trois premiers modes de la poutre E-L instrumentée avec cinq ELB-CA.**

La figure 5.15 montre que la mauvaise qualité de la détection de l'endommagement pour la poutre E-L avec cinq ELB-CA, lorsque les vecteurs propres des ELB-CA sont normalisés au maximum, provient du deuxième mode. En effet, pour cette configuration d'ELB-CA et ce mode, la normalisation repose sur l'ELB-CA au niveau duquel le défaut est situé (n°3) et le résultat est faussé.

*Si l'endommagement se produit au niveau de l'ELB-CA servant à la normalisation au maximum du vecteur propre du mode considéré (donc situé à proximité d'un ventre de vibration de la courbure modale du mode), les résultats obtenus pour l'indicateur d'endommagement sont faussés par les variations de courbure déterminées pour ce mode.*

Avant de calculer l'indicateur, il est donc intéressant d'étudier les variations des vecteurs propres de chacun des modes utilisés afin de ne pas prendre en compte ceux qui déprécient le calcul de l'indicateur.

Maintenant que nous avons étudié une des méthodes permettant de mettre à profit des spécificités des ELB-CA par rapport aux capteurs ponctuels, étudions l'influence de la configuration des ELB-CA sur les résultats obtenus pour l'indicateur d'endommagement.

### 5.4.7 Influence de la configuration des ELB-CA

Dans ce paragraphe, l'influence de la configuration (placement et longueur) des ELB-CA sur la détectabilité du défaut va être étudiée. Les ELB-CA sont répartis continûment et uniformément au niveau de la poutre. Autrement dit, plus le nombre d'ELB-CA est petit, plus ils ont une longue base de mesure.

Sur la figure 5.17, l'indicateur d'endommagement est tracé pour différentes configurations d'ELB-CA : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20 et 40 ELB-CA. Les placements des ELB-CA pour les différentes configurations sont représentés sur la figure 5.16 : le trait en pointillé représente l'endroit où l'endommagement est situé, chaque ligne correspond à une configuration et les points aux extrémités des ELB-CA. Le tableau 5.4 répertorie, pour chaque configuration, l'ELB-CA au niveau duquel le défaut est situé ainsi que la base de mesure des ELB-CA.

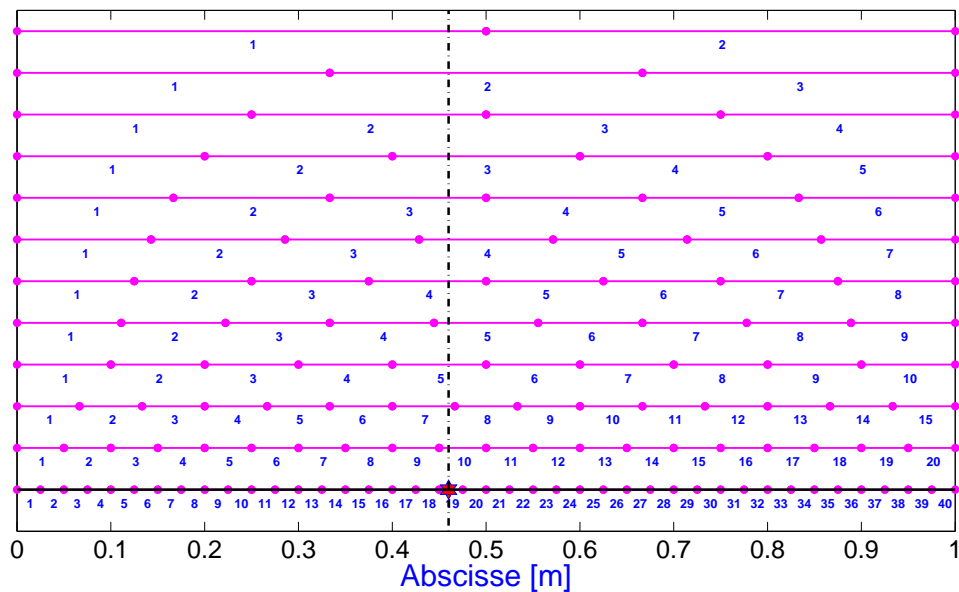
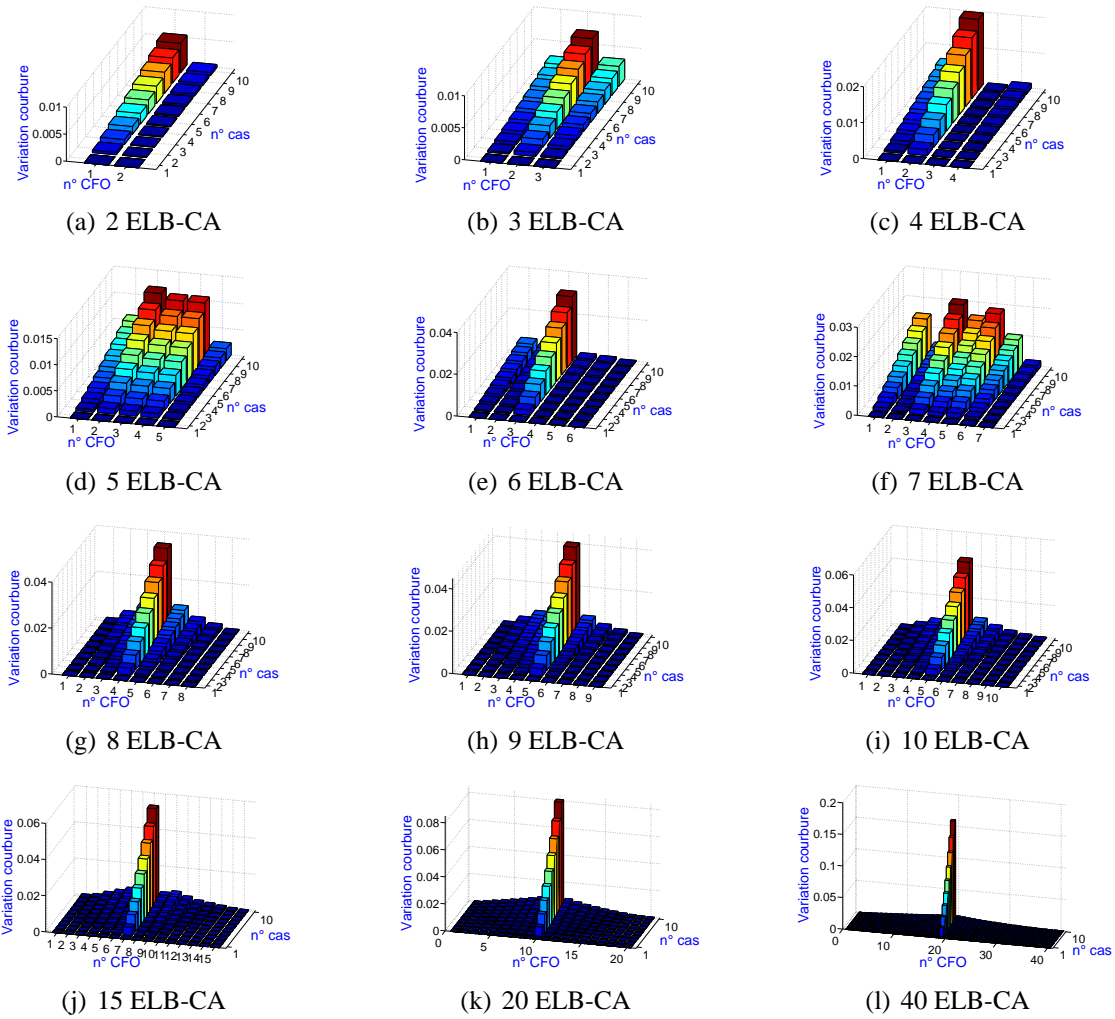


FIGURE 5.16: Placement des ELB-CA sur la poutre E-L pour les différentes configurations.

Configuration	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	n°6	n°7	n°8	n°9	n°10	n°11	n°12
Nb ELB-CA	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	40
Longueur	0.5	0.333	0.25	0.2	0.167	0.143	0.125	0.111	0.1	0.067	0.05	0.025
ELB/Défaut	n°1	n°2	n°2	n°3	n°3	n°4	n°4	n°5	n°5	n°7	n°10	n°19

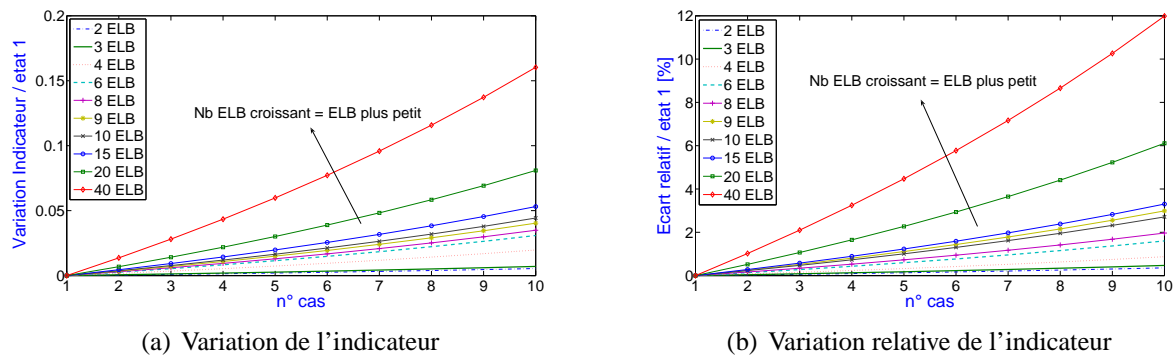
TABLEAU 5.4: Données des différentes configurations.



**FIGURE 5.17: Influence de la configuration des ELB-CA sur la détection de l'endommagement.**

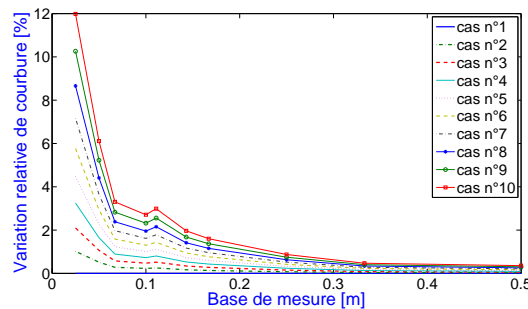
La figure 5.17 illustre le fait que la localisation du défaut est meilleure lorsque le nombre de capteurs augmente. Ceci est la conséquence de la diminution de la base de mesure de l'ELB-CA au niveau duquel le défaut est situé. La valeur de l'indicateur devient également plus importante. Comme détaillé au paragraphe précédent, les configurations comprenant 5 et 7 ELB-CA ne permettent pas une détection précise du défaut car celui-ci est situé au niveau du capteur qui sert à la normalisation de l'un des trois premiers vecteurs propres. Toutes les autres configurations permettent de déterminer correctement l'ELB-CA où le défaut se situe. Ensuite, pour permettre de différencier les différents cas d'endommagement expérimentalement, il faut que les dispersions sur les vecteurs propres expérimentaux soient suffisamment faibles.

La figure 5.18 présente les variations des vecteurs propres ainsi que leurs variations relatives au niveau de l'ELB-CA où le défaut est détecté pour les différents cas d'endommagement.



**FIGURE 5.18:** Variations et variations relatives de l'indicateur d'endommagement au niveau de l'ELB-CA où le défaut est détecté pour les différents cas d'endommagement.

La figure 5.18 montre que les variations de l'indicateur d'endommagement ainsi que ses variations relatives sont plus importantes pour un nombre important d'ELB-CA, soit une faible base de mesure. La variation relative de l'indicateur au niveau de l'ELB-CA, où le défaut est détecté, est alors tracée en fonction de la base de mesure du capteur sur la figure 5.19.



**FIGURE 5.19:** Variations relatives de l'indicateur d'endommagement, au niveau de l'ELB-CA où le défaut est détecté, en fonction de la base de mesure de l'ELB-CA et pour les différents cas d'endommagement.

On voit clairement que plus la base de mesure de l'ELB-CA situé au niveau du défaut est petite, plus les variations de l'indicateur d'un état d'endommagement à l'autre seront importantes et il sera alors plus facile de détecter les différents niveaux d'endommagement.

*Pour une configuration d'ELB-CA où les capteurs sont positionnés de manière continue et uniforme, il sera plus facile de localiser et de détecter différents niveaux d'endommagement si la base de mesure des ELB-CA est petite.*

Nous avons ensuite étudié ce que l'on obtient pour un même nombre d'ELB-CA mais avec des bases de mesure différentes. Nous avons alors comparé la configuration comprenant dix ELB-CA de base de mesure 0.1 m répartis continûment le long de la poutre avec des configurations d'ELB-CA de base de mesure 0.02 m répartis différemment au niveau de la poutre (de manière discontinue). Le placement des dix ELB-CA pour les différentes configurations testées est répertorié dans le tableau 5.5 et représenté sur la figure 5.20. Les résultats obtenus pour l'indicateur d'endommagement à partir de toutes ces configurations d'ELB-CA sont tracés sur la figure 5.21.

## 5.4 Simulations numériques

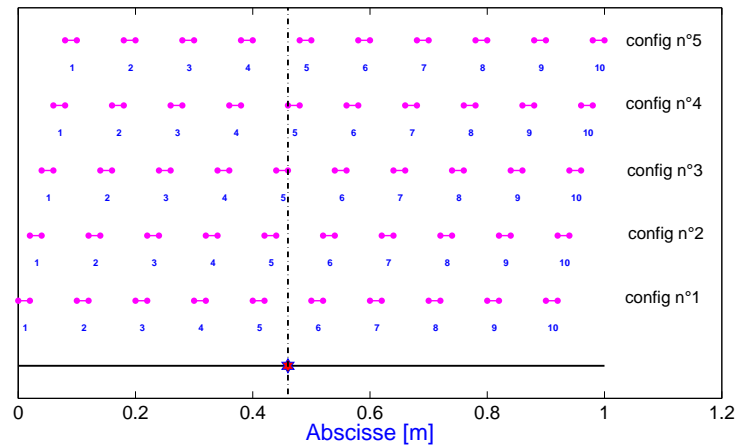


FIGURE 5.20: Placement des ELB-CA sur la poutre E-L pour les différentes configurations.

Capteur	Config. n°1	Config. n°2	Config. n°3	Config. n°4	Config. n°5
n°1	[0.00 0.02]	[0.02 0.04]	[0.04 0.06]	[0.06 0.08]	[0.08 0.10]
n°2	[0.10 0.12]	[0.12 0.14]	[0.14 0.16]	[0.16 0.18]	[0.18 0.20]
n°3	[0.20 0.22]	[0.22 0.24]	[0.24 0.26]	[0.26 0.28]	[0.28 0.30]
n°4	[0.30 0.32]	[0.32 0.34]	[0.34 0.36]	[0.36 0.38]	[0.38 0.40]
n°5	[0.40 0.42]	[0.42 0.44]	[0.44 0.46]	[0.46 0.48]	[0.48 0.50]
n°6	[0.50 0.52]	[0.52 0.54]	[0.54 0.56]	[0.56 0.58]	[0.58 0.60]
n°7	[0.60 0.62]	[0.62 0.64]	[0.64 0.66]	[0.66 0.68]	[0.68 0.70]
n°8	[0.70 0.72]	[0.72 0.74]	[0.74 0.76]	[0.76 0.78]	[0.78 0.80]
n°9	[0.80 0.82]	[0.82 0.84]	[0.84 0.86]	[0.86 0.88]	[0.88 0.90]
n°10	[0.90 0.92]	[0.92 0.94]	[0.94 0.96]	[0.96 0.98]	[0.98 1.00]

TABLEAU 5.5: Placement des ELB-CA de 0.02 m de base de mesure pour les différentes configurations.

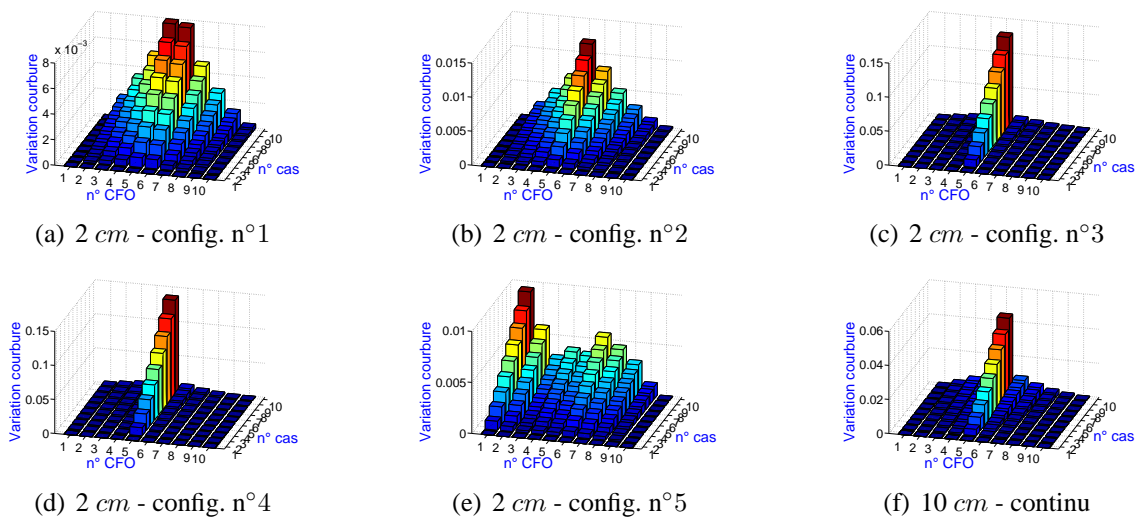


FIGURE 5.21: Influence de la longueur et du placement des ELB-CA sur la détection d'endommagement pour un nombre de capteurs donné (dix ici).

Pour les ELB-CA de  $0.02\text{ m}$  de base de mesure, suivant les configurations, les résultats obtenus pour l'indicateur d'endommagement sont très différents. Pour la configuration n°5, un des ELB-CA à proximité du défaut sert à la normalisation du deuxième vecteur propre, le calcul de l'indicateur est donc faussé. Le défaut est situé entre les abscisses  $x=0.455$  et  $0.465\text{ m}$ , il se trouve donc à égale distance des ELB-CA n°5 et n°6 pour la première configuration. Cependant, comme illustré sur la figure 5.21(a), la localisation est assez grossière puisque des valeurs élevées de l'indicateur sont également observées pour d'autres ELB-CA. Pour la deuxième configuration, le raisonnement est analogue avec cette fois-ci le défaut qui est plus proche de l'ELB-CA n°5. Pour les configurations n°3 et n°4, le placement des ELB-CA n°5 des deux configurations est symétrique par rapport au défaut, des résultats identiques sont donc obtenus pour l'indicateur (Fig. 5.21(c) et 5.21(d)). Globalement, les valeurs de l'indicateur d'endommagement sont plutôt faibles par rapport à celles obtenues pour la configuration comprenant dix ELB-CA de  $0.1\text{ m}$  sauf pour les configurations n°3 et n°4, où il y a presque un facteur trois. En fait, pour ces configurations, l'ELB-CA n°5 est situé au niveau du défaut or nous avons vu précédemment que, pour deux capteurs situés au niveau du défaut, celui qui possède une base de mesure plus petite observe des variations de l'indicateur plus importantes en fonction du niveau d'endommagement.

*Pour deux configurations d'ELB-CA comportant le même nombre de capteurs mais des bases de mesure différentes, les ELB-CA positionnés de manière discontinue permettront une localisation du défaut de moins bonne qualité que si le positionnement était continu, à moins que le défaut ne soit situé au niveau de l'un des ELB-CA. Dans ce cas seulement, la localisation sera meilleure.*

## 5.5 Confrontation théorie-expérience

Nous avons effectué une validation expérimentale sur la poutre E-L en plexiglas déjà présentée au Chapitre 4 en 4.8, dont les dimensions sont répertoriées dans le tableau 4.18. Elle est instrumentée avec huit accéléromètres, quatre jauges, trois ELB-CA FOGALE et excitée à l'aide d'un marteau à choc. Les caractéristiques des capteurs et du marteau sont répertoriées respectivement dans les tableaux 6.6, 6.7 et 6.4. Le lieu d'excitation de la poutre se situe au niveau de l'extrémité libre à l'abscisse  $x_0=0.98\text{ m}$  et le défaut au même endroit que pour l'étude numérique précédente, soit  $x=[0.455\text{ }0.465]\text{ m}$ . Les cas d'endommagement sont les différentes profondeurs d'entaille :  $h_0=0$  (référence), 2, 4, 6 et  $8\text{ mm}$ .

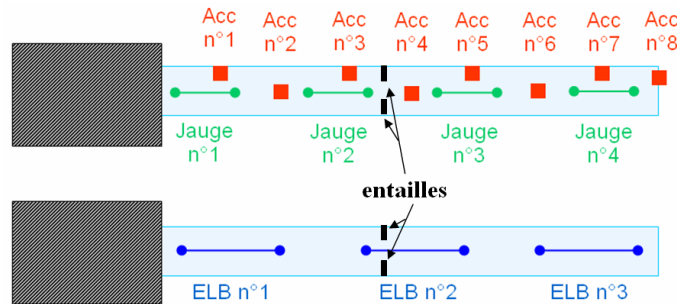


FIGURE 5.22: Placement des capteurs sur la poutre E-L.

La figure 5.23 illustre le positionnement des jauges de déformation, des accéléromètres et des

## 5.5 Confrontation théorie-expérience

ELB-CA au niveau de la poutre E-L. Afin d'entailler la poutre proprement et précisément jusqu'à la valeur d'entaille désirée, un dispositif mécanique a été réalisé.

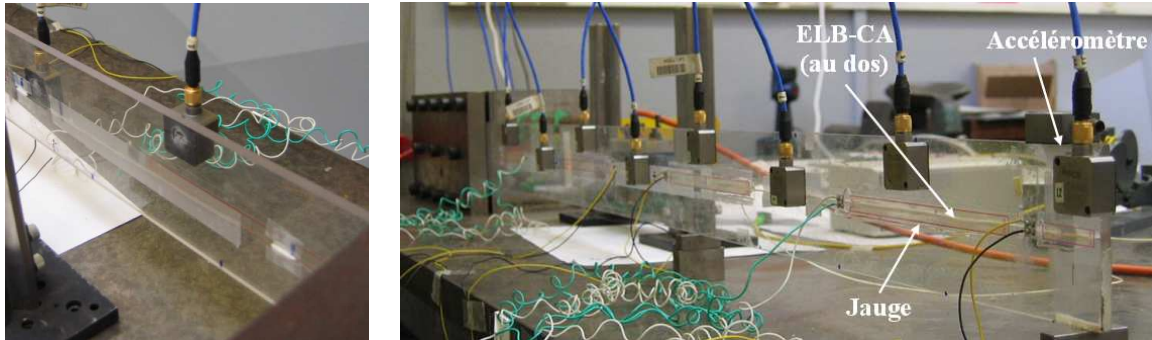


FIGURE 5.23: Photos de la poutre E-L instrumentée.

Pour obtenir les paramètres modaux de la poutre E-L, le traitement des signaux de mesures de tous les capteurs est réalisé avec la TOC. La figure 5.24 présente les résultats obtenus à partir des mesures des différents capteurs pour les trois premiers modes de la poutre E-L et pour deux niveaux de forces différents.

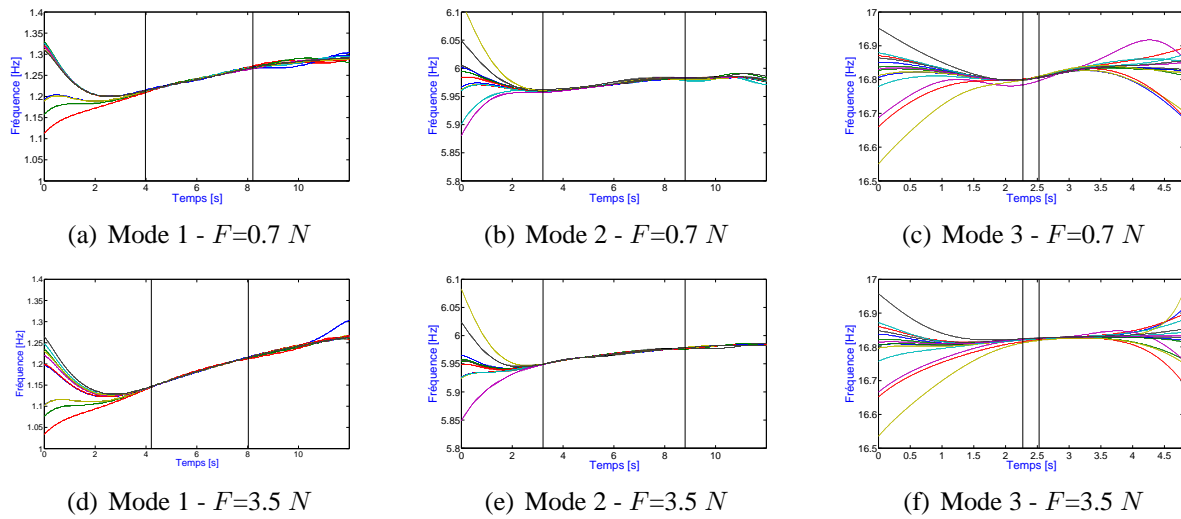


FIGURE 5.24: Arêtes des trois premiers modes de la poutre E-L obtenues à partir des TO locales des signaux des différents capteurs avec  $F=0.7\text{ N}$  et  $3.5\text{ N}$ .

L'interrogateur optique Fogale ayant un bruit de mesure assez important, les chocs ont été réalisés avec des amplitudes proches de  $3\text{ N}$  afin d'obtenir un signal de réponse suffisant. D'après les graphes de la figure 5.24, il s'avère que le comportement de la poutre est non linéaire (rotations modérées, voir Chapitre 7) pour cette amplitude d'excitation. Or, il s'avère que pour l'application de la méthode des courbures modales, on fait l'hypothèse de linéarité du système. Pour tenter d'obtenir un comportement linéaire de la poutre E-L, nous avons réalisé des chocs de faible amplitude ( $<1\text{ N}$ ). Pour ce niveau d'excitation, les mesures des ELB-CA Fogale sont trop bruitées pour être exploitées. Cependant, les graphes de la figure 5.24 montrent que même pour ce faible niveau d'excitation, le comportement de la poutre est non-linéaire.



Par ailleurs, les accéléromètres et leurs fils sont très intrusifs au niveau de la poutre (+ 23% de masse, amortissement du premier mode  $\approx 6\%$ ). Devant l'accumulation des problèmes rencontrés au cours de l'expérience, nous n'avons pas exploité les mesures.

## 5.6 Conclusion

Dans ce Chapitre, nous avons présenté une application où les caractéristiques de la mesure des ELB-CA, déterminées au Chapitre 4, permettent d'améliorer les résultats obtenus classiquement avec des accéléromètres : la méthode de détection de défauts par la courbure modale, qui suppose la linéarité du comportement de la structure. En fait, les ELB-CA présentent un intérêt fort pour toutes les méthodes qui utilisent la courbure modale  $\phi_k''(x)$ .

Des simulations numériques ont été réalisées et ont permis de comparer les résultats obtenus pour la méthode de la courbure modale à partir de mesure de capteurs ponctuels (capteur de déplacement, de vitesse, accéléromètre) et d'ELB-CA. Pour un nombre de capteurs peu élevé, les ELB-CA donnent de meilleurs résultats notamment au niveau de la localisation du défaut. Cela est d'autant plus vrai que, pour les capteurs ponctuels, la détermination de la courbure modale n'est pas directe, comme pour les ELB-CA, mais nécessitent une double dérivation numérique. Alors, les points aux extrémités sont perdus et si le nombre de capteurs n'est pas suffisant, il ne reste que très peu de points de mesure. Un autre avantage des ELB-CA par rapport aux capteurs ponctuels est donc qu'ils peuvent détecter des défauts au niveau des extrémités. Pour un nombre de capteurs plus élevé, les résultats numériques obtenus à partir d'ELB-CA et de capteur ponctuels pour l'indicateur d'endommagement sont similaires. Cependant, les simulations numériques ont été réalisées sans ajout de bruit numérique. Or, il s'avère que l'approximation de la différence finie centrée permettant d'obtenir la courbure modale à partir des déformées modales issues des capteurs ponctuels, amplifie les erreurs. Il serait donc intéressant de réaliser une étude en introduisant numériquement du bruit au niveau de la mesure ou de la dispersion sur les vecteurs propres obtenus pour des capteurs ponctuels et des ELB-CA. Le résultat serait sans doute favorable aux ELB-CA, mais ceci reste à démontrer.

L'influence de la normalisation (par rapport à la masse ou au maximum) et de la configuration des ELB-CA a été étudiée. La détection sera faussée lorsque le défaut se situera au niveau de l'ELB-CA servant à la normalisation du mode. Pour les configurations continues d'ELB-CA, il s'avère que la détection de différents niveaux d'endommagement est plus précise lorsque la base de mesure est petite. Cependant, si la base de mesure est petite alors le mesurande l'est également, c'est-à-dire que le bruit de mesure sera plus important pour des ELB-CA de petites tailles étant donné que la précision de mesure est la même quelle que soit la base de mesure. Ainsi, pour trouver une configuration optimale, il faudra faire un compromis entre le bruit de mesure et la finesse de la détection des différents niveaux d'endommagements.

La validation expérimentale que nous avons effectuée n'a pas pu aller à son terme car le comportement de la poutre s'est avéré être fortement non-linéaire, même pour de très faibles niveaux d'excitation. Des contraintes fortes sur le choix du démonstrateur, liées notamment à la fréquence d'échantillonnage de l'appareil FOGALE (50 Hz), seraient levées avec l'appareil SMARTEC. Pour effectuer de nouvelles expérimentations, il faudrait soit améliorer l'appareil FOGALE soit relouer l'appareil SMARTEC qui est plus fiable à ce jour.

Cette étude a permis de démontrer des résultats intéressants quant à l'application des ELB-CA et ouvre un certain nombre de perspectives à explorer, notamment au niveau de la simulation :

- Modification du défaut (taille, profondeur, aux extrémités, nombre).
- Autre méthodes de détection de défauts : énergie de déformation, courbure de flexibilité....



- Configuration d'ELB-CA mixte (association de longueurs différentes).
- Placement optimal pour la détection de défauts.
- Détection d'endommagement pour les plaques.

## 5.7 Bibliographie

- [1] Doebling S.W., Farrar C.R., Prime M.B., *A Summary Review of Vibration-based Damage Identification Methods*, The Shock and Vibration Digest, 30(2) (1998) 91-105.
- [2] Alvandi A., Cremona C., *Assessment of vibration-based damage identification techniques*, Journal of Sound and Vibration, 292(2006) 179-202.
- [3] Crémona C., *Evaluation dynamique des ponts : rapport de synthèse de l'opération de recherche (2000-2003)*, Production LCPC, Paris, 2004.
- [4] Alvandi A., *Contribution à l'utilisation pratique des essais dynamiques à la détection d'endommagements dans les ponts*, Thèse, ENPC, Paris/Marne la Vallée, 2003.
- [5] Maek J., *Damage assessment of civil engineering structures by vibration monitoring*, Thèse, K.U. Leuven, 2003.
- [6] Peeters B., *System Identification and damage detection in civil engineering*, Thèse, K.U. Leuven, 2000.
- [7] Pandey A.K., Biswas B., Samman M.M., *Damage detection from changes in curvature mode shapes*, Journal of Sound and Vibration, 145(2)(1991) 321-332.
- [8] Zhang Z., Atkan A.E., *The damage Indices for constructed facilities*, Proceedings of IMAC 13, 1995, p. 1520-1529.
- [9] Lu Q., Ren G., Zhao Y., *Multiple damage location with flexibility curvature and relative frequency change for beam structures*, Journal of Sound and Vibration, 253(5) (2002) 1101-1114.
- [10] Cornwell P., Doebling S., Farrar C.R., *Application of the strain energy damage detection method to plate-like structures*, Journal of Sound and Vibration, 224(2) (1999) 359-374.
- [11] Shi Z.Y., Law S.S., *Structural damage localization from modal strain energy change*, Journal of Sound and Vibration, 218(1998) 825-844.
- [12] Abdel Wahab M.M, De Roeck G., *Damage detection in bridges using modal curvatures : application to a real damage scenario*, Journal of Sound and Vibration, 226(2) (1999) 217-235.
- [13] Lestari W., Qiao P., Hanagud S., *Curvature Mode Shape-based Damage Assessment of Carbon/Epoxy Composite Beams*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 18(2007) 189-208.
- [14] Abdel Wahab M.M, *Effect of modal curvature on damage detection using model updating*, Mechanical Systems and Signal Processing, 15(2) (2001) 439-445.
- [15] Sazonov E., Klinkhachorn P., *Optimal spatial sampling interval for damage detection by curvature or strain energy mode shapes*, Journal of Sound and Vibration, 285(1995) 783-801.
- [16] Chance J., Tomlinson, Worden K., *A simplified approach to the numerical and experimental modeling of the dynamics of a cracked beam*, Proceedings of IMAC 12, 1994, p. 778-785.
- [17] Zonta D., Bursi O.S., Pozzi M., *Development of an FBG-based Dynamic Measurement System for Real-time Monitoring of RC Elements*, Proceedings of the 2nd European Workshop on Structural Health Monitoring, 2004, p. 862-869.
- [18] Hamming R.W., *Digital filters*, Dover Publications, INC. Mineola, New York, 1989.



## Chapitre 6

### Cas Linéaire : simulations numériques et comparaison théorie-expérience

---

**C**<sup>E</sup> CHAPITRE présente des simulations numériques réalisées pour le cas Linéaire (cas  $L$ ), qui mettent en évidence l'apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF de la mesure des ELB-CA.

*La réalisation du dispositif expérimental choisi pour l'expérimentation ainsi que l'instrumentation utilisée et l'acquisition des signaux de mesure sont présentées en détail.*

*Les essais expérimentaux, réalisés sur une poutre encastrée-libre en plexiglas, permettent de montrer que les calculs effectués dans le cas  $L$  ne sont pas valides lorsque le niveau de flèche de la poutre est trop important. En effet, le déplacement axial  $u$ , et les termes qui en découlent,  $u'$  et  $u''$ , ne sont pas négligeables, contrairement à l'hypothèse effectuée pour le cas  $L$  (Chapitre 3).*

---

## Plan du Chapitre 6

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>173</b>
<b>6.2</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>173</b>
6.2.1	ELB-CA situé à la surface d'une poutre	173
6.2.2	ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre	176
<b>6.3</b>	<b>Confrontation théorie - expérience</b>	<b>179</b>
6.3.1	Description du dispositif expérimental	179
6.3.2	Matériels utilisés	182
6.3.3	Condition d'acquisition des signaux	184
6.3.4	Etude dynamique	186
6.3.5	Etude statique	188
<b>6.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>190</b>
<b>6.5</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>190</b>

---

## 6.1 Introduction

Tous les développements réalisés jusqu'à présent aux Chapitres 4 et 5) supposaient un comportement linéaire de la poutre, sur laquelle les ELB-CA sont fixés. Dans ce Chapitre, nous allons nous intéresser à la limite de l'hypothèse de linéarité, c'est-à-dire à la limite du cas L défini au Chapitre 3 en 3.4.4. Pour cela, nous avons reporté l'expression de la flèche de la poutre  $v(x, t)$  (4.1), définie en (4.1) pour le cas linéaire, dans les approximations de la mesure de l'ELB-CA (3.77) (ou (3.78) selon la position de l'ELB-CA) et (3.97).

On peut noter que, pour des niveaux de flèche de la poutre importants, l'équation (4.1) n'est plus valide et l'équation différentielle régissant le comportement de la poutre en vibration de flexion n'est plus linéaire (3.73). Néanmoins, nous utilisons cette équation dans cette étape quelle que soit la valeur atteinte pour la flèche maximale de la poutre. Pour le cas G, la mesure de l'ELB-CA déterminée à partir du système (3.73) sera traitée au Chapitre 8.

Pour deux positions d'ELB-CA choisies (en surface de la poutre et au niveau de l'axe neutre), nous étudierons dans un premier temps le cas de la poutre E-E en détail avant de passer en revue les autres cas de CL : E-L, A-A et L-L.

Enfin des confrontations théorie-expérience sont réalisées en dynamique et en statique sur un démonstrateur dont le choix des caractéristiques est détaillé ici.

## 6.2 Simulations numériques

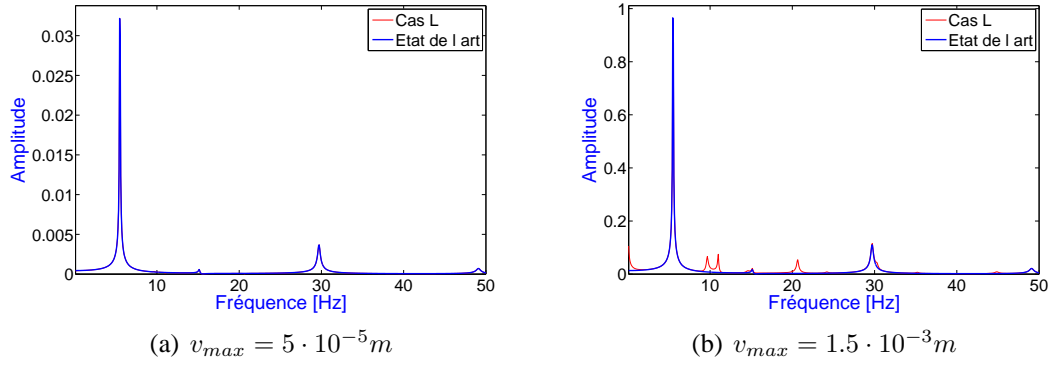
Les hypothèses du cas L, définies en 3.4.4, sont effectuées pour le calcul numérique de la mesure de l'ELB-CA dans cette partie. Nous allons étudier deux positions particulières du capteur sur la poutre : l'ELB-CA situé à une distance  $y = h/2$  de l'axe neutre (3.77), c'est-à-dire collé à la surface de la poutre, et l'ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre (3.78) (cas peu réaliste mais utile pour la compréhension des phénomènes). Les exemples traités numériquement concernent les réponses vibratoires d'une poutre d'Euler-Bernoulli à un choc pour différentes CL (E-E, A-A, E-L, L-L).

### 6.2.1 ELB-CA situé à la surface d'une poutre

Les mesures simulées d'un ELB-CA de  $50\text{cm}$ , placé entre les abscisses de la poutre  $a = 0\text{ m}$  et  $b = 0.5\text{ m}$ , sont obtenues numériquement à partir des équations (3.77) et (3.92) ; leur TF est ensuite calculée. Les mesures sont effectuées entre les instants  $t_0 = 0$  et  $t_f$ , intervalle de temps discrétisé en  $N_t$  points. Les TF sont tracées sur la plage de fréquence  $[0 - 50]\text{ Hz}$ . Les valeurs des paramètres choisies pour l'étude numérique sont les mêmes qu'au Chapitre 4 (Tab. 4.1 et 4.2). Deux cas sont envisagés suivant deux valeurs différentes de la flèche maximale  $v_{\max}$  de la poutre :  $v_{\max} = 5 \cdot 10^{-5}\text{ m}$  (faible flèche de la poutre, Fig. 6.1(a)) et  $v_{\max} = 1.5 \cdot 10^{-3}\text{ m}$  (flèche de la poutre plus importante, Fig. 6.1(b)).

#### Cas de la poutre E-E

La figure 6.1 présente les TF obtenues pour les deux niveaux de flèche de la poutre.



**FIGURE 6.1:** Comparaison entre les TF des mesures analytiques déterminées en (3.77) pour le cas L et en (3.92) pour l'état de l'art avec un ELB-CA situé à la surface d'une poutre E-E ( $y = h/2$ ), pour deux niveaux de flèche.

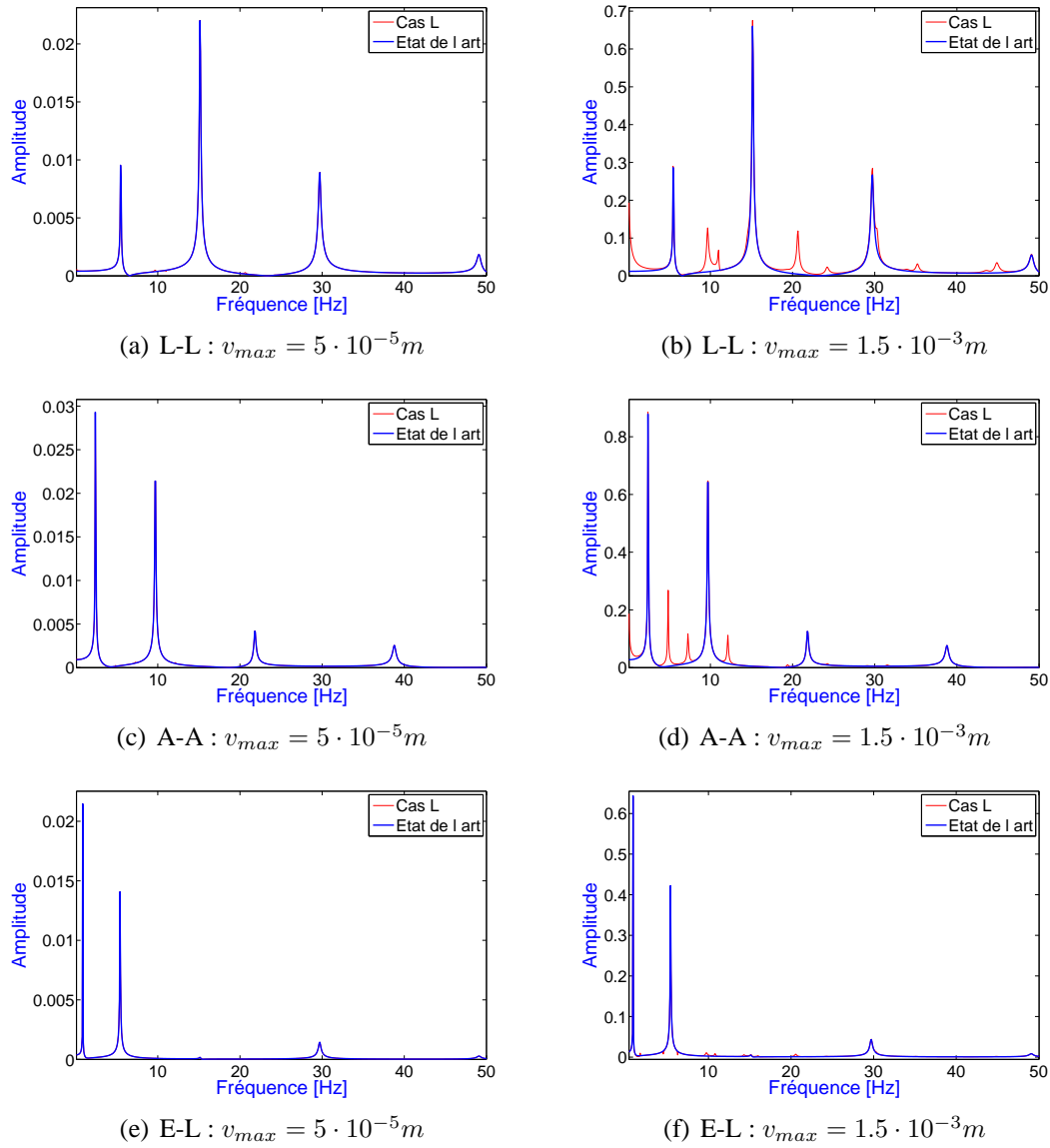
Les conclusions tirées des graphes de la figure 6.1 sont :

- i) Dans le cas de «faibles» flèches, les formules approchées utilisées dans la littérature [15][16] permettent d'obtenir un résultat identique à celui obtenu par la relation (3.77), correspondant à la mesure  $D_{AB}(t)$  pour le cas L (les deux courbes sont confondues, Fig. 6.1(a)).
- ii) Pour des flèches «plus importantes», c'est-à-dire lorsque les non-linéarités géométriques ne sont plus négligeables, des fréquences supplémentaires apparaissent en complément des fréquences propres de la structure. Ces fréquences additionnelles, répertoriées dans le tableau 6.1, sont des combinaisons linéaires des fréquences propres de la structure (par exemple :  $2f_1$ ,  $f_2 - f_1$ ,  $f_2 + f_1$ , ...) et l'amplitude de leur pic dépend de l'importance de la rotation des sections de la poutre.

### Autres cas de conditions aux limites

Dans cette partie, les autres cas de CL (L-L, A-A et E- L) ont également été traités pour un ELB-CA de 50cm placé entre les abscisses de la poutre  $a = 0$  m et  $b = 0.5$  m. Les caractéristiques de la poutre et les paramètres de la simulation sont les mêmes que précédemment (Tab. 4.1 et 4.2).

Sur la figure 6.2, les TF des mesures de l'ELB-CA sont tracées pour les mêmes valeurs de flèche maximale que pour la poutre E-E.



**FIGURE 6.2:** Comparaison entre les TF des expressions du cas L (3.77) et de l'état de l'art (3.92) pour un ELB-CA situé à la surface d'une poutre ( $y = h/2$ ), différentes CL et deux niveaux de flèche.

Pour les autres cas de CL de la poutre, des fréquences supplémentaires apparaissent également en complément des fréquences propres de la structure sur les TF du signal de l'ELB-CA (Fig. 6.2). Pour le placement de l'ELB-CA choisi, l'amplitude des pics de ces fréquences additionnelles est plus ou moins importante suivant les cas de CL. En effet, l'amplitude des pics est nettement plus faible pour le cas de la poutre E-L.

*Comme pour le cas de la poutre E-E, les fréquences additionnelles présentes dans la TF du signal numérique de l'ELB-CA sont des combinaisons linéaires des fréquences propres de la structure et l'amplitude de leurs pics dépend de l'importance de la rotation des sections de la poutre.*

Nous étudierons plus tard, au Chapitre 8, l'influence du placement et de la longueur du capteur sur l'apparition de ces pics. Nous verrons notamment que le placement choisi ici ( $[0 \ 0.5] \ m$ ) n'est pas

optimal pour le cas de la poutre E-L.

L'étude de la mesure de l'ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre va permettre de donner une explication quant à l'apparition de ces fréquences additionnelles.

### 6.2.2 ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre

La mesure simulée d'un ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre, également entre les abscisses  $a = 0 \text{ m}$  et  $b = 0.5 \text{ m}$ , est calculée à partir de l'équation (3.78); sa TF est ensuite déterminée. La mesure est effectuée entre les instants  $t_0 = 0$  et  $t_f$ , intervalle de temps discrétisé en  $N_t$  points. Les deux valeurs de la flèche maximale de la poutre E-E envisagées sont les mêmes que précédemment à savoir  $v_{\max} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$  (flèche faible) et  $v_{\max} = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  (flèche plus importante).

#### Cas de la poutre E-E

Sur la figure 6.3, les TF de l'ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre ont été tracées pour les deux niveaux de flèche, en les normalisant au premier pic de fréquence (le facteur de normalisation est de  $4.95 \cdot 10^{-5}$  pour  $v_{\max} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$  et de 0.045 pour  $v_{\max} = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ).

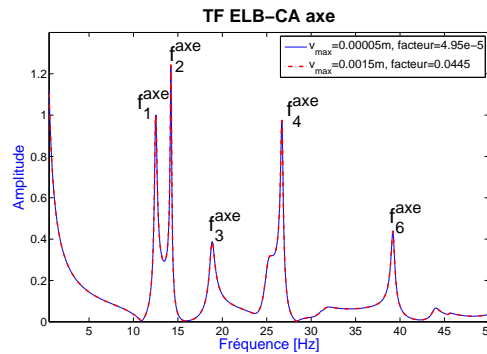


FIGURE 6.3: TF normalisées d'un ELB-CA, situé au niveau de l'axe neutre de la poutre E-E, obtenues pour le cas L avec les flèches maximales  $v_{\max} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$  et  $v_{\max} = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

Les TF se superposent parfaitement et les fréquences observées sur ces spectres, répertoriées dans le tableau 6.1, ne sont pas les fréquences de vibration de flexion de la poutre mais des combinaisons linéaires de celles-ci.

Fréquences ELB $h/2$ (Hz)		Fréquences ELB axe (Hz)		Combinaison Fréquences ELB $h/2$ (Hz)	
$f_1$	7.11	$f_1^{\text{axe}}$	12.51	$f_2 - f_1$	12.49
$f_{\text{sup1}}$	12.51	$f_2^{\text{axe}}$	14.21	$2 \cdot f_1$	14.22
$f_{\text{sup2}}$	14.21	$f_3^{\text{axe}}$	18.86	$f_3 - f_2$	18.83
$f_2$	19.60	$f_4^{\text{axe}}$	26.70	$f_2 + f_1$	26.71
$f_{\text{sup3}}$	26.70	$f_5^{\text{axe}}$	31.45	$f_5 - f_4$	31.33
$f_3$	38.43	$f_6^{\text{axe}}$	39.19	$2 \cdot f_2$	39.20
$f_4$	63.53	$f_7^{\text{axe}}$	44.03	$f_4 - f_2$	43.93
$f_5$	94.86	-	-	-	-

TABLEAU 6.1: Fréquences de l'ELB-CA en  $h/2$  et sur l'axe neutre pour le cas L, resp. sur l'intervalle  $[0 - 100] \text{ Hz}$  et  $[0 - 50] \text{ Hz}$ .



## 6.2 Simulations numériques

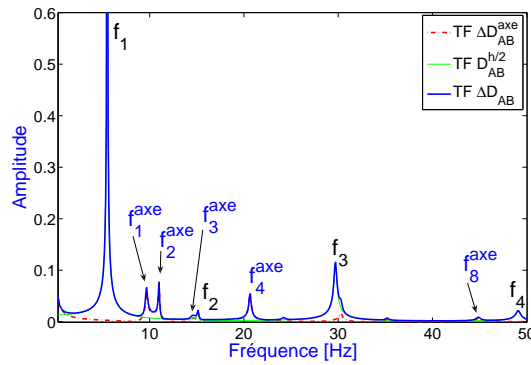
Les rapports d'amplitude (par rapport au premier niveau de flèche,  $v_{\max} = 5 \cdot 10^{-5} m$ ) du premier pic de la TF de l'ELB-CA en  $h/2$  ( $f_1$ ) et du deuxième pic de la TF de l'ELB-CA au niveau de l'axe neutre ( $f_2^{\text{axe}}$ ) sont répertoriés dans le tableau 6.2, en fonction de trois niveaux de la flèche maximale de la poutre (les deux déjà cités plus un niveau intermédiaire pour  $v_{\max} = 5 \cdot 10^{-4} m$ ). Dans la dernière colonne du tableau 6.2, le rapport entre l'amplitude du pic de la fréquence  $f_1$  et l'amplitude du pic de la fréquence  $f_2^{\text{axe}}$  est calculé pour chaque niveau de flèche maximale de la poutre.

Flèche maximale ( $m$ )		Rapport d'amplitudes - cas L		
valeur	rapport	pic $f_1$	pic $f_2^{\text{axe}}$	pic $f_1$ / pic $f_2^{\text{axe}}$
$5 \cdot 10^{-5}$	1	1	1	380
$5 \cdot 10^{-4}$	10	10	107	35
$1.5 \cdot 10^{-3}$	30	30	976	12

**TABEAU 6.2:** Variations des rapports d'amplitude des pics de la première fréquence pour l'ELB-CA en  $h/2$  ( $f_1$ ) et de la deuxième fréquence pour l'ELB-CA sur l'axe neutre ( $f_2^{\text{axe}}$ ) en fonction de la flèche maximale de la poutre, pour le cas L.

Les résultats du tableau 6.2 montrent que l'amplitude des pics de fréquence pour l'ELB-CA au niveau de l'axe neutre n'évolue pas de façon linéaire, comme c'est le cas pour l'ELB-CA en  $h/2$ , mais beaucoup plus rapidement. L'amplitude des pics tend ainsi à se rapprocher du niveau d'amplitude des pics de l'ELB-CA en  $h/2$ . En effet, dans la dernière colonne du tableau 6.2, le rapport entre l'amplitude des deux pics diminue de manière importante lorsque la flèche augmente.

Sur la figure 6.4, les TF des termes composant la mesure de l'ELB-CA en  $h/2$  (3.79) sont tracés :  $D_{AB}^{h/2}$  (courbure) et  $\Delta D_{AB}^{\text{axe}}$  (axe neutre).



**FIGURE 6.4:** Comparaison des TF des termes composant la mesure d'un ELB-CA pour le cas L et une flèche maximale de la poutre  $v_{\max} = 1.5 \cdot 10^{-3} m$ .

Il apparaît sur la figure 6.4 que les fréquences propres transverses de la poutre, observées au niveau de la TF de l'ELB-CA situé à la surface de celle-ci, proviennent du terme de la mesure dépendant de la courbure,  $D_{AB}^{h/2}$ . Les fréquences additionnelles, présentes au niveau de la TF de la mesure de l'ELB-CA situé à la surface de la poutre, proviennent uniquement de la composante de la mesure dépendant de la déformation de l'axe neutre,  $\Delta D_{AB}^{\text{axe}}$ . L'apparition de ces pics supplémentaires au niveau de la TF s'explique par l'augmentation rapide, lorsque la flèche de la poutre augmente, de l'amplitude des pics de la TF du terme  $\Delta D_{AB}^{\text{axe}}$  par rapport à ceux de la TF du terme  $D_{AB}^{h/2}$  (Tab. 6.2).

Les fréquences supplémentaires qui apparaissent dans le spectre sont celles dont l'amplitude est la plus importante sur la TF de l'ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre (Fig.6.3), soient  $f_1^{axe}$ ,  $f_2^{axe}$ ,  $f_3^{axe}$ ,  $f_4^{axe}$  et  $f_6^{axe}$ . Les pics des fréquences  $f_3^{axe}$  et  $f_6^{axe}$  ne sont pas visibles sur la figure 6.4 car leurs amplitudes sont plus faibles et qu'ils sont voisins de pics des fréquences propres de la structure ( $f_2$  et  $f_3$ ) qui les masquent complètement.

### Autres cas de conditions aux limites

Les TF de l'ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre, normalisées au premier pic de fréquence pour les deux niveaux de flèche (comme sur la figure 6.3), n'ont pas été représentées car les courbes se superposent également.

Par contre, les facteurs de normalisation au premier pic de fréquence sont :

- Pour  $v_{max} = 1.5 \cdot 10^{-3}m$  : L-L =  $5 \cdot 10^{-3}m$ , A-A =  $5 \cdot 10^{-3}m$  et E-L =  $5 \cdot 10^{-3}m$ .
- Pour  $v_{max} = 5 \cdot 10^{-5}m$  : L-L =  $5 \cdot 10^{-3}m$ , A-A =  $5 \cdot 10^{-3}m$  et E-L =  $5 \cdot 10^{-3}m$ .

Sur la figure 6.5, les TF des termes composant la mesure de l'ELB-CA en  $h/2$  (3.79) sont tracés pour les autres cas de CL de la poutre.

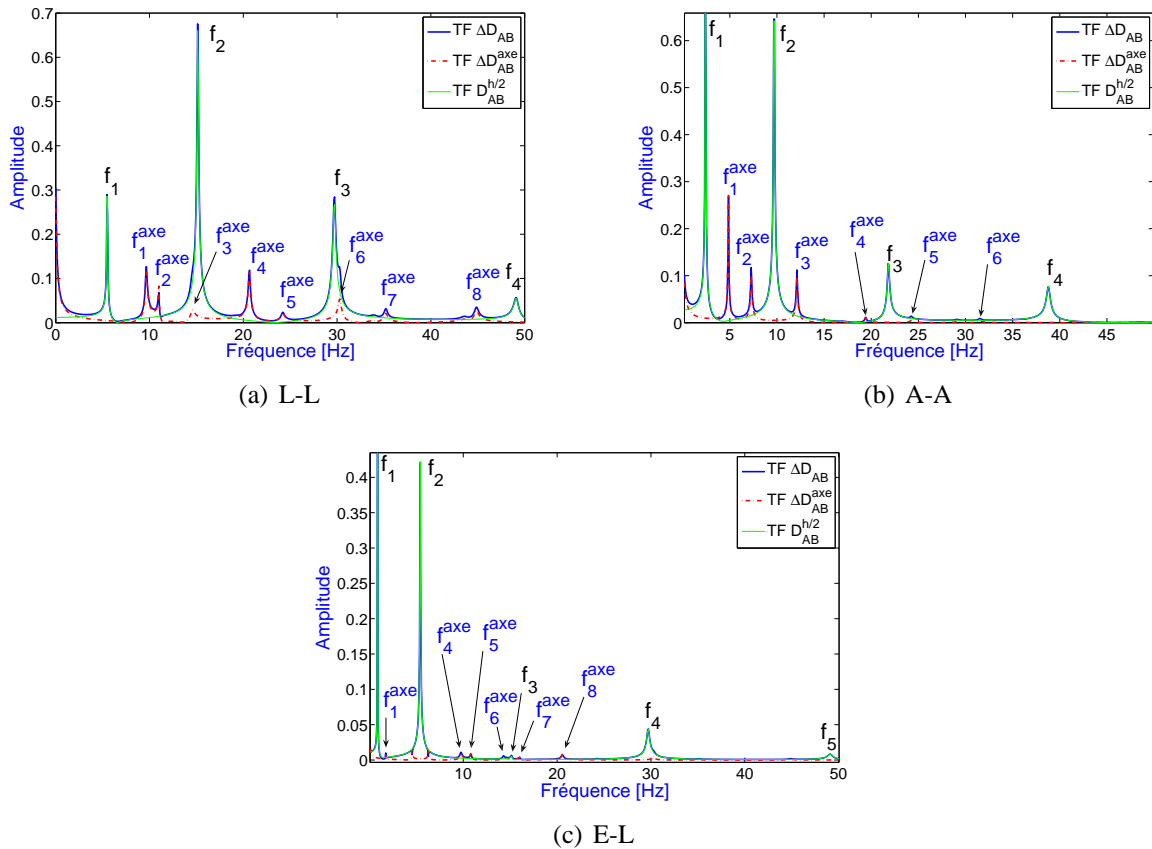


FIGURE 6.5: Comparaison des TF des termes composant la mesure d'un ELB-CA avec une flèche maximale de la poutre  $v_{max} = 1.5 \cdot 10^{-3}m$  pour le cas L et différentes CL.

Au vu des TF de la figure 6.5, l'apparition des pics supplémentaires au niveau de la TF de l'ELB-CA en  $h/2$  s'explique de la même manière que pour le cas de la poutre E-E détaillé ci-avant : les

## 6.3 Confrontation théorie - expérience

fréquences additionnelles qui apparaissent au niveau de la mesure de l'ELB-CA en  $h/2$  proviennent uniquement de la mesure de l'ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre et ce sont celles qui ont l'amplitude la plus importante sur la TF de ce dernier.

L'apparition des pics supplémentaires au niveau de la TF de l'ELB-CA en  $h/2$  pour le cas de la poutre E-L n'est pas très visible car le placement de l'ELB-CA n'est pas optimal. Nous reviendrons plus en détail sur ce point dans le Chapitre 8.

*En poussant les limites de l'hypothèse de linéarité en utilisant l'expression du déplacement (4.1) pour des flèches «plus importantes», c'est-à-dire lorsque les non-linéarités géométriques ne sont plus négligeables, des fréquences supplémentaires apparaissent en complément des fréquences propres de la structure sur les TF de la mesure de l'ELB-CA. Ces fréquences additionnelles proviennent de la déformation de l'axe neutre. Elles sont des combinaisons linéaires des fréquences propres de la structure (par exemple :  $2f_1$ ,  $f_2 - f_1$ ,  $f_2 + f_1$ , ...) et l'amplitude de leur pic dépend de l'importance des amplitudes de déformation de l'axe neutre atteintes.*

Afin d'identifier l'apparition de ces pics supplémentaires au niveau de la TF d'un l'ELB-CA collé à la surface d'une poutre, une validation expérimentale a été menée sur le cas d'une poutre E-L.

## 6.3 Confrontation théorie - expérience

### 6.3.1 Description du dispositif expérimental

#### Choix des dimensions de la poutre

Les dimensions de la poutre ont été choisies par rapport aux contraintes imposées par le système de mesure optique (interrogateur + ELB-CA), à savoir une fréquence d'échantillonnage peu élevée (100 Hz) et un bruit de mesure assez important ( $\approx 1\mu m$ ).

Nous souhaitons pouvoir observer les trois premiers modes de flexion de la poutre dans la plage de fréquence [0 - 50] Hz et avoir un rapport d'élanement ( $\frac{L}{e}$ ) assez important pour favoriser l'apparition des non-linéarités géométriques, ce qui nous a amené à choisir les caractéristiques de la poutre répertoriées dans le tableau 6.3. Le matériau utilisé pour la réalisation de la poutre est le plexiglas. Les raisons de ce choix sont expliquées plus loin.

<b>Longueur (mm)</b>	1000
<b>Hauteur (mm)</b>	70
<b>Largeur (mm)</b>	5
<b>Module d'Young (GPa)</b>	2.4
<b>Inertie de la section (<math>m^4</math>)</b>	$7.292 \cdot 10^{-10}$
<b>Masse volumique (<math>kg.m^{-3}</math>)</b>	1200
<b>Masse totale (kg)</b>	0.7

TABLEAU 6.3: Caractéristiques de la poutre.

Soulignons que la poutre étudiée mesure 1 m de long mais que le corps d'épreuve fait 1.32 m car 32 cm de la poutre servent à la réalisation de l'encastrement.

### Choix des conditions aux limites

Le cas de CL choisi pour la poutre afin de réaliser les tests expérimentaux est celui d'une poutre Encastrée-Libre. Ce choix a été fait afin de pouvoir obtenir des niveaux de flèche assez importants pour la poutre, c'est-à-dire atteindre aisément le domaine des rotations modérées. Par ailleurs, par rapport aux autres cas de CL (E-E, A-A et L-L), la réalisation des conditions E-L peut paraître plus simple à effectuer pour une poutre mince dans la mesure où il n'y a qu'un seul encastrement. Notons tout de même qu'un encastrement parfait reste très difficile à obtenir expérimentalement.

Les autres cas de CL ont été envisagés : le cas E-E nécessite deux encastrements ; les conditions d'appui pour le cas A-A sont assez difficiles à mettre en oeuvre pour des structures minces et élancées (ce cas serait le plus simple à mettre en oeuvre pour une poutre plus massive) ; quant au cas L-L, il a moins d'utilité n'étant pas vraiment représentatif de cas d'applications dans les ouvrages d'art. Par ailleurs pour ce dernier cas, la suspension de la poutre à l'une de ses extrémités entraîne des conditions expérimentales assez délicates pour le type de structure étudié (mince et élancée) : étant donné que la première fréquence propre de la poutre se situe aux alentours du Hertz, il est très difficile de trouver une suspension (type élastique) suffisamment souple pour ne pas perturber les vibrations de la structure ( $f_{1suspension} < 0.1 f_{1poutre}$  au moins).

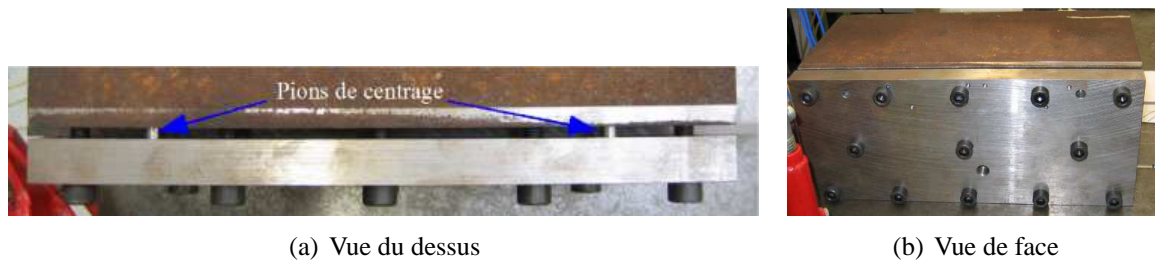
### Réalisation de l'encastrement

Les CL étant un des paramètres importants pour la validité du modèle étudié, notamment en influençant sensiblement les fréquences propres de la structure, un soin particulier a donc été pris pour mettre en oeuvre l'encastrement de la poutre.

L'encastrement a été réalisé de la manière suivante :

- La poutre est insérée entre les deux parties constituant l'encastrement, qui sont ensuite serrées. La partie de la poutre encastrée (32 cm) est supérieure à trois fois la plus grande dimension de la section de la poutre (7 cm de largeur) .
- La première partie de l'encastrement a été réalisée à partir d'un bloc d'acier qui a été usiné sur deux faces perpendiculaires : l'une sera en appui sur un marbre et l'autre en contact avec la poutre. Les dimensions du bloc finalisé sont  $32 \times 13.5 \times 13.5$  cm.
- La seconde partie est une plaque d'acier qui a également été usinée sur deux faces perpendiculaires : l'une en appui sur un marbre et l'autre en contact avec la poutre. Les dimensions de la plaque finalisée sont  $32 \times 13.5 \times 2$  cm.

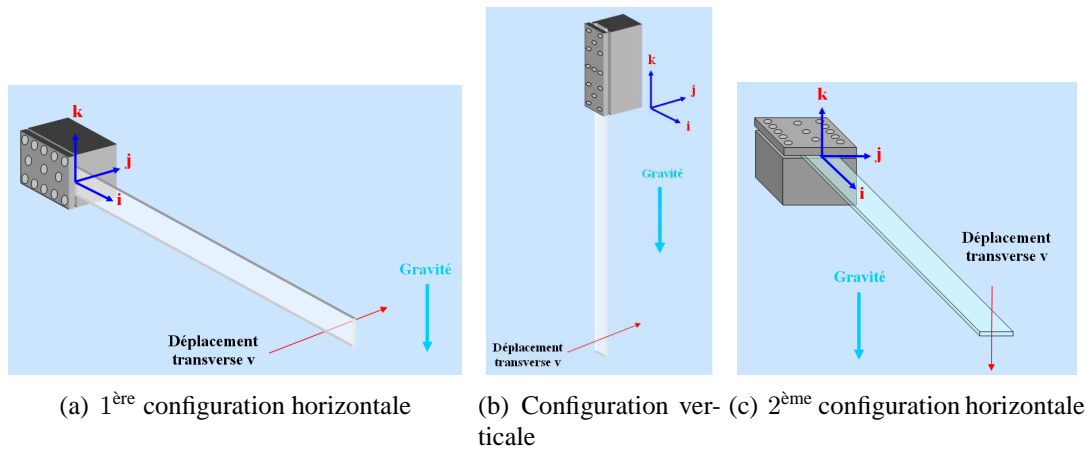
Pour le positionnement de la plaque par rapport au bloc, deux pions de centrage ont été réalisés (Fig. 6.6(a)). Le serrage de la plaque sur le bloc est obtenu par l'intermédiaire de treize vis réparties de la manière suivante : cinq vis à 1.5cm de l'arête supérieure de la plaque, cinq vis à 1.5cm de l'arête inférieure et trois au centre de la plaque (Fig. 6.6(b)). Les trois vis au centre traversent également la poutre et permettent ainsi de mieux bloquer le degré de liberté de translation axiale au niveau de l'encastrement. Ce nombre de vis assez important permet d'avoir un serrage plus homogène au niveau de l'encastrement. Les vis sont serrées à l'aide d'une clé dynamométrique à un couple de  $10 \text{ N.m}^{-1}$ . Un préserrage est effectué au niveau des vis centrales puis l'ensemble des vis est serré progressivement en quinconce. Ainsi, une répartition des efforts plus uniforme est obtenue au niveau de l'encastrement.



**FIGURE 6.6: Photos de l'encastrement.**

#### Influence de la gravité

Comme le montre la figure 6.7, plusieurs configurations sont envisageables pour le dispositif expérimental.



**FIGURE 6.7: Différentes configurations possibles pour le dispositif expérimental.**

La configuration du dispositif expérimental choisie est celle de la figure 6.7(a) : la poutre est placée horizontalement (suivant l'axe  $i$ ) et excitée par des chocs latéraux (suivant l'axe  $j$ ) induisant des vibrations dans le plan horizontal (plan  $(i,j)$ ). La configuration de la figure 6.7(b) est plus complexe à mettre en oeuvre et celle de la figure 6.7(c) fait d'avantage intervenir la gravité que la configuration choisie car les modes transverses de la poutre qui nous intéressent se situent dans le même plan que la gravité. Pour la configuration choisie, les vibrations transverses de la poutre se font dans le plan horizontal, donc orthogonal à la gravité, permettant ainsi de minimiser son effet. Des simulations préliminaires prenant en compte l'effet de la gravité, réalisées à l'aide du logiciel MSC ADAMS basé sur la théorie des systèmes multicorps, ont permis de montrer que, même avec la configuration choisie, la gravité avait tout de même une certaine influence. Pour en minimiser davantage l'effet, le plexiglas a été choisi comme matériau pour la poutre au lieu de l'acier ou de l'aluminium. La photo du dispositif expérimental est présentée sur la figure 6.8.

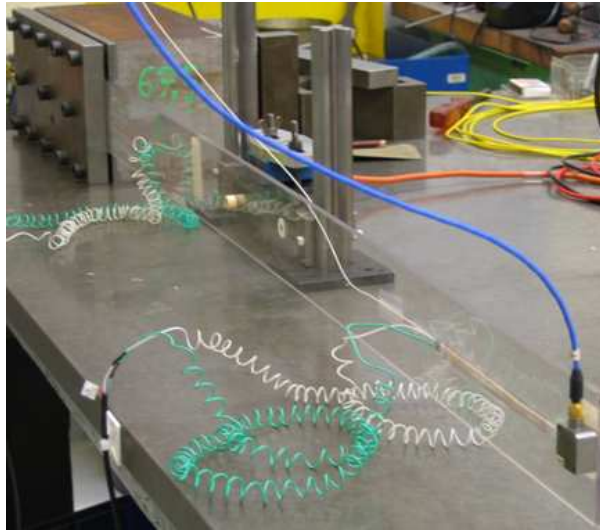


FIGURE 6.8: Photo du dispositif expérimental.

### 6.3.2 Matériels utilisés

#### Excitation

Pour l'étude dynamique, la poutre E-L est mise en vibration à l'aide d'un marteau d'impact Bruël et Kjaer modèle 8202, équipé d'un capteur de force piézoélectrique, muni d'une tête d'impact en caoutchouc et sans masse additionnelle. Les caractéristiques du marteau sont détaillées dans le tableau 6.4 :

Transducteur	Sensibilité ( $pC/N$ )	Gamme de mesure
Capteur de force BK 8200	3.72	-1000/+5000 N

TABLEAU 6.4: Caractéristiques du marteau.

Le signal de force est conditionné et amplifié par l'amplificateur Bruël et Kjaer type Nexus équipé de deux voies de mesure.

#### Capteurs

Plusieurs types de capteur ont été choisis pour réaliser les tests expérimentaux : accéléromètre, jauge de déformation, capteur de déplacement optoélectronique (laser) et ELB-CA. L'accéléromètre sert à la comparaison avec une autre grandeur mesurée à savoir l'accélération et il est le capteur le plus fréquemment utilisé pour les essais vibratoires. La jauge étant collée continûment à la surface de la poutre, tout comme l'ELB-CA, nous supposons en première approximation qu'elle mesure la longueur physique  $D_{AB}(t)$  définie en (3.2). A l'indice de réfraction optique près, elle va donc permettre de valider la mesure de l'ELB-CA, même si sa longueur et son placement diffèrent quelque peu de ceux de l'ELB-CA. Le capteur laser permet de déterminer le niveau de flèche de la poutre et ainsi de donner une référence pour la simulation numérique. Le niveau de flèche maximal de la poutre se situe à l'extrémité libre cependant, pour le niveau de force considéré, le capteur laser sature ( $v_{\max} > 1cm$ ). Afin d'éviter cette saturation, il a donc été placé plus en amont (à l'abscisse  $x = 30cm$ ), la flèche de

### 6.3 Confrontation théorie - expérience

la poutre y étant bien plus faible qu'à l'extrémité libre. Les types de capteur utilisés, leurs références ainsi que leurs placements sont répertoriés dans le tableau 6.5.

Type de capteur	Nombre	Position (cm)	Référence
accéléromètre	1	98	PCB 3701G3FA3G
jauge	2	[2 12] et [82 94]	PL-120-11
laser	1	30	Wenglor YP06MGV80
ELB-CA	1	[76 96]	capteur Fogale

**TABEAU 6.5: Types de capteur utilisés pour les tests expérimentaux.**

Les jauges ainsi que l'accéléromètre sont collés sur la face avant du dispositif expérimental tandis que l'ELB-CA est collé sur la face arrière. Les figures 6.9 et 6.10 permettent de visualiser leurs placements au niveau de la poutre. Les caractéristiques de ces capteurs sont répertoriées dans les tableaux 6.6, 6.7, 6.8 et 6.9.

Etendues de mesure ( $\bar{g}$ )	$\pm 3$
Domaine fréquentiel d'utilisation (Hz)	0 à 150
Etendues des températures d'utilisation ( $^{\circ}C$ )	-40 à +185
Masse (sans les fils) (g)	17.5
Sensibilité nominale (mV/g)	1000

**TABEAU 6.6: Caractéristiques de l'accéléromètre PCB.**

Domaine fréquentiel d'utilisation (kHz)	0 à 120
Longueur (m)	0.12
Compensation thermique ( $10^{-6}/^{\circ}C$ )	11
Facteur de jauge	$2.12 \pm 1 \%$
Résistance ( $\Omega$ )	$120 \pm 0.3$

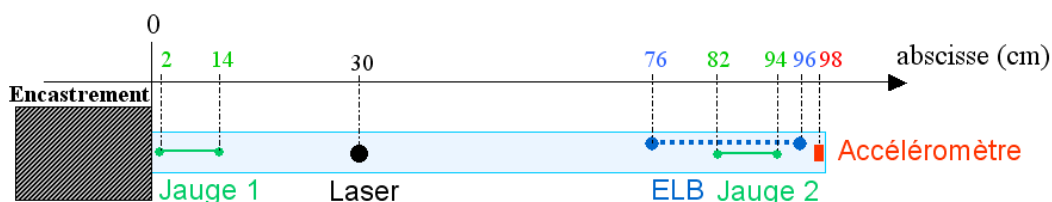
**TABEAU 6.7: Caractéristiques de la jauge PL-120.**

Etendues de mesure (mm)	$\pm 10$
Distance de mesure (mm)	50
Domaine fréquentiel d'utilisation (kHz)	0 à 1
Etendues des températures d'utilisation ( $^{\circ}C$ )	-10 à +60
Sensibilité nominale (mV/mm)	500
Résolution ( $\mu m$ )	<20
Longueur d'onde (nm)	660

**TABEAU 6.8: Caractéristiques du capteur de déplacement optoélectronique.**

Etendues de mesure (mm)	jusqu'à 4
Domaine fréquentiel d'utilisation (Hz)	0 à 50
Longueur (m)	0.2
Sensibilité à la température ( $(\mu m/m)/^{\circ}C$ )	10
Masse linéique (g/m)	0.11
Résolution ( $\mu m$ )	1

**TABEAU 6.9: Caractéristiques de l'ELB-CA.**



**FIGURE 6.9: Schéma du dispositif expérimental.**



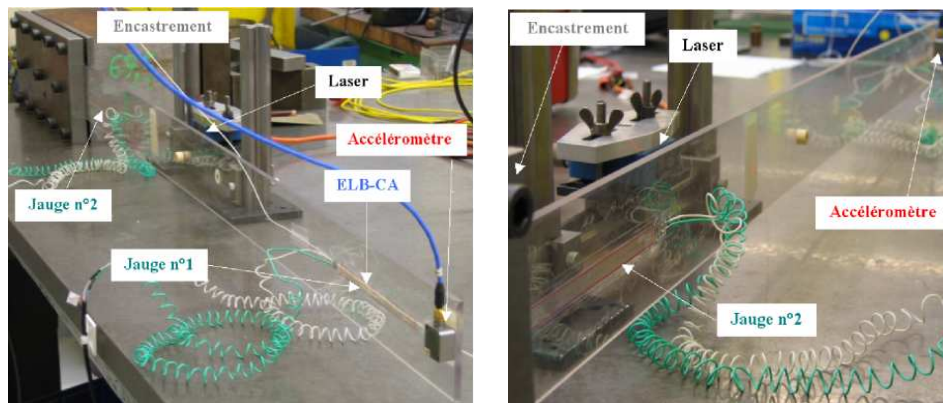


FIGURE 6.10: Photos du dispositif expérimental.

Nous n'étudierons ici que les mesures de la jauge  $n^{\circ}2$  ( $x=[82 \ 94] \text{ cm}$ ), la jauge  $n^{\circ}1$  sera utilisée ultérieurement.

### 6.3.3 Condition d'acquisition des signaux

Les signaux de l'accéléromètre, du capteur de déplacement laser et des jauges (mesure en demi-pont [1]) sont directement conditionnés et numérisés par le système Spider 8 de HBM [2](Fig. 6.11).



(a) Spider 8 (HBM)



(b) Amplificateur Nexus (BK)

FIGURE 6.11: Système d'acquisition de données Spider 8 de HBM et amplificateur de charge Nexus de BK.

Le signal de force conditionné par l'amplificateur de charge Nexus de BK [3] est également numérisé par la chaîne Spider. Le logiciel d'acquisition de données Catman version V2.1/R2 de HBM a été utilisé pour définir les paramètres nécessaires à l'acquisition des données. Il permet notamment de configurer le matériel de mesure, de définir et d'automatiser la séquence de mesure et de visualiser les données. A ce niveau, les gammes des valeurs mesurées par les capteurs de force, de déplacement, de déformation et les accéléromètres sont choisies, les capteurs sont calibrés et le réglage des zéros sont réalisés. Le facteur de calibration du signal du marteau défini au niveau de la chaîne Spider est de  $100 \text{ mV/N}$ . La fréquence d'échantillonnage, le filtre anti-repliement et la durée des enregistrements sont également définis. Enfin, le pré-trigger est ajusté sur un seuil de mesure de la force afin d'enregistrer la totalité du signal de la force, de la réponse en accélération, en déplacement et en déformation.



La mesure de l'ELB-CA est soumise au repliement spectral (voir Chapitre 2). Afin de pouvoir déterminer quelles fréquences se replient dans le spectre de l'ELB-CA, limité à  $50\text{ Hz}$ , on a choisi d'observer les six premières fréquences propres de la poutre ( $f_6=123\text{ Hz}$ ). Pour cela, au niveau du logiciel Catman, un filtre anti-repliement du type Butterworth passe-bas avec une fréquence de coupure de  $150\text{ Hz}$  a été sélectionné. Ce choix de filtre nous impose une fréquence d'échantillonnage des signaux de l'accéléromètre et de la jauge de  $1200\text{ Hz}$  minimum. La fréquence d'échantillonnage choisie pour les tests est donc égale à  $1200\text{ Hz}$ . Par ailleurs, la fréquence du filtre est également la limite de la plage de fréquence observable par l'accéléromètre. La fréquence d'échantillonnage peut paraître élevée mais avec une fréquence d'échantillonnage plus basse, il faudrait prendre une fréquence de filtre anti-repliement de  $75\text{ Hz}$  et par conséquent la bande de fréquence à observer subirait l'effet du filtre.

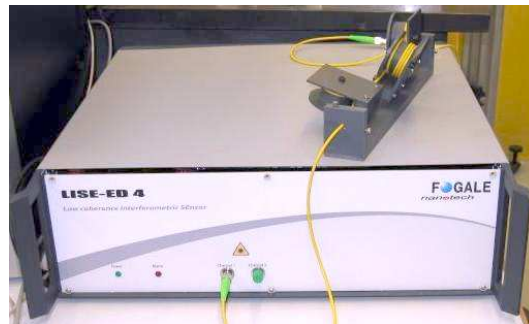
Pour l'acquisition, on a choisi de prendre 6000 points de résolution pour les mesures en statique et 10000 points en dynamique, soit respectivement une durée d'acquisition des signaux de  $5\text{ s}$  et  $8.3\text{ s}$ . Le pas de calcul de la FFT pour les mesures dynamiques est alors égal à  $0.12\text{ Hz}$ .

Les données sont codées en ASCII, la première colonne correspond au temps et les suivantes respectivement aux voies du marteau et des capteurs (de 0 à 4). Le tableau 6.10 récapitule les paramètres d'acquisition du Spider :

Fréquence d'échantillonnage ( $\text{Hz}$ )	1200
Fréquence filtre anti-repliement ( $\text{Hz}$ )	150
Nombre de points de mesure	6000 ou 10000
Période d'échantillonnage ( $\text{ms}$ )	0.83
Pas de calcul de la FFT ( $\text{Hz}$ )	0.12

**TABLEAU 6.10: Paramètres d'acquisition.**

L'acquisition de la mesure de l'ELB-CA se fait à l'aide du prototype d'interrogateur optique FOGALE (Fig. 6.12). Il permet une acquisition du signal à une fréquence d'échantillonnage de  $100\text{ Hz}$ , le pas de calcul de la FFT est donc égal à  $0.1\text{ Hz}$ . L'acquisition se fait par l'intermédiaire d'une carte d'acquisition National Instrument pilotée par le logiciel LabVIEW 6.1. Les paramètres à régler au niveau de l'interface développée pour l'acquisition du signal de l'ELB-CA sont la puissance de la source lumineuse ( $P$ ), le temps d'acquisition ( $t_f$ ), le seuil de détection du pic d'interférence ( $Mx$ ) et le nombre de point à prendre en compte pour le calcul du maximum du pic d'interférence ( $Nb$ ). Pour les tests effectués, les paramètres suivants ont été choisis :  $P=3\text{ V}$ ,  $t_f=20\text{ s}$ ,  $Mx=500\text{ mV}$  et  $Nb=50$  points.



**FIGURE 6.12: Interrogateur optique FOGALE.**

Les signaux de l'ELB-CA ne sont pas synchronisés avec le marteau. Le but n'étant pas ici d'observer les FRF des signaux mais seulement leur TF, les signaux de l'ELB-CA ne sont pas resynchronisés en post-traitement.

### 6.3.4 Etude dynamique

L'étude dynamique a pour but de confronter avec l'expérience les résultats numériques obtenus pour le cas L.

Des essais vibratoires ont été réalisés à l'aide d'un marteau d'impact, l'abscisse du point d'excitation étant  $x_0=98\text{ cm}$ . Le placement de l'ELB-CA le plus propice pour observer l'apparition de pics supplémentaires se situe à l'extrémité de la poutre mais c'est également l'endroit où le mesurande (la déformation) est le plus faible. Comme le bruit de mesure du système optique FOGALE est assez important,  $\approx 1\mu\text{m}$  contre  $0.01\mu\text{m}$  pour les jauges, le niveau d'excitation doit être suffisant pour obtenir un rapport signal sur bruit correct. Le comportement vibratoire de la poutre est alors non-linéaire car le niveau de flèche de la poutre est important.

La figure 6.13 présente les photos de la disposition des capteurs au niveau de l'extrémité libre de la poutre.

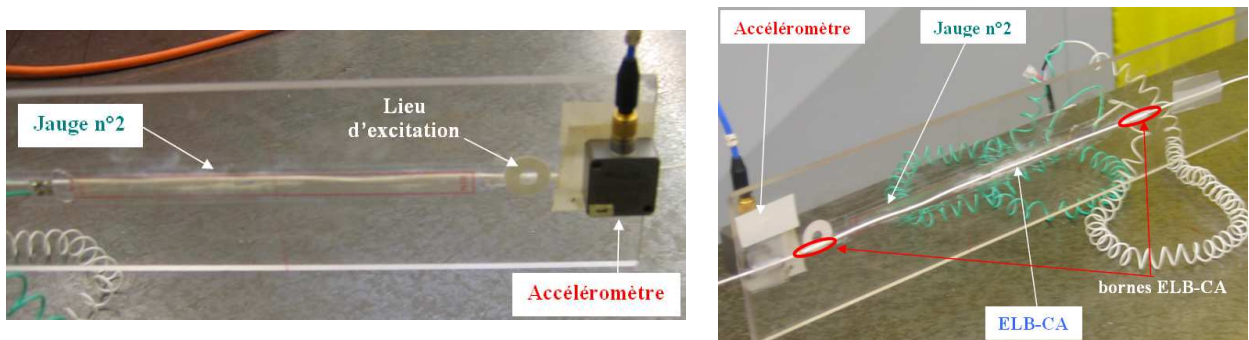


FIGURE 6.13: Positionnement des capteurs au niveau de l'extrémité libre de la poutre.

Dix essais ont été réalisés pour un niveau d'excitation de  $7N$  correspondant à une flèche de  $3.3\text{ mm}$  au niveau du laser. Sur la figure 6.14, les signaux mesurés et leurs TF sont présentés, respectivement pour l'accéléromètre (Fig. 6.14(a) et 6.14(b)), la jauge  $n^\circ 2$  (Fig. 6.14(c) et 6.14(d)) et l'ELB-CA (Fig. 6.14(e) et 6.14(f)).

### 6.3 Confrontation théorie - expérience

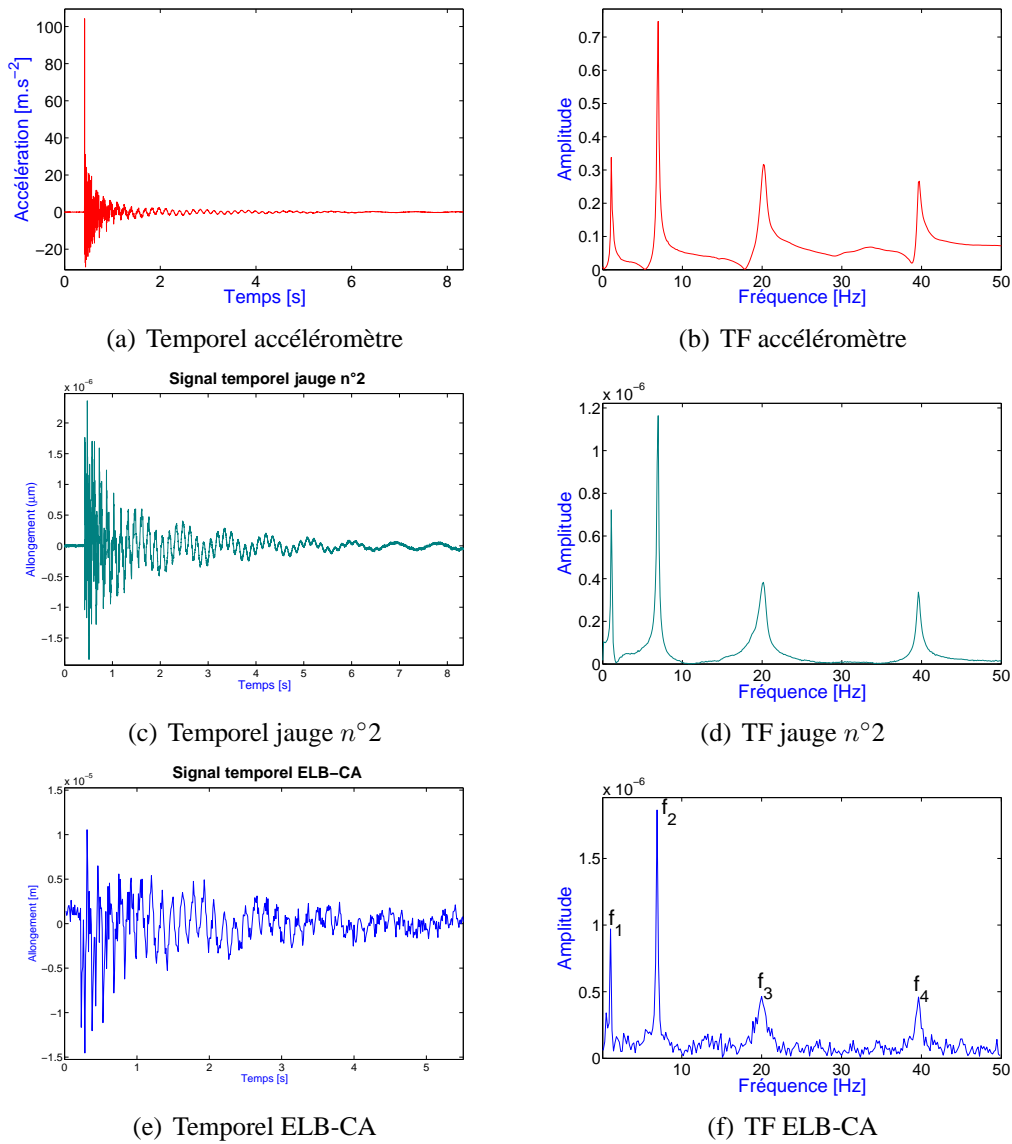


FIGURE 6.14: Signal et TF pour l'accéléromètre, la jauge n°2 et l'ELB-CA avec un choc de 7N à  $x_0 = L$ .

L'analyse modale complète de la structure a été présentée au Chapitre 4. La comparaison entre les fréquences propres expérimentales des quatre premiers modes de la poutre E-L obtenues à partir des différents capteurs et les fréquences propres théoriques est très satisfaisante. L'encastrement réalisé semble donc bien représenter le modèle d'un encastrement théorique. Les différentes fréquences sont répertoriées dans le tableau 6.11.

	$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$f_3$ (Hz)	$f_4$ (Hz)
<b>Accéléromètre</b>	$1.08 \pm 0.12$	$6.96 \pm 0.12$	$20.16 \pm 0.12$	$39.72 \pm 0.12$
<b>Jauge n°2</b>	$1.08 \pm 0.12$	$6.96 \pm 0.12$	$20.16 \pm 0.12$	$39.6 \pm 0.12$
<b>ELB-CA</b>	$1.09 \pm 0.1$	$6.91 \pm 0.1$	$20.00 \pm 0.1$	$39.64 \pm 0.1$
<b>Théorique</b>	1.14	7.16	20.04	39.28

TABLEAU 6.11: Fréquences des quatre premiers modes obtenues à partir des différents capteurs pour la poutre E-L.

La figure 6.15 présente les TF obtenues expérimentalement à partir des signaux de la jauge  $n^{\circ}2$  et de l'ELB-CA (essai  $n^{\circ}4$ ) et celles obtenues numériquement à partir du système d'équations de la poutre (3.75) et de l'équation de la mesure de l'ELB-CA (3.77). Pour la jauge  $n^{\circ}2$ , la même formule a été utilisée en occultant le terme de l'indice de réfraction en prenant  $n = 1$  (le principe de mesure étant électrique et non plus optique comme pour l'ELB-CA). En effet, la jauge étant collée continûment à la surface de la poutre, nous supposons qu'elle mesure la longueur physique  $D_{AB}(t)$  définie en (3.2).

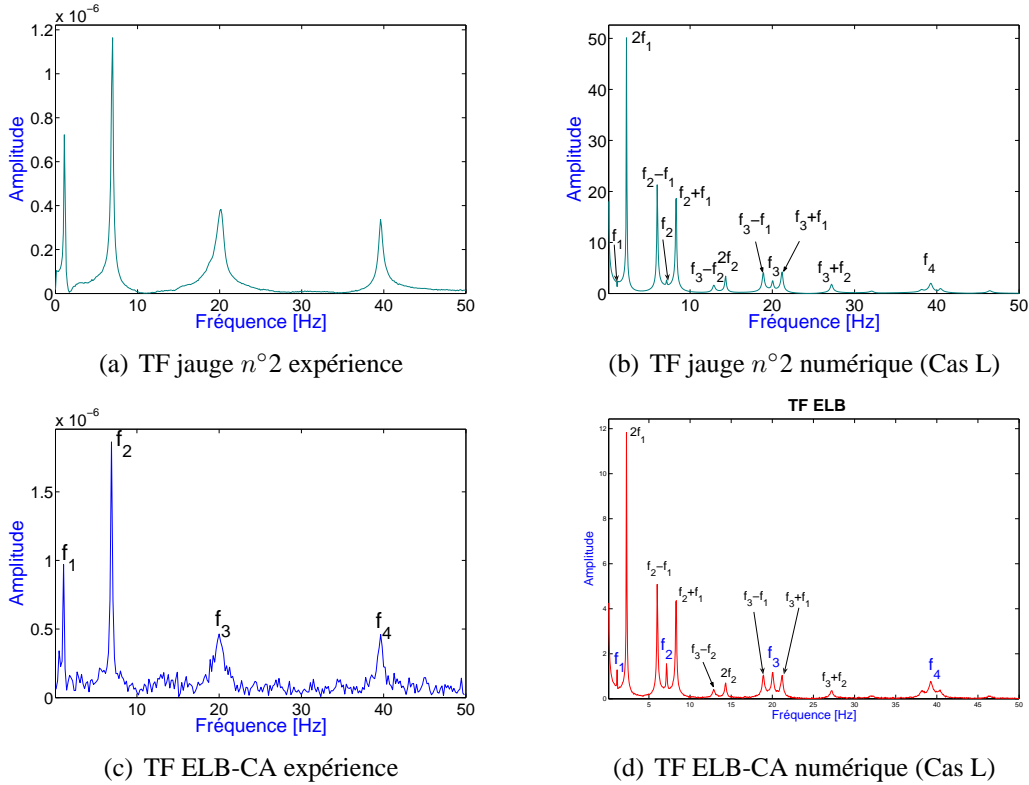


FIGURE 6.15: TF obtenues expérimentalement et numériquement avec l'ELB-CA et la jauge  $n^{\circ}2$  pour la poutre E-L.

Les graphes de la figure 6.15 montrent que, sur les TF obtenues numériquement, l'amplitude des pics supplémentaires est importante et même prépondérante devant l'amplitude des pics des fréquences propres de la structure. Ce résultat n'est absolument pas retrouvé expérimentalement puisqu'aucun pic supplémentaire n'est visible au niveau des TF des signaux de l'ELB-CA et de la jauge  $n^{\circ}2$ .

*Il semble en conséquence que le modèle choisi (cas L) contienne des hypothèses trop restrictives. Pour les identifier, nous avons alors effectué une étude plus simple : le cas statique.*

### 6.3.5 Etude statique

Pour l'étude statique, nous allons comparer les mesures obtenues expérimentalement à partir des signaux de la jauge  $n^{\circ}2$  et de l'ELB-CA et celles obtenues numériquement à partir du système d'équa-

### 6.3 Confrontation théorie - expérience

tions de la poutre (3.75) (en négligeant les termes temporels) et de l'équation de la mesure de l'ELB-CA (3.77).

La figure 6.16 présente l'allure des signaux temporels obtenus à partir de la jauge  $n^{\circ}2$  et de l'ELB-CA.

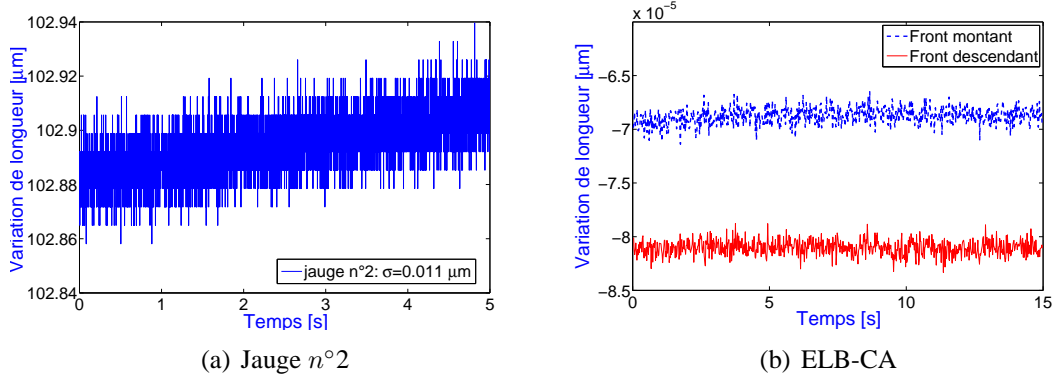


FIGURE 6.16: Réponse temporelle de la jauge  $n^{\circ}2$  et de l'ELB-CA pour l'étude statique (valeur statique = moyenne temporelle).

Nous allons étudier l'évolution de la mesure de la jauge et de l'ELB-CA en fonction de la flèche à l'extrémité de la poutre. Pour cela, cinq niveaux de flèche ont été appliqués à l'extrémité libre de la poutre (abscisse  $x=1\text{ m}$ ) avec un pas de  $5\text{ cm}$ . Au total neuf mesures sont réalisées : état initial  $x=0\text{ cm}$  ensuite  $x=5\text{ cm}$ ,  $10\text{ cm}$ ,  $15\text{ cm}$ ,  $20\text{ cm}$  puis retour à l'état initial en effectuant les mêmes paliers. La mesure pour chaque palier est obtenue en moyennant les signaux temporels (Fig. 6.16).

La figure 6.17 compare les résultats de cette étude obtenus numériquement et expérimentalement.

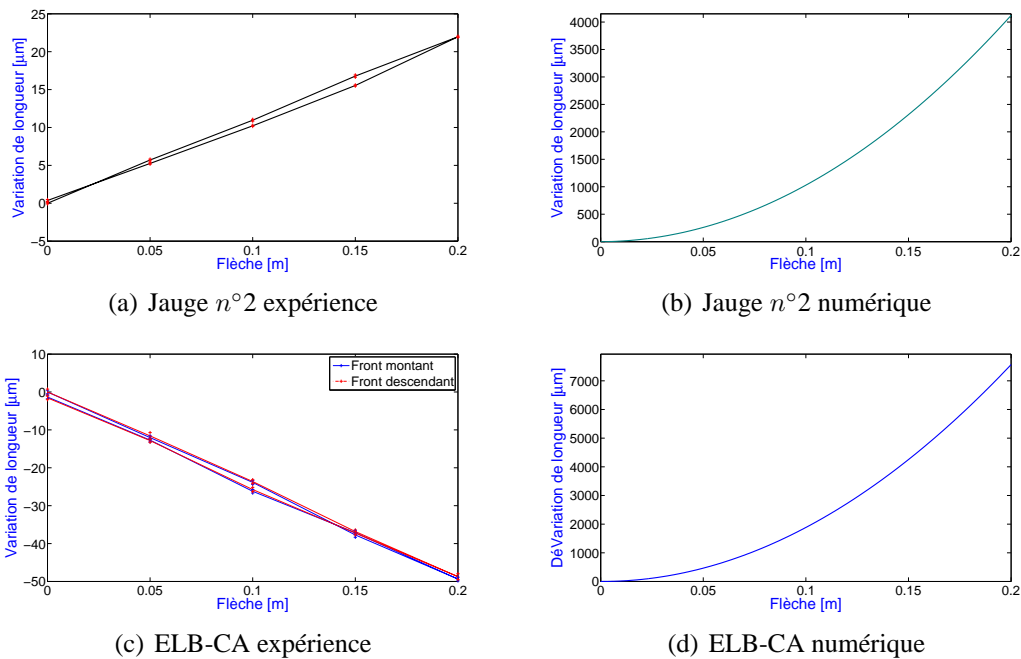


FIGURE 6.17: Evolution des mesures de l'ELB-CA et de la jauge  $n^{\circ}2$ , obtenues numériquement et expérimentalement, en fonction de la flèche imposée à l'extrémité libre de la poutre E-L.

Comme pour l'étude dynamique, les résultats obtenus expérimentalement et numériquement pour l'étude statique ne concordent pas. Par exemple, pour une flèche à l'extrémité de la poutre de 20 cm, l'étude numérique donne une mesure de l'ELB-CA d'environ 7000  $\mu m$  contre 60  $\mu m$  expérimentalement.

Sur la figure 6.18, les photos illustrent la position de l'étude statique de la poutre E-L pour une flèche à l'extrémité égale à 10 cm. Pour ce niveau de flèche très important, correspondant au déplacement transverse ( $v$ ), nous avons également un fort déplacement axial ( $u$ ) d'environ 1 cm.

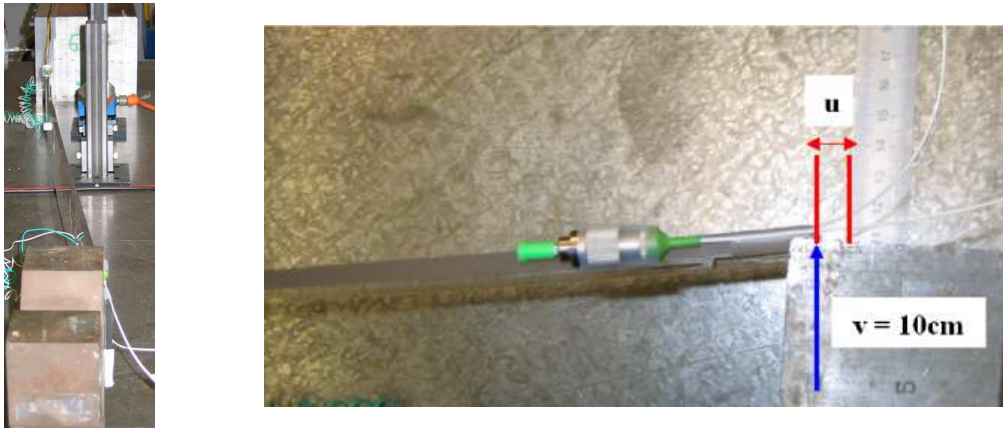


FIGURE 6.18: Photo du dispositif de mise en position statique au niveau de l'extrémité libre de la poutre.

Le déplacement axial est important et n'est donc pas négligeable, contrairement à l'hypothèse définie en 3.4.4. Qu'en est-il lorsque le niveau de flèche de la poutre est beaucoup plus faible, de l'ordre de quelques dixièmes de mm voire quelques mm ? C'est ce à quoi nous allons tenter de répondre dans la troisième et dernière partie du manuscrit.

## 6.4 Conclusion

Dans ce Chapitre, nous avons réalisé des simulations numériques pour le cas linéaire (cas L), qui mettent en évidence l'apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF de la mesure des ELB-CA, ainsi que des essais expérimentaux. Ces essais expérimentaux ont permis de montrer que les calculs effectués dans le cas L ne sont pas valides lorsque le niveau de flèche de la poutre est trop important. En effet, le déplacement axial  $u$  (et les termes qui en découlent,  $u'$  et  $u''$ ) n'est pas négligeable, contrairement à l'hypothèse effectuée pour le cas L.

Nous allons en conséquence étudier la mesure de l'ELB-CA obtenue à partir du système d'équations couplées et non-linéaires (3.73) pour des niveaux de flèche de la poutre importants. Nous allons effectuer la même étude numérique pour le cas G afin de voir si l'on retrouve des résultats similaires à ceux obtenus précédemment pour le cas L, c'est-à-dire l'apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF du signal de l'ELB-CA. Les résultats seront comparés aux résultats obtenus expérimentalement afin de conclure quant à la qualité du modèle à représenter la réalité.

## 6.5 Bibliographie

- [1] Robert P., *Des jauges, des ponts... et une solution de câblage pour chaque cas*, Mesures, 767 (2004) 57-60.

## 6.5 Bibliographie

---

[2] *[http ://www.hbm.fr](http://www.hbm.fr)*

[3] *[http ://www.bksv.com/pdf/BP1702.pdf](http://www.bksv.com/pdf/BP1702.pdf)*





## **Troisième partie**

### **Mesure de l'ELB-CA en non-linéaire**



## Chapitre 7

### Etudes statique et dynamique d'une poutre mince en rotations modérées

---

**C**E CHAPITRE est consacré à l'analyse statique et dynamique d'une poutre mince soumise à des rotations modérées. Le phénomène étudié est celui des non-linéarités géométriques. On s'intéresse à la modélisation de ce phénomène par différents outils de calcul. L'étude réalisée permet de montrer les limites des logiciels commerciaux et de valider la modélisation EF proposée pour représenter le phénomène des non-linéarités géométriques. Trois cas de conditions aux limites sont traités : E-E, A-A et E-L. L'étude de ces trois cas met en évidence les limites du cas Linéaire ainsi que l'influence du couplage entre les déplacements axial et transverse.

Un modèle simplifié de la TF du déplacement axial pour la poutre E-E est défini en linéaire.

Les déplacements axial et transverse obtenus dans ce Chapitre, en statique et en dynamique, seront utilisés au Chapitre suivant afin de calculer la mesure réalisée par un ELB-CA, fixé sur une poutre soumise à des rotations modérées.

---

## Plan du Chapitre 7

---

<b>7.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>197</b>
<b>7.2</b>	<b>Présentation de quelques outils de calcul</b>	<b>197</b>
7.2.1	Code de calcul Matlab	197
7.2.2	Logiciel COMSOL	204
7.2.3	Logiciel MSC Adams	205
<b>7.3</b>	<b>Etude numérique en statique</b>	<b>207</b>
7.3.1	Comparaison des outils de calcul	208
7.3.2	Cas de la poutre E-E	211
7.3.3	Cas de la poutre A-A	212
7.3.4	Cas de la poutre E-L	213
7.3.5	Comparaison entre les cas Linéaire et Général en statique	213
<b>7.4</b>	<b>Etude numérique en dynamique</b>	<b>215</b>
7.4.1	Choix de l'outil de calcul	215
7.4.2	Influence de la discrétisation de la poutre	218
7.4.3	Etudes temporelle et fréquentielle en fonction du nombre de modes trans- verses $N_v$ et axiaux $N_u$ choisis dans la base linéaire	220
7.4.4	Influence du niveau de force sur les déplacements axial et transverse	228
7.4.5	Influence du lieu d'excitation	232
7.4.6	Comparaison entre les cas L et G	232
7.4.7	Autres cas de CL	233
7.4.8	Calcul analytique simplifié du déplacement axial pour une poutre E-E en flexion	234
<b>7.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>238</b>
<b>7.6</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>238</b>

---

## 7.1 Introduction

Au Chapitre précédent, l'étude numérique du cas L a permis d'observer l'apparition de combinaisons de fréquences propres d'une poutre d'Euler-Bernoulli au niveau de la TF de la mesure d'un ELB-CA. Le cas L étant une approximation trop restrictive de la mesure d'un ELB-CA lorsque la poutre est soumise à des rotations modérées (Chapitre 3 en 3.4.4), nous allons donc nous intéresser au phénomène des non-linéarités géométriques pour une poutre d'Euler-Bernoulli. Ainsi, nous allons chercher à savoir si le phénomène observé (apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF) provient de la poutre ou s'il est spécifique à la mesure réalisée par un ELB-CA. Dans ce Chapitre, nous allons étudier les déplacements axial et transverse issus de la résolution du système d'équations couplé et non-linéaire régissant les vibrations de la poutre (cas G). La mesure d'un ELB-CA pour une poutre soumise à des rotations modérées sera étudiée au Chapitre suivant.

Un code de calcul développé sous *Matlab* dans le cadre de la thèse de T.M. Nguyen [1] a été utilisé et comparé à deux logiciels commerciaux. La première section est consacrée à la présentation de ces outils de calcul, permettant la résolution du problème de la poutre soumise à des rotations modérées. La deuxième section traite de l'étude de la poutre en statique. Les outils sont comparés sur le cas de la poutre E-E, et l'un d'entre eux est choisi pour étudier plus en détail la poutre E-E et les autres cas de CL (A-A et E-L). Enfin la dernière section porte sur l'étude dynamique et s'organise de la même manière. Ces études vont permettre de choisir l'outil le plus adapté à la résolution du problème en statique et/ou en dynamique.

## 7.2 Présentation de quelques outils de calcul

Dans cette première section, nous allons présenter les outils de calcul utilisés pour les études statique et dynamique d'une poutre en rotations modérées. La masse volumique  $\rho$ , le module d'Young  $E$ , l'inertie  $I$  et la section  $S$  de la poutre sont constants.

Dans un premier temps, les équations et la modélisation EF sur lesquelles est basé le code de calcul développé sous *Matlab* dans le cadre de la thèse de T.M. Nguyen [1] vont être détaillées. Le code de calcul a été adapté aux besoins de l'étude, notamment en intégrant d'autres cas de CL et en prenant un soin tout particulier aux résultats obtenus pour le déplacement axial. En effet, si habituellement on ne prête pas énormément d'attention au déplacement axial, il en est tout autrement lorsque l'on s'intéresse aux mesures d'extensométrie où le déplacement axial joue un rôle important, qui ne peut pas être négligé (voir Chapitre 6).

Ensuite, les autres outils utilisés (*Femlab* et *Adams*) sont présentés plus brièvement.

### 7.2.1 Code de calcul Matlab

Avant de passer à la modélisation EF, nous allons écrire les équations de la poutre en rotations modérées (3.73) que nous avons énoncées en (3.4.3).

#### Déformations de la poutre

Soient  $u(x, t)$  et  $v(x, t)$  les déplacements axial et transverse respectifs de la poutre dans le plan  $(O, x, y)$ . Rappelons les expressions de la déformation axiale  $\varepsilon_{xx}^M$  et de la courbure  $C(x)$  déterminées

respectivement, en (3.38) et (3.85) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^M &= u' + \frac{1}{2}[u'^2 + v'^2] \\ C &= \frac{(1 + u')v'' - u''v'}{[(1 + u')^2 + v'^2]^{3/2}}\end{aligned}$$

Pour les structures minces, appliquons l'hypothèse des petites déformations et rotations modérées définie en 3.4. Il vient alors :

$$u'^2 \ll u' \ll 1 \quad (7.1)$$

$$v'^2 \ll v' \ll 1 \quad (7.2)$$

Les équations (3.38) et (3.85) sont alors simplifiées et réécrites comme suit :

$$\varepsilon_{xx}^M \simeq u' + \frac{v'^2}{2} \quad (7.3)$$

$$C \simeq v'' \quad (7.4)$$

### Energie potentielle - Energie cinétique

L'énergie potentielle  $\zeta_p$  s'écrit [2] :

$$\zeta_p = \frac{1}{2} \int_0^L (MC + N\varepsilon_{xx}^M) dx \quad (7.5)$$

où  $L$ ,  $M$  et  $N$  sont respectivement la longueur, le moment d'inertie et l'effort normal de la poutre.

Les expressions de  $M$  et  $N$  sont données par :

$$M = EIC = EIv'' \quad (7.6)$$

$$N = ES\varepsilon_{xx}^M = ES \left( u' + \frac{v'^2}{2} \right) \quad (7.7)$$

où  $E$ ,  $S$  et  $I$  sont respectivement de module d'Young de la poutre, l'aire et le moment d'inertie de la section.

En introduisant (7.3), (7.4), (7.6) et (7.7) dans (7.5), on obtient :

$$\zeta_P = \frac{EI}{2} \int_0^L v''^2 dx + \frac{ES}{2} \int_0^L u'^2 dx + \frac{ES}{2} \int_0^L u'v'^2 dx + \frac{ES}{8} \int_0^L v'^4 dx \quad (7.8)$$

L'énergie cinétique  $\zeta_c$  de la poutre est définie par [2]

$$\zeta_c = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} (\dot{u} + \dot{v})^2 d\Omega = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u} + \dot{v})^2 dx \quad (7.9)$$

où  $\dot{u}$  et  $\dot{v}$  représentent les dérivées premières temporelles des déplacements, respectivement axial et transverse, et  $\rho$  la masse volumique de la poutre.

### Formulation variationnelle faible - Equation du mouvement

Soient  $\delta u$  et  $\delta v$  les champs de déplacements virtuels respectivement axiaux et transverses et  $f$  la force extérieure appliquée à la poutre. D'après le principe d'Hamilton [2], la formulation variationnelle faible du problème est :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \rho S \ddot{u} \delta u + \rho S \ddot{v} \delta v + ES u' \delta u' + EI v'' \delta v'' + ES u' v' \delta v' + \frac{ES}{2} v'^2 \delta u' + \frac{ES}{2} v'^3 \delta v' \right] dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f dx dt \quad (7.10)$$

La force  $f$  se décompose en deux termes : l'une axiale  $f_u$  et l'autre transverse  $f_v$ . Puisque la formulation précédente est valable pour tout champ de déplacements virtuels  $\delta u$  et  $\delta v$ , nous obtenons alors deux équations :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \rho S \ddot{v} \delta v + EI v'' \delta v'' + ES u' v' \delta v' + \frac{ES}{2} v'^3 \delta v' \right] dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f_v dx dt \quad (7.11)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \rho S \ddot{u} \delta u + ES u' \delta u' + \frac{ES}{2} v'^2 \delta u' \right] dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f_u dx dt \quad (7.12)$$

En posant  $T = EI v^{(3)}$ , l'effort tranchant, puis en réalisant une intégration par parties, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta v \left\{ \rho S \ddot{v} + EI v^{(4)} - ES \left[ \left( u' + \frac{1}{2} v'^2 \right) v'' + (u'' + v' v'') v' \right] \right\} dx dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} ([M \delta v']_0^L + [T \delta v]_0^L + [N v' \delta v]_0^L) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f_v dx dt \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta u [\rho S \ddot{u} - ES(u'' + v' v'')] dx dt + \int_{t_1}^{t_2} [N \delta u]_0^L = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f_u dx dt \quad (7.14)$$

L'application du PPV permet également d'obtenir ces deux équations. Finalement, le système d'équations d'équilibre régissant le mouvement de la poutre **en rotations modérées**, déjà présenté en (3.73), se déduit des équations (7.13) et (7.14) :

$$\boxed{\begin{aligned} \rho S \ddot{v} + EI v^{(4)} - ES \left[ \left( u' + \frac{1}{2} v'^2 \right) v'' + (u'' + v' v'') v' \right] &= f_v \\ \rho S \ddot{u} - ES(u'' + v' v'') &= f_u \end{aligned}} \quad (7.15)$$

### Discrétisation par éléments finis

La poutre est discrétisée en  $N_e$  éléments. Les déplacements axial et transverse d'un élément  $e$  sont approchés par [3] :

$$v^e(x, t) \simeq \sum_{i=1}^4 \phi_i(x) s_i(t) \quad (7.16)$$

$$u^e(x, t) \simeq \sum_{i=1}^2 \psi_i(x) w_i(t) \quad (7.17)$$

où  $s_i(t)$  et  $w_i(t)$  sont des coordonnées généralisées associées ( $s_i(t)$  contient le déplacement transverse  $p_i(t)$  et la rotation  $\theta_i(t)$ ).

$\phi_i(x)$  et  $\psi_i(x)$  sont des fonctions d'interpolation (resp. cubiques et linéaires) associées respectivement au déplacement transverse et à la rotation des sections, et au déplacement axial.

Pour le déplacement transverse, les fonctions d'interpolation  $\phi_i(x)$  sont définies par [3] :

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \frac{(x-L_e)^2(2x+L_e)}{L_e^3} \\ \phi_2(x) &= \frac{x(x-L_e)^2}{L_e^2} \\ \phi_3(x) &= \frac{x^2(3L_e-2x)}{L_e^3} \\ \phi_4(x) &= \frac{x^2(x-L_e)}{L_e^2}\end{aligned}\tag{7.18}$$

et pour le déplacement axial, les fonctions d'interpolation  $\psi_i(x)$  par [3] :

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \frac{(L_e-x)}{L_e} \\ \psi_2(x) &= \frac{x}{L_e}\end{aligned}\tag{7.19}$$

où  $L_e$  est la longueur de l'élément fini.

La figure 7.1 présente les fonctions d'interpolation  $\phi_i(x)$  et  $\psi_i(x)$  pour un élément.

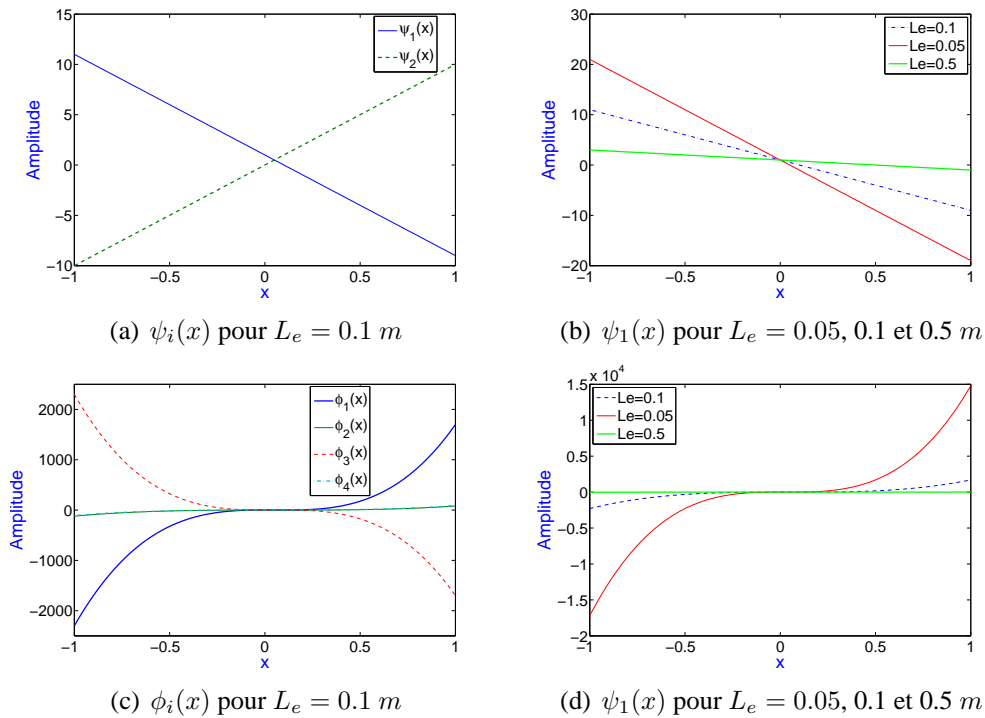


FIGURE 7.1: Fonctions d'interpolation  $\phi_i(x)$  et  $\psi_i(x)$  pour un élément fini de la poutre.

Ces fonctions sont introduites dans la formulation variationnelle faible donnée précédemment. On obtient alors les matrices élémentaires (de l'élément  $e$ ) de masse, de rigidité linéaire, de rigidité quadratique et de rigidité cubique associées aux déplacements transverse (représenté par l'indice  $(.)^v$ ) et



axial (représenté par l'indice  $(.)^u$ ) qui, après assemblage et prise compte des CL, permettent d'obtenir le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} [M^v] \ddot{s} + [K^v] s + K_2^v(s, w) + K_3^v(s) \\ [M^u] \ddot{w} + [K^u] w + K_2^u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_v \\ F_u \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

avec :  $s$  et  $w$ , les vecteurs de déplacements globaux. Comme précisé précédemment,  $s$  contient les vecteurs de déplacements transverses  $p$  et les vecteurs des angles de rotation  $\theta$ .

$[M^v]$ ,  $[M^u]$ ,  $[K^v]$  et  $[K^u]$ , les matrices de masse et de rigidité linéaire.

$K_2^v(s, w)$  et  $K_3^v(s)$ , les vecteurs caractérisant les non-linéarités quadratiques et cubiques associées au déplacement transverse.

$K_2^u(s)$ , le vecteur caractérisant les non-linéarités quadratiques associés au déplacement axial.

$$M_{ij}^v = \rho S \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (7.21)$$

$$M_{ij}^u = \rho S \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (7.22)$$

$$K_{ij}^v = EI \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx \quad (7.23)$$

$$K_{ij}^u = ES \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx \quad (7.24)$$

$$K_{2,i}^v = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^2 G_{2,ijk}^v s_j w_k \quad (7.25)$$

$$K_{2,i}^u = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 G_{2,ijk}^u s_j s_k \quad (7.26)$$

$$K_{3,i}^v = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 G_{3,ijkl}^v s_j s_k s_l \quad (7.27)$$

où

$$G_{2,ijk}^v = ES \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i'(x) \phi_j'(x) \psi_k'(x) dx \quad (7.28)$$

$$G_{2,ijk}^u = \frac{ES}{2} \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i'(x) \phi_j'(x) \phi_k'(x) dx \quad (7.29)$$

$$G_{3,ijkl}^v = \frac{ES}{2} \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i'(x) \phi_j'(x) \phi_k'(x) \phi_l'(x) dx \quad (7.30)$$

En regroupant les vecteurs des coordonnées généralisées en un seul vecteur  $U$  tel que

$$U = [p_1 \theta_1 w_1] \quad \cdots \quad [p_{N_e+1} \theta_{N_e+1} w_{N_e+1}]^T \quad (7.31)$$

on obtient alors une seule équation de vibration pour la poutre :

$$[M] \ddot{U} + [K] U + K_2(U) + K_3(U) = F \quad (7.32)$$

Elle est habituellement projetée sur une base modale linéaire et tronquée :

$$U = [\phi]q \quad (7.33)$$

où  $[\phi]$  est une matrice de dimension  $3(N_e - 1) \times n$  (avec  $n < 3(N_e - 1)$ ), contenant les vecteurs propres réels qui sont obtenus en résolvant le problème linéaire associé :  $\{-\omega_i^2[M] + [K]\} \phi_i = 0$ .

La représentation en coordonnées modales linéaires de l'équation de vibration ci-dessus s'exprime finalement par :

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk} q_j q_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijkl} q_j q_k q_l = f_i \quad \text{avec } i = 1..n \quad (7.34)$$

où  $\omega_i$  est la pulsation propre linéaire

$a_{ijk}$  et  $b_{ijkl}$  sont des coefficients caractérisant respectivement les non-linéarités quadratiques et cubiques.

Plusieurs remarques peuvent être faites sur l'équation obtenue :

- Les non-linéarités géométriques dues aux rotations modérées sont des fonctions quadratiques et cubiques des déplacements.
- Les amortissements peuvent être introduits dans le modèle par l'intermédiaire de coefficients d'amortissements modaux identifiés à partir de données expérimentales, grâce par exemple à l'analyse par ondelettes.

La figure 7.2 présente un exemple de poutre discrétisée.

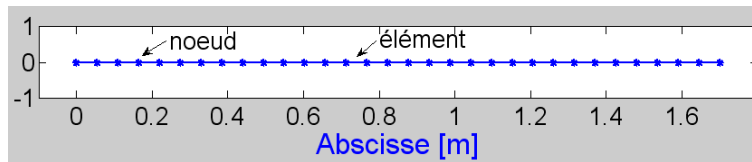


FIGURE 7.2: Modélisation d'une poutre avec des EF de poutre.

### Résolution du problème non linéaire

Pour obtenir une classe particulière des solutions, les solutions périodiques, les méthodes de résolution se divisent en quatre groupes présentés dans [1] :

- Méthodes de perturbation
- Méthode de type Galerkin
- Techniques asymptotiques
- Méthode de tir

On peut noter que la plupart des méthodes de calcul des solutions périodiques ne s'applique qu'à des systèmes non-amortis.

Nous avons traité le cas de réponses amorties et, pour cela, les amortissements modaux ont été choisis arbitrairement pour les simulations numériques. Pour effectuer une comparaison théorie-expérience, ils peuvent être identifiés à partir des réponses expérimentales à l'aide de la TOC. Ils sont alors introduits dans les équations du mouvement suivant l'hypothèse de Basile :

$$[M]\ddot{U} + [C]\dot{U} + [K]U + K_2(U) + K_3(U) = F \quad (7.35)$$

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk} q_j q_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijkl} q_j q_k q_l = f_i \quad \text{avec } i = 1..n \quad (7.36)$$

La méthode de résolution numérique de Runge-Kutta permet ensuite de calculer les réponses amorties.

Pour le cas des petites rotations (cas L défini en 3.4.4), les vecteurs caractérisant les non-linéarités quadratiques et cubiques associées aux déplacements axial et transverse sont occultés. On retrouve alors le système dynamique classique :

$$[M]\ddot{U} + [C]\dot{U} + [K]U = F \quad (7.37)$$

En statique, les équations du système définies en (7.15) se simplifient :

$$\frac{I}{S} v^{(4)} - (u' + \frac{1}{2} v'^2) v'' - F_u v' = F_v \quad (7.38)$$

$$u'' + v' v'' = F_u \quad (7.39)$$

avec  $F_u = \frac{f_u}{ES}$  et  $F_v = \frac{f_v}{ES}$

Dans notre étude, nous allons nous intéresser à une excitation de la poutre uniquement transverse. Nous aurons alors  $f_u = 0$ , ce qui permet de simplifier les équations (7.38) et (7.39) :

$$EI v^{(4)} - ES(u' + \frac{1}{2} v'^2) v'' = f_v \quad (7.40)$$

$$u'' + v' v'' = 0 \quad (7.41)$$

Dans ce cas-là, d'après l'équation (7.41), la quantité  $u' + \frac{1}{2} v'^2 / 2$  sera constante. Une solution semi-analytique, permettant d'obtenir des solutions numériques «exactes», peut alors être déterminée [1].

Après discrétisation par EF (7.32), il vient :

$$[K]U + K_2(U) + K_3(U) = F \quad (7.42)$$

et pour le cas L

$$[K]U = F \quad (7.43)$$

En statique, ce code EF a été comparé aux solutions semi-analytiques obtenues pour le cas d'une poutre mince E-L avec des déplacements imposés aux limites [1]. Les déplacements axial et transverse,  $u(x)$  et  $v(x)$ , ainsi que l'angle,  $\theta(x)$ , obtenus par le code EF coïncident avec ceux obtenus à partir de la solution semi-analytique.

Nous souhaitons valider les résultats obtenus par ce code de calcul en statique et en dynamique, pour différentes CL de la poutre (E-E, A-A et E-L). Pour cela, nous disposons de deux logiciels commerciaux, *Femlab* et *Adams*, que nous utiliserons en «boîte noire». Suivant les avantages et les inconvénients de ces trois outils de calcul, un choix sera effectué pour réaliser les études numériques en statique et en dynamique.

Présentons brièvement les principes sur lesquels reposent les logiciels *Femlab* et *Adams* ainsi que les méthodes et équations utilisées pour les études statique et dynamique de la poutre en rotations modérées (cas G).

### 7.2.2 Logiciel COMSOL

*Femlab*, qui a été renommé COMSOL Multiphysics, est un environnement interactif pour la modélisation d'applications industrielles et scientifiques fondé sur les Equations aux Dérivées Partielles (EDP) [4], équations fondamentales pour la description de très nombreux phénomènes physiques (couplés ou non).

Un modèle de poutre en *grandes déformations* est proposé dans le module Mécanique des structures<sup>1</sup> du logiciel (modèle *large deformation beam*). Ce module permet de résoudre des modèles statiques, dynamiques et d'effectuer des analyses paramétriques, quasi-statiques et fréquentielles. Le terme de *grandes déformations* utilisé dans *Femlab* est associé aux phénomènes des non-linéarités géométriques. Dans le manuscrit, nous parlons de rotations modérées pour les non-linéarités géométriques. Ce modèle a donc été utilisé pour le cas de la poutre en rotations modérées en statique et en dynamique.

Au niveau du logiciel, pour les rotations modérées, le tenseur des déformations est le tenseur des déformations de Green dont les termes ont été rappelés en (3.4) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right)$$

avec  $U$  le vecteur déformation ou vecteur déplacement.

En linéaire, le tenseur des contraintes est le tenseur de Cauchy et le tenseur des déformations est le tenseur linéarisé :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Pour les rotations modérées, le tenseur des contraintes est remplacé par le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff  $S$ . C'est un tenseur symétrique, identique au tenseur de Cauchy pour les petites déformations mais dont les directions suivent le mouvement de la structure. Il est défini par

$$S = F^{-1}P \quad (7.44)$$

où  $P$  est le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff, qui est un tenseur non-symétrique utilisé seulement pour les modèles de matériau hyperélastique, et  $F$  est le gradient de déformation défini par

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_i} dx'_i = F dx'_i \quad (7.45)$$

où  $x'_i = x_i + U$  avec  $x_i$  et  $x'_i$ , respectivement les coordonnées d'une particule dans la configuration initiale et déformée.

Les tenseurs des contraintes et des déformations sont alors définis par :

$$\sigma = J^{-1} P F^T = J^{-1} F S F^T \quad (7.46)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (F^T F - I) \quad (7.47)$$

avec  $J = \det(F)$ .

Un modèle de poutre en rotations modérées est proposé dans *Femlab* pour le cas statique. Il est discrétisé avec des éléments finis 2D. Les éléments sont des éléments de Lagrange quadratiques avec un maillage triangulaire. Dans ce cas, les points nodaux sont situés aux sommets et aux milieux des côtés de chaque triangle du maillage, soient six noeuds par éléments. Pour chacun de ces noeuds  $p_i$ , il existe un degré de liberté  $u_i = U(p_i)$  et une fonction de la base  $\Psi_i$ . La restriction de cette fonction à un élément du maillage est un polynôme de degré 2 dans le système de coordonnées locales tel que  $\Psi_i = 1$  au noeud  $i$  et  $\Psi_i = 0$  aux autres noeuds. Ainsi les fonctions de la base sont continues et il vient :

$$U = \sum_i u_i \Psi_i \quad (7.48)$$

Les analyses statique et dynamique ont été réalisées à partir de ce modèle. Faute de temps, le modèle proposé pour le cas statique a également été utilisé pour le cas dynamique. Il aurait été intéressant de développer avec *Femlab* un modèle comprenant des éléments finis de poutre (1D) prenant en compte l'effet des non-linéarités géométriques. Pour l'étude statique, une étude paramétrique avec la valeur de la force comme paramètre a été réalisée. En dynamique, le cas d'une poutre excitée par un choc a été simulé. Le modèle d'amortissement utilisé est un modèle de Rayleigh. Les solveurs choisis par défaut ont été utilisés (solveurs linéaire et nonlinéaire en statique et *Time dependent solver* en dynamique, pour plus de détails consulter [5]).

La figure 7.3 présente un exemple de maillage obtenu avec *Femlab*.

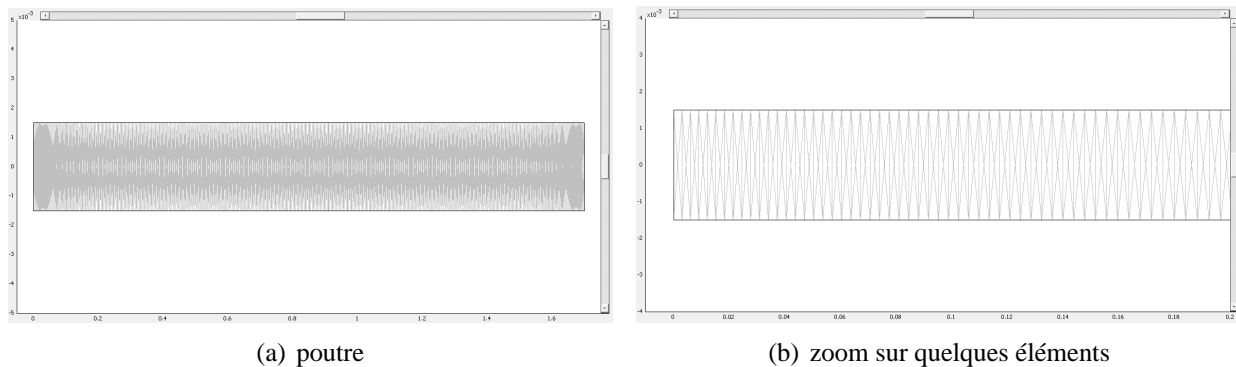


FIGURE 7.3: Modélisation d'une poutre sous *Femlab*.

### 7.2.3 Logiciel MSC Adams

Ce logiciel est un module de MSC Software (dont *Nastran* et *Patran* sont des modules plus connus) basé sur la théorie des systèmes multicorps, également appelés systèmes mécaniques articulés. Il permet notamment de faire des études du fonctionnement d'un mécanisme aux corps rigides ou flexibles, de valider les efforts aux liaisons, les vitesses en un point, les modes propres. Les simulations peuvent être effectuées pour des problèmes en cinématique, statique, quasi-statique et dynamique. Pour plus de renseignements sur le logiciel et ses possibilités, on se référera à [6].

Le concept de système multicorps est utilisé en mécanique pour modéliser le comportement dynamique de corps rigides et/ou flexibles connectés les uns aux autres par des liaisons mécaniques, chacun de ses corps décrivant de grands déplacements à la fois en translation et en rotation. Un sys-

tème multicorps est donc un système composé de plusieurs parties rigides ou flexibles, appelées corps, qui sont reliées entre elles par des articulations (Fig. 7.4).

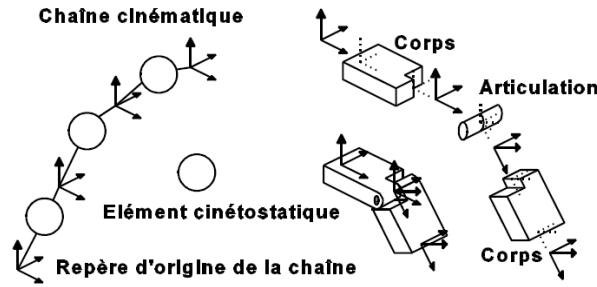


FIGURE 7.4: Exemple de structure topologique d'un système multicorps.

L'analyse des systèmes multicorps se retrouve aujourd'hui dans de nombreux domaines techniques, tant au niveau de la recherche que de l'industrie. On citera en particulier la robotique et la dynamique des véhicules, guidés ou non. Grâce aux moyens de calculs informatiques actuels et à la performance des codes de calculs modernes, il est possible de modéliser, simuler, analyser et optimiser des systèmes comportant jusqu'à plusieurs milliers de corps interconnectés.

Quelle que soit l'application envisagée, l'analyse commence par l'étape de modélisation consistant à reconstituer le système à partir d'un certain nombre d'éléments standard, parmi lesquels on trouve toujours : des corps (ou solides) rigides ou flexibles, des liaisons cinématiques et divers éléments de force (ressort, amortisseur...).

On distingue deux problèmes classiques dans l'analyse des systèmes multicorps :

- Le problème dynamique inverse qui concerne plutôt le contrôle des robots.
- Le problème dynamique direct qui concerne la simulation de systèmes multicorps, quels qu'ils soient.

Le problème dynamique direct consiste à déterminer les accélérations généralisées,  $\ddot{q}$ , lorsque le système est soumis aux forces articulaires,  $Q$ , dans une configuration connue en terme de valeur de coordonnées généralisées,  $q$ , et de leurs dérivées premières,  $\dot{q}$ . On peut l'exprimer par l'équation globale suivante :

$$\ddot{q} = \ddot{q}(q, \dot{q}, Q) \quad (7.49)$$

Les accélérations généralisées  $\ddot{q}$  et les forces articulaires  $Q$  dépendent linéairement les unes des autres. Cette dépendance est exprimée par la relation suivante qui correspond aux équations du mouvement du système

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}, F_{ext}, L_{ext}, g) = Q \quad (7.50)$$

où  $M(q)$  représente la matrice de masse généralisée du système,  $c(q, \dot{q}, F_{ext}, L_{ext}, g)$  regroupe les termes gyroscopiques, de Coriolis, de gravité, les forces et couples extérieurs appliqués sur le corps ainsi que la gravité  $g$ .

Dans la plupart des cas, les équations du mouvement sont accompagnées d'un ensemble d'équations supplémentaires qui expriment les relations entre les coordonnées généralisées. Ce sont des équations de contraintes. Le nombre et la nature des équations de contraintes dépendent essentiellement du choix des coordonnées, de la structure du système et des conditions auxquelles le système

### 7.3 Etude numérique en statique

est soumis. Ces équations de contraintes sont algébriques et généralement non-linéaires. On les écrit souvent sous la forme implicite suivante :

$$h(q) = 0 \quad (7.51)$$

L'ensemble des équations nécessaires à l'étude du mouvement d'un système multicorps soumis à des contraintes est alors

$$\boxed{\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}, F_{ext}, L_{ext}, g) &= Q + J(q)^T \lambda \\ h(q) &= 0 \end{aligned}} \quad (7.52)$$

où  $J(q) = \frac{\partial h(q)}{\partial \dot{q}}$  est la matrice Jacobienne associée aux contraintes et  $\lambda$  le vecteur des multiplicateurs de Lagrange.

Pour la résolution de ce système, plusieurs choix peuvent être effectués pour les coordonnées, les formalismes utilisés, les méthodes de traitement des équations de contraintes et les formulations des équations du mouvement.

L'approche topologique utilisée dans *Adams* est une approche en coordonnées cartésiennes. Elle consiste à éclater le système en ses différents corps et à exprimer leur position, leur orientation en termes de coordonnées cartésiennes de translation et de rotation, les liaisons étant toutes exprimées sous formes d'équations de contraintes. Chaque corps possède six degrés de liberté qui lui sont propres et toutes les liaisons sont traitées de façon uniforme, si bien que l'écriture des équations dynamiques est très systématique.

Pour plus de détails sur la théorie des systèmes multicorps, on se référera à [7][8][9][10]. La figure 7.5 présente un exemple de modélisation réalisée avec *Adams*.

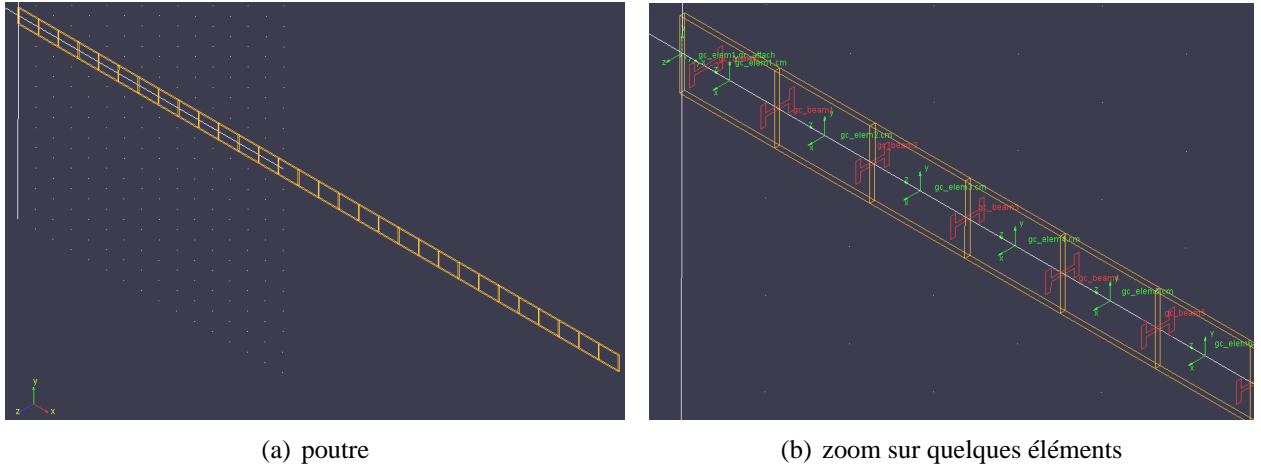


FIGURE 7.5: Modélisation d'une poutre sous *Adams*.

## 7.3 Etude numérique en statique

Dans un souci d'homogénéité, les valeurs des caractéristiques de la poutre choisies pour l'étude statique sont celles indiquées dans le tableau 7.1 (module d'Young et masse volumique de l'acier prédéfinis dans *Adams*).

Longueur	Epaisseur	Hauteur	Module d'Young	Densité	Inertie
$L(m)$	$e(m)$	$h(m)$	$E(GPa)$	$\rho(kg \cdot m^{-3})$	$I(m^4)$
1.7	0.04	0.003	207	7801	$9 \cdot 10^{-11}$

TABLEAU 7.1: Caractéristiques de la poutre.

Les trois outils vont être comparés pour le cas de la poutre E-E. L'étude de ce cas de CL de la poutre va permettre de mettre en évidence les différences entre ces outils de calcul et ainsi de choisir celui qui est le plus apte à résoudre le problème en statique. Les résultats obtenus à partir du logiciel choisi seront ensuite présentés pour les autres cas de CL : A-A et E-L. Nous désignerons abusivement le code EF implémenté sous *Matlab* par l'appellation *Matlab* et les autres logiciels par leurs noms, à savoir *Adams* et *Femlab*.

### 7.3.1 Comparaison des outils de calcul

Pour la comparaison statique sur le cas de la poutre E-E, une échelle de force de 0 à 20  $N$ , discrétisée en 400 points, soit un pas de force de 0.05  $N$ , a été appliquée au point d'abscisse  $x_0 = 0.88$   $m$ . Pour *Matlab*, la poutre est discrétisée en 31 éléments contre 30 pour *Adams*. Le modèle de poutre discrétisé sous *Matlab* comprend donc 32 noeuds moins ceux bloqués aux extrémités soit 30 noeuds et donc 180 ddls. Pour *Adams*, les points de discrétisation (repères associés à l'élément) se situent au milieu des éléments, il y a donc autant de noeuds que d'éléments soit 30 noeuds. Pour *Femlab*, le modèle de poutre est discrétisé avec des éléments 2D (maillage triangulaire à 6 noeuds) et comprend 941 éléments et 5412 ddls. Ensuite en post-traitement, les résultats sont interpolés et lissés sur une grille régulière de 30 points d'ordonnée  $y = 0$ . Les abscisses des points de discrétisation de la poutre sous *Matlab* ne correspondant pas tout à fait à celles obtenues avec *Femlab* et *Adams*, une interpolation par spline est alors effectuée pour obtenir les mêmes points de discrétisation.

La figure 7.6 présente les déplacements axial et transverse obtenus par les trois outils de calcul pour différents niveaux de force.



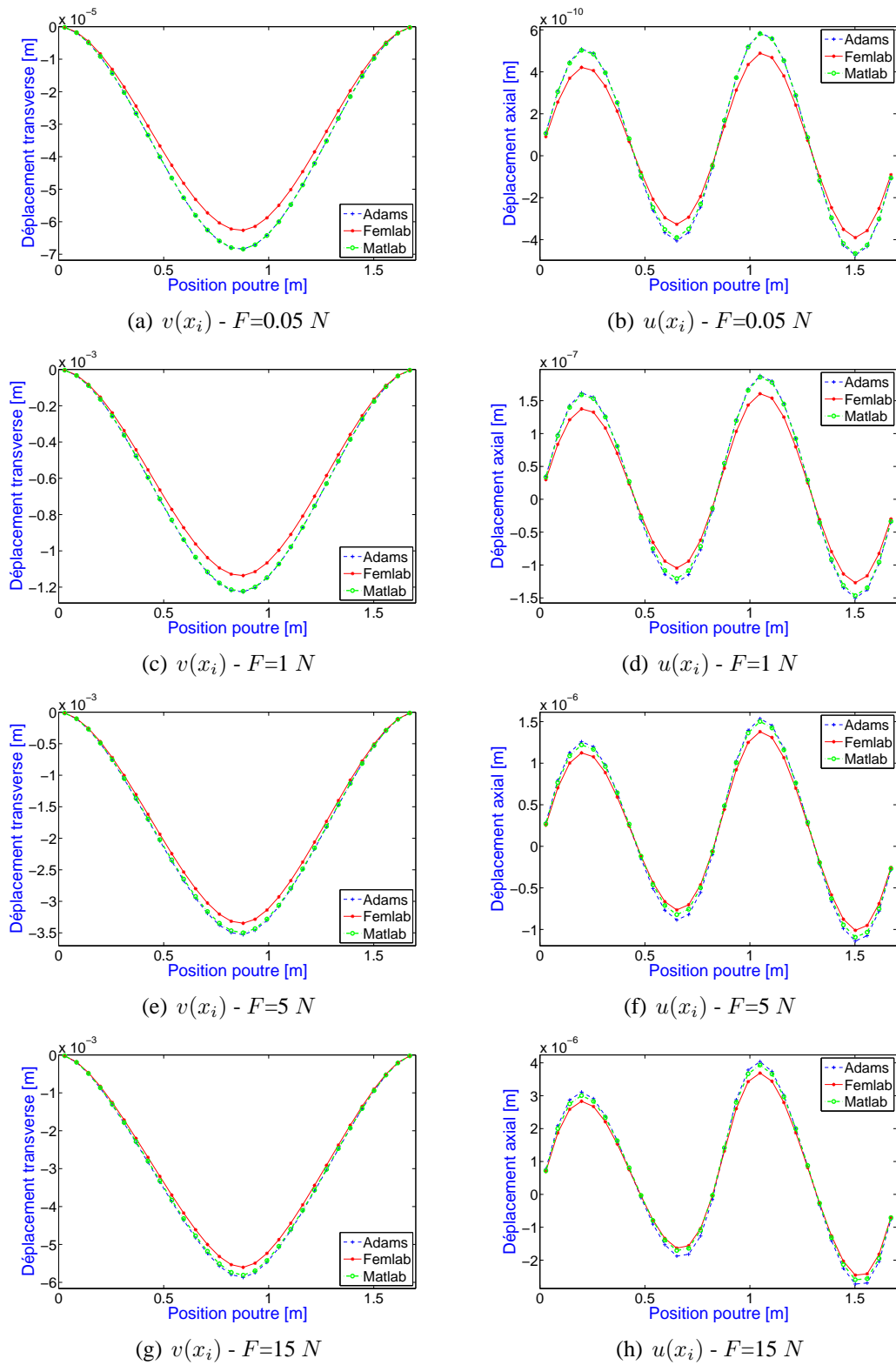


FIGURE 7.6: Déplacements axial et transverse de la poutre E-E en statique obtenus à partir de *Adams*, *Femlab* et *Matlab* pour différents niveaux de force.

En comparant les résultats obtenus à niveau de force constant, il s'avère que les déplacements transverse issus de *Matlab* et *Adams* sont similaires, par contre ceux obtenus avec *Femlab* diffèrent

légèrement : la flèche est inférieure aux valeurs obtenues avec les autres outils. Cet écart diminue lorsque la force augmente (écart pour la flèche maximale de 8.5% pour  $F = 0.05 \text{ N}$ , 6.9% pour  $F = 1 \text{ N}$ , 4.3% pour  $F = 5 \text{ N}$ , 4.1% pour  $F = 15 \text{ N}$ ). Il peut s'expliquer par la différence des modélisations EF de la poutre utilisées : linéique (1D) pour *Adams* et *Matlab*, et surfacique (2D) pour *Femlab*. La force appliquée n'a pas la même répercussion sur les deux types de modélisation. En effet, pour la modélisation 2D la force est appliquée à la surface de la poutre et non au niveau de l'axe neutre comme pour la modélisation 1D. Ainsi, la force appliquée au niveau de l'axe neutre pour la modélisation 2D est moins importante.

Pour le déplacement axial, une légère différence est encore présente entre les résultats obtenus avec *Adams* et *Femlab*. Elle diminue également lorsque le niveau de force augmente (écart maximal de 16.3% pour  $F = 0.05 \text{ N}$ , 13.9% pour  $F = 1 \text{ N}$ , 9.2% pour  $F = 5 \text{ N}$  et 7.8% pour  $F = 15 \text{ N}$ ). Pour *Matlab*, lorsque le niveau de force appliqué est faible (Fig. 7.6(b)), le déplacement axial coïncide presque avec celui obtenu avec *Adams*. Par contre, lorsque la force augmente, il s'en éloigne de plus en plus et se rapproche de celui obtenu par *Femlab* (Fig. 7.6(h)), en particulier au niveau des zones de compression maximale (proches des abscisses  $x = 0.65 \text{ m}$  et  $x = 1.5 \text{ m}$ ).

Au Chapitre 8, nous nous intéresserons au niveau de la flèche maximale obtenu pour la poutre E-E et non à la force appliquée à la poutre. Nous allons donc choisir le déplacement transverse (ou flèche) maximal de la poutre  $v_{\max}$  pour la comparaison. Les déplacements axial et transverse obtenus par les trois outils pour une flèche maximale  $v_{\max}=6 \text{ mm}$  (obtenue pour une force de 15.8 N pour *Adams*, 17.7 N pour *Femlab* et 16.2 N pour *Matlab*) sont présentés sur la figure 7.7.

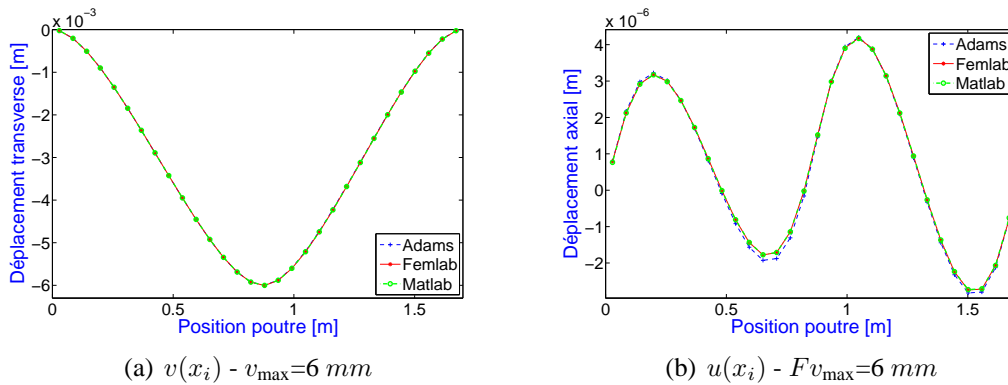


FIGURE 7.7: Déplacements axial et transverse de la poutre E-E obtenus en statique à partir de *Adams*, *Femlab* et *Matlab* pour  $v_{\max}=6 \text{ mm}$ .

Pour une même valeur de flèche maximale  $v_{\max}$ , les déplacements transverses obtenus à partir des différents logiciels se superposent parfaitement. Pour le déplacement axial, *Matlab* et *Femlab* donnent des résultats identiques alors que celui obtenu avec *Adams* diffère légèrement au niveau des zones de compression maximale. Notons tout de même que cette différence est assez minime,  $1.77 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  pour *Adams* contre  $1.93 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  pour *Matlab* et *Femlab*, mais cela représente cependant un écart de 8 %.

Le déplacement axial obtenu avec *Adams* diffère des autres et la procédure d'exportation des résultats est très fastidieuse. Le temps de calcul du code *Matlab* est assez long et le résultat ne converge pas toujours. Pour *Femlab*, le temps de calcul est beaucoup plus rapide et les autres cas de CL peuvent être traités avec la même efficacité. De plus, le logiciel possède une modularité appréciable et son utilisation est simple. L'outil choisi pour les simulations numériques en statique sera donc *Femlab*.

Nous allons maintenant présenter plus en détails les résultats obtenus pour les déplacements axial et transverse pour la poutre E-E et les autres CL. Une comparaison entre les résultats obtenus pour les cas G et L pour les différentes CL est également présentée.

#### 7.3.2 Cas de la poutre E-E

La figure 7.8 présente les déplacements axial et transverse en fonction du niveau de force  $F$  et de l'abscisse  $x$  pour la poutre E-E.

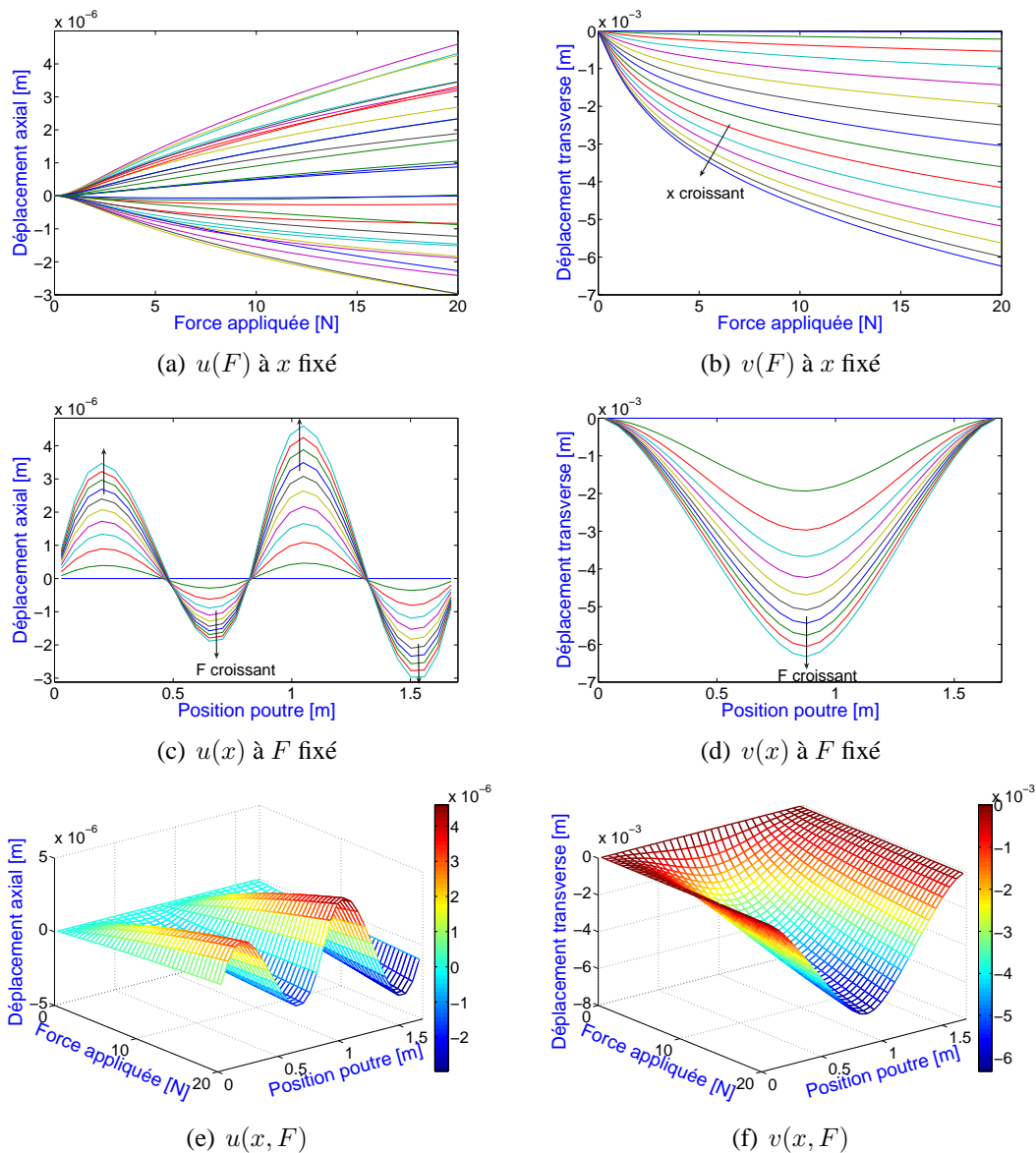


FIGURE 7.8: Déplacements axial et transverse de la poutre E-E en fonction de l'abscisse  $x$  et du niveau de force  $F$ .

Les graphes de la figure 7.8(c) permettent de mettre en évidence les zones de traction ( $u(x) > 0$ ) et les zones de compression ( $u(x) < 0$ ) de l'axe neutre au niveau de la poutre E-E. Le profil de

déplacement axial est obtenu pour une force appliquée au point d'abscisse  $x_0 = 0.88 \text{ m}$ . Si elle était appliquée à une autre abscisse, le profil serait différent.

Les graphes de la figure 7.8(b) montrent que l'évolution de la flèche en fonction de la force appliquée est linéaire seulement sur une très faible zone.

Regardons maintenant les résultats obtenus pour les deux autres cas de CL : A-A et E-L.

### 7.3.3 Cas de la poutre A-A

La figure 7.9 présente les déplacements axial et transverse en fonction du niveau de force  $F$  et de l'abscisse  $x$  pour la poutre A-A.

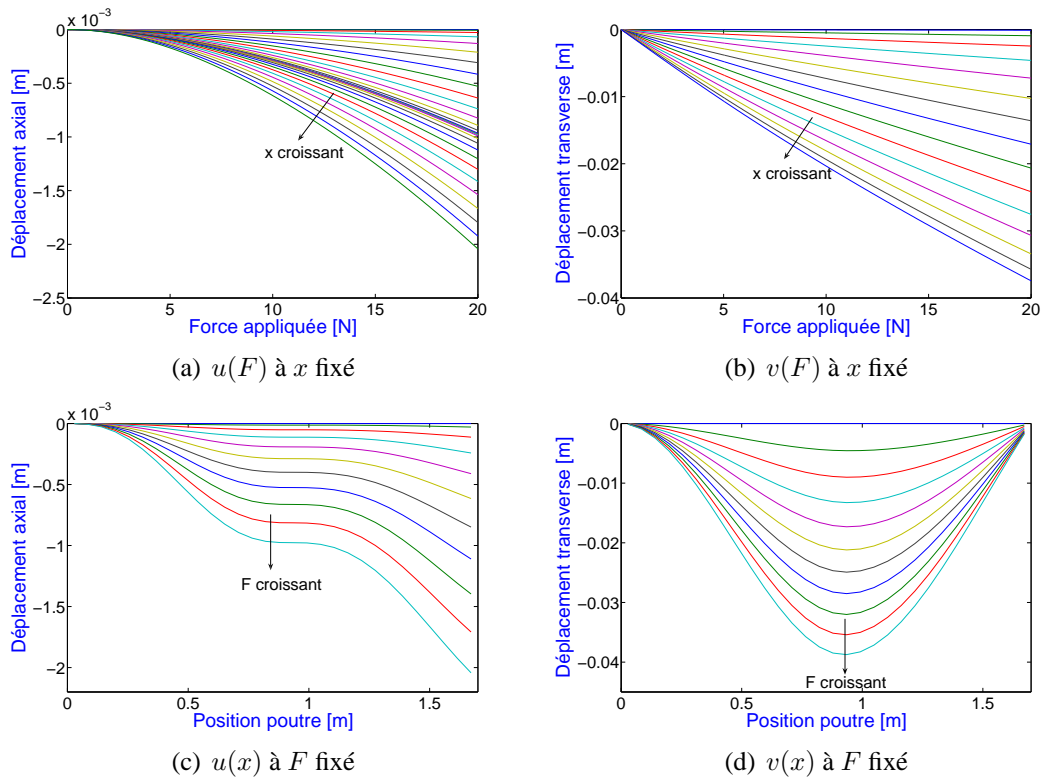


FIGURE 7.9: Déplacements axial et transverse de la poutre A-A en fonction de l'abscisse  $x$  et du niveau de force  $F$ .

L'évolution de la flèche ( $v(F)$  à  $x$  fixé) pour la poutre A-A a une allure rectiligne contrairement au cas de la poutre E-E (Fig. 7.9(b)). Par contre, l'allure des déformées ( $v(x)$  à  $F$  fixé) est similaire avec tout de même des valeurs de flèche moins importantes (Fig. 7.9(d)). Par ailleurs, le déplacement axial (en valeur absolue) est beaucoup plus important (Fig. 7.9(c)) pour la poutre A-A (de l'ordre de  $10^{-3}$  -  $10^{-4} \text{ m}$ ) que pour la poutre E-E (de l'ordre de  $10^{-6}$  -  $10^{-7} \text{ m}$ ). Dans l'exemple numérique, pour réaliser le cas de CL A-A, le degré de liberté axial n'est pas bloqué au niveau de l'extrémité droite, ce qui explique que le déplacement axial soit beaucoup plus important dans ce cas que pour le cas E-E. Par ailleurs, ceci permet également d'expliquer l'allure du déplacement axial qui est minimal à l'extrémité gauche (ddl bloqué) et maximal à l'extrémité droite (ddl libre). Dans ce cas, l'axe neutre de la poutre est uniquement sollicité en compression puisque  $u(x) < 0$  quelle que soit l'abscisse  $x$ . On remarque également la présence d'une sorte de palier aux alentours du milieu de la poutre ( $x = 0.85 \text{ m}$ ), zone où la force  $F$  est appliquée.

### 7.3.4 Cas de la poutre E-L

La figure 7.10 présente les déplacements axial et transverse en fonction du niveau de force  $F$  et de l'abscisse  $x$  pour la poutre E-L.

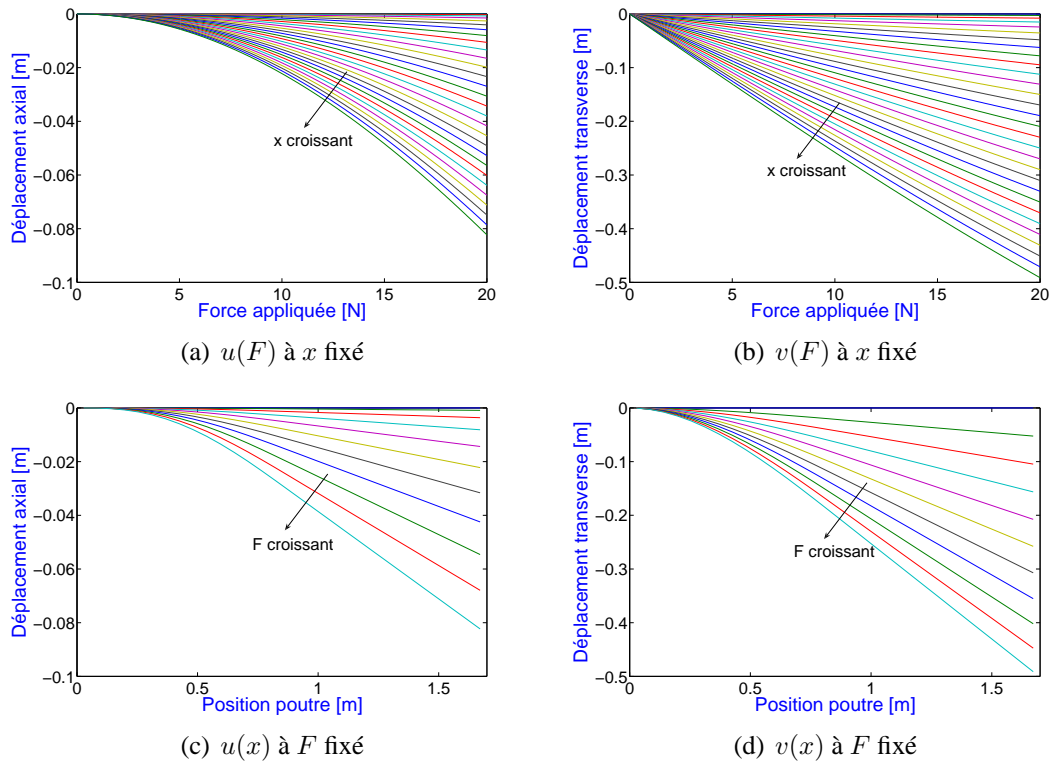


FIGURE 7.10: Déplacement transverse de la poutre E-L en fonction de l'abscisse  $x$  et du niveau de force  $F$ .

Au vu des graphes des figures 7.10(d) et 7.10(c), il apparaît que pour la poutre E-L, les profils des déplacements transverses et axiaux à niveau de force constant,  $u(x)$  et  $v(x)$ , sont similaires à un facteur multiplicatif près ( $\approx 7$ ). Par contre, l'évolution du déplacement transverse en fonction de la force sera quasi-linéaire (Fig. 7.10(b)) tandis que celle du déplacement axial sera plutôt quadratique (Fig. 7.10(d)).

### 7.3.5 Comparaison entre les cas Linéaire et Général en statique

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les différences obtenues pour le déplacement transverse maximal pour les cas L et G. Ainsi, les limites entre le domaine linéaire et le domaine des rotations modérées vont pouvoir être mises en évidence.

La figure 7.11 montre l'évolution de la flèche maximale de la poutre (en valeur absolue) obtenue avec *Femlab* pour les cas L et G pour les différentes CL (la courbe représentant le cas G sur la figure 7.11(d) est la courbe  $v_{\max}(F) = v(L, F)$  de la figure 7.10(b)).

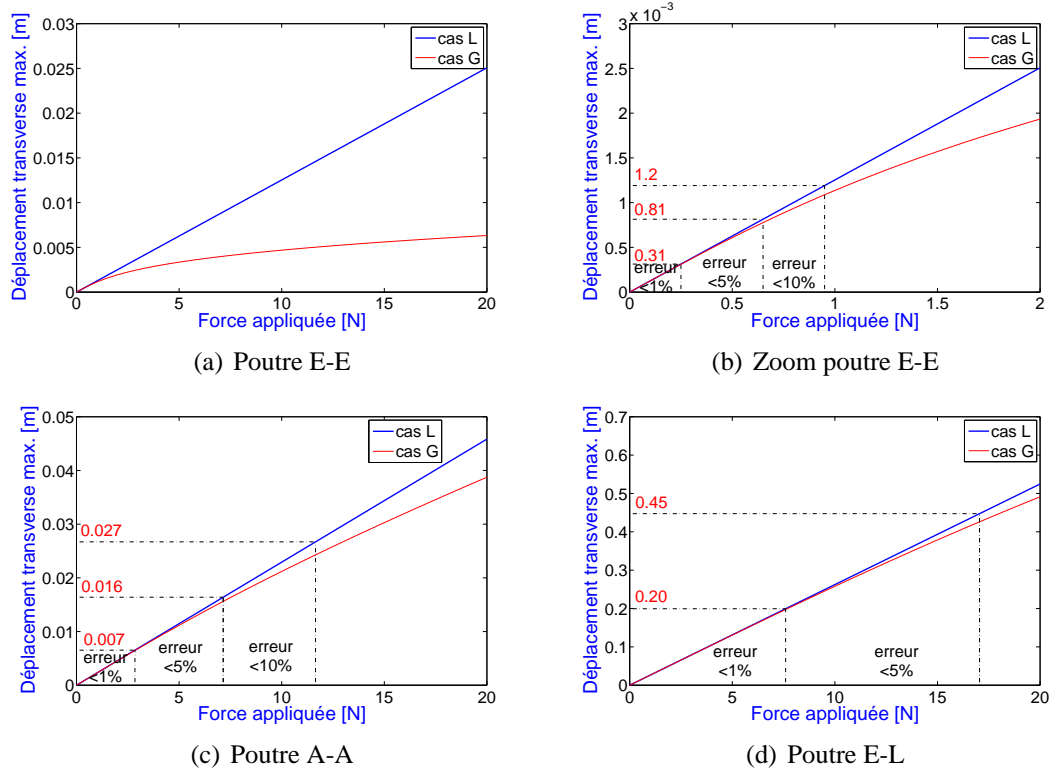


FIGURE 7.11: Flèche maximale de la poutre en statique obtenue avec les cas L et G pour différentes CL.

L'écart relatif entre les flèches maximales déterminées pour les cas L et G est de 1% pour une flèche maximale (en valeur absolue) de  $4 \cdot 10^{-4} m$  pour la poutre E-E, de  $6.3 \cdot 10^{-3} m$  pour la poutre A-A et de  $2 \cdot 10^{-1} m$  pour la poutre E-L. Ensuite, plus le niveau de force  $F$  est important, plus cet écart augmente.

La formulation linéaire peut donc être utilisée pour obtenir des valeurs de déplacements transverses correctes à des niveaux de flèche plus élevés pour la poutre E-L (de l'ordre de  $10^{-1} m$ ). Par contre, pour les autres cas de CL, les résultats obtenus pour le cas L ne sont corrects que pour de très faibles niveaux de flèche ( $<10^{-4} m$  pour la poutre E-E et  $<10^{-3} m$  pour la poutre A-A, pour une épaisseur de poutre de 3 mm).

Le déplacement axial est nul (ou très faible) pour le cas L, puisqu'il n'y a pas de couplage entre les déplacements axial et transverse. Cependant, d'après l'étude précédente, il peut être assez important suivant le cas de CL de la poutre. Le tableau 7.2 répertorie les valeurs du déplacement axial maximal en fonction des cas L et G pour les différentes CL. Pour le cas L, les résultats obtenus à partir de deux modélisations de la poutre (1D et 2D) sont indiqués.

CL	Non-Linéaire	Linéaire	
		∈ poutre	∈ tria
E-E	$-3 \cdot 10^{-6}$	0	$-4 \cdot 10^{-10}$
A-A	$-2 \cdot 10^{-3}$	0	$-4 \cdot 10^{-10}$
E-L	$-8 \cdot 10^{-2}$	0	$-5 \cdot 10^{-10}$

 TABLEAU 7.2: Déplacement axial maximal  $u_{\max}$  pour les différentes CL pour les cas L et G.

On note un écart important des valeurs du déplacement axial maximal entre les cas L et G, écart d'autant plus important que le couplage entre les déplacements axial et transverse sera important.

*Pour l'étude statique, il apparaît que pour de faibles flèches (de l'ordre de  $10^{-4}$  m), l'écart entre les formulations L et G est assez faible pour le déplacement transverse  $v(x)$ . Il est plus important pour des valeurs de flèches plus élevées suivant les cas de CL.*

*Par contre, pour le déplacement axial  $u(x)$ , l'erreur commise avec le cas L est importante puisque le déplacement axial est nul quel que soit le niveau de force appliqué, étant donné l'absence de couplage entre  $u(x)$  et  $v(x)$ . Pour le cas G, le déplacement axial est d'autant plus important que le couplage entre  $u(x)$  et  $v(x)$  sera fort, c'est-à-dire lorsque les CL permettent d'obtenir des déplacements transverses et axiaux importants (dans l'ordre E-L, A-A et E-E). Du fait de ce couplage, une partie de l'énergie du déplacement transverse est dissipée dans le déplacement axial, c'est pourquoi la flèche maximale déterminée pour le cas L est plus importante que celle du cas G. Par ailleurs, plus la poutre est contrainte axialement par les CL, plus l'écart entre la flèche maximale déterminée avec les cas L et G est important (dans l'ordre E-E, A-A et E-L).*

## 7.4 Etude numérique en dynamique

### 7.4.1 Choix de l'outil de calcul

Nous avons restreint la comparaison des résultats obtenus avec les trois logiciels décrits en 7.2 au cas le poutre E-E.

La modélisation de la poutre E-E par les différents outils est la même que pour l'étude statique. Pour la comparaison dynamique, la poutre est excitée par un choc appliqué dans le plan  $(O, x, y)$  au point d'abscisse  $x_0 = 0.425$  m et à l'instant  $t_0 = 0$ . Le choc est simulé par une demi-sinusoïde pour *Matlab* et par des fonctions similaires pour *Femlab* (fonction *flc2hs*) et *Adams* (fonction *step*). La durée du choc est égale à 0.01 s. Pour le code EF *Matlab*, le nombre de modes axiaux et transverses pris en compte dans la base linéaire tronquée est  $N_u = N_v = 6$ . Le choix de ces valeurs sera présenté en détails par la suite en 7.4.3.

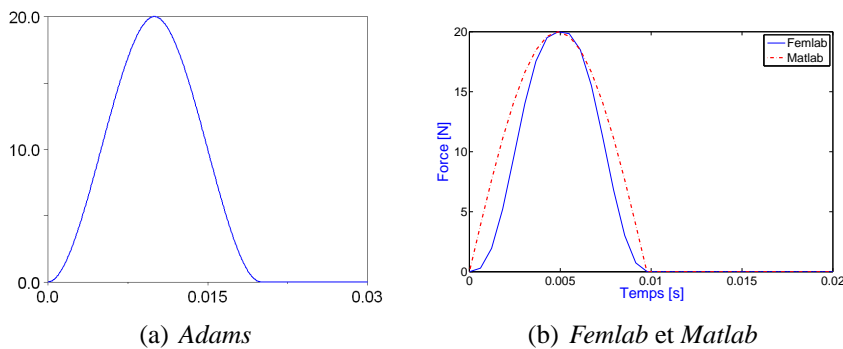


FIGURE 7.12: Signal temporel du choc pour les différents logiciels.

Les mesures sont effectuées entre les instants  $t_0$  et  $t_f = 5$  s, intervalle de temps discrétisé en  $N_t = 8192$  points. Deux amplitudes de chocs ont été simulées :  $F = 1$  N et  $F = 20$  N. La première est assez faible afin que la réponse en déplacement de la poutre soit dans le domaine linéaire et la

seconde est plus importante afin d'observer les résultats obtenus par les différents outils pour le cas G (comportement non-linéaire).

Dans un premier temps, une analyse aux fréquences propres (axiales et transverses) a été effectuée pour les trois logiciels afin d'apprécier les différentes modélisations de la poutre. Les fréquences propres ont été comparées aux fréquences théoriques déterminées à partir des expressions suivantes :

– Fréquences propres transverses

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\beta_k}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (7.53)$$

où  $\beta_k L$  est une solution de l'équation transcendante aux valeurs propres correspondant aux CL étudiées :  $\cos(\beta_k L) \cdot \cosh(\beta_k L) = 1$  pour une poutre E-E.

– Fréquences propres axiales

$$f_k^{th} = \frac{k}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (7.54)$$

Les tableaux 7.3 et 7.4 répertorient les résultats obtenus respectivement pour les dix premières fréquences propres transverses et les cinq premières fréquences propres axiales.

Fréquence	Théorie	Adams		Femlab		Matlab	
		$f$	$\Delta f/f(\%)$	$f$	$\Delta f/f(\%)$	$f$	$\Delta f/f(\%)$
$f_{1v}$	5.497	5.493	-0.07	5.824	5.95	5.497	0
$f_{2v}$	15.15	15.12	-0.20	16.05	5.94	15.15	0
$f_{3v}$	29.70	29.57	-0.44	31.47	5.96	29.70	0
$f_{4v}$	49.10	48.71	-0.79	52.02	5.95	49.10	0
$f_{5v}$	73.34	72.45	-1.21	77.71	5.96	73.35	0.01
$f_{6v}$	102.44	100.67	-1.73	108.52	5.94	102.46	0.02
$f_{7v}$	136.39	133.22	-2.32	144.47	5.92	136.42	0.02
$f_{8v}$	175.19	169.94	-3.00	185.55	5.91	175.25	0.03
$f_{9v}$	218.83	210.64	-3.74	231.76	5.91	218.96	0.06
$f_{10v}$	267.33	255.12	-4.57	283.09	5.90	267.56	0.09

**TABEAU 7.3: Fréquences propres des dix premiers modes de flexion obtenues à partir des différents outils pour la poutre E-E.**

Fréquence	Théorie	Adams		Femlab		Matlab	
		$f$	$\Delta f/f(\%)$	$f$	$\Delta f/f(\%)$	$f$	$\Delta f/f(\%)$
$f_{1u}$	1515	1514	-0.07	1605	5.94	1516	0.07
$f_{2u}$	3030	3025	-0.17	3210	5.94	3035	0.17
$f_{3u}$	4545	4527	-0.40	4815	5.94	4563	0.40
$f_{4u}$	6060	6016	-0.73	6420	5.94	6102	0.70
$f_{5u}$	7575	7489	-1.14	8026	5.95	7657	1.08

**TABEAU 7.4: Fréquences propres des cinq premiers modes de traction-compression obtenues à partir des différents outils pour la poutre E-E.**

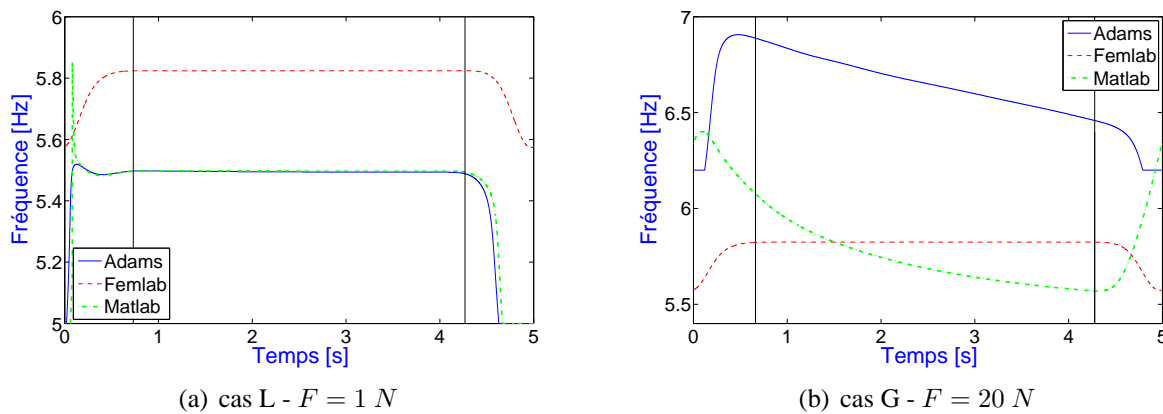


La modélisation EF réalisée sous *Matlab* donne les meilleurs résultats pour les fréquences propres transverses. Au niveau des fréquences propres axiales, les écarts relatifs par rapport aux fréquences théoriques de la poutre E-E obtenus avec *Matlab* sont similaires en valeur absolue à ceux obtenus avec *Adams*. Pour *Femlab*, les écarts relatifs sont les mêmes pour les fréquences propres transverses et axiales, de l'ordre de 6%, ce qui n'est pas étonnant étant donné que la poutre mince est discrétisée par des éléments finis 2D et qu'il y a peu d'éléments sur l'épaisseur de la poutre. Du fait de ces écarts relatifs importants, nous pouvons d'ores et déjà affirmer que le modèle proposé par *Femlab* ne sera pas satisfaisant pour l'étude dynamique. Sur l'ensemble des fréquences, aussi bien axiales que transverses, il apparaît que les valeurs déterminées à partir de *Matlab* sont supérieures aux fréquences propres théoriques et que celles déterminées à partir d'*Adams* sont inférieures. Lorsque le nombre d'éléments finis n'est pas assez important, *Matlab* a tendance à surestimer la raideur de la poutre E-E alors qu'*Adams* la sous-estime.

Une analyse par ondelettes au voisinage du premier mode du signal temporel du déplacement transverse  $v(x, t)$  au point d'abscisse  $x = 0.425 \text{ m}$  (lieu d'excitation) a ensuite été réalisée pour les deux cas d'amplitude de la force.

Les non-linéarités géométriques apparaissent lorsque les rotations de la poutre sont importantes, c'est-à-dire lorsque le déplacement transverse est important. Pour un choc de forte amplitude, les rotations de la poutre vont être importantes au début du signal de réponse de la poutre puis, lorsque le signal s'amortit suffisamment, les rotations redeviennent petites. L'allure de la fréquence instantanée (ou arête) déterminée par la TOC pour le déplacement transverse  $v(x, t)$  devrait en conséquence être une courbe non-linéaire au début du signal qui revient vers la valeur de la fréquence linéaire de la poutre E-E.

Les graphes de la figure 7.13 présentent les fréquences instantanées (ou arêtes) obtenues à l'aide de la TOC pour les cas L ( $F = 1 \text{ N}$ ) et G ( $F = 20 \text{ N}$ ). Le temps d'arrêt du signal est égal à la durée totale du signal, soit  $t_f = 5 \text{ s}$ ,  $Q = 5$  et  $N_{TOC} = 200$  points. Pour le cas L, la plage de fréquence étudiée est  $[5 - 6] \text{ Hz}$  pour les trois outils de calcul. Pour le cas G, la plage de fréquence étudiée est  $[5.4 - 6.4] \text{ Hz}$  pour *Matlab* et *Femlab* et  $[6 - 7] \text{ Hz}$  pour *Adams*.



**FIGURE 7.13:** Arêtes du premier mode des signaux temporels obtenues à partir des différents logiciels de calcul pour la poutre E-E au point d'excitation ( $x_0=0.425 \text{ m}$ ) : cas L ( $v_{\max} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ) et G ( $v_{\max} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ).

Sur la figure 7.13(a), les arêtes du premier mode obtenues à partir des signaux temporels de  $v(x_5, t)$  issus de *Matlab* et *Adams* se superposent presque et sont situées à une fréquence de 5.49

$Hz$ . Les arêtes sont quasi-constantes dans le temps (variations de quelques millièmes de  $Hz$  pour *Matlab* et *Adams*), ce qui caractérise un comportement linéaire de la poutre. Pour *Femlab*, l'arête obtenue est également linéaire mais se situe à  $5.82 Hz$ . On vérifie bien que le comportement de la poutre peut être considéré comme linéaire pour  $F = 1 N$ . La flèche maximale obtenue pour cette valeur de force est de  $3 \cdot 10^{-4} m$ , soit un dixième de l'épaisseur de la poutre.

La figure 7.13(b) présente le cas G où la force d'excitation est de  $20 N$ . Pour cette valeur de force, la flèche maximale de la poutre est de l'ordre de l'épaisseur, soit  $3 \cdot 10^{-3} m$ . Les arêtes obtenues pour le premier mode de  $v(x_5, t)$  à partir des différents outils diffèrent toutes les unes des autres. Premièrement, celle obtenue avec *Femlab* est toujours constante et située à  $5.82 Hz$ , elle ne diffère donc pas de celle obtenue pour le cas L. La modélisation proposée par *Femlab* n'étant déjà pas satisfaisante du point de vue des fréquences propres, elle ne l'est pas davantage pour la prise en compte des non-linéarités géométriques avec les paramètres du logiciel choisis par défaut. Il semble donc que le solveur temporel utilisé ne prenne pas en compte les non-linéarités géométriques.

Ensuite, l'arête obtenue à partir de *Matlab* correspond au comportement que nous nous attendions à observer pour les non-linéarités géométriques, à savoir une courbe non-linéaire au début du signal (plutôt quadratique) revenant vers la valeur de la première fréquence propre linéaire de la poutre E-E, ici  $5.49 Hz$ . Ce n'est pas le cas de l'arête obtenue avec *Adams*, qui varie dans le temps de manière affine et ne revient pas vers la valeur de la première fréquence linéaire. Il faut tout de même relativiser le résultat obtenu avec *Adams* par rapport à celui obtenu avec *Matlab*. En effet, l'amortissement des modes n'est pas du tout le même pour les deux modélisations. Pour *Matlab*, il est égal à  $0.8 \%$  pour tous les modes et pour *Adams* il est inférieur à  $0.02 \%$  pour les six premiers modes. Nous avons alors comparé l'arête du premier mode obtenue avec *Matlab* en choisissant les mêmes valeurs d'amortissements que celles obtenues avec *Adams*, mais là encore les résultats obtenus ne concordent pas. Par ailleurs, la définition de l'amortissement est assez obscure sous *Adams* puisqu'il est défini pour chaque élément. Ainsi, il n'est pas possible de fixer un amortissement global et, généralement, il est assez difficile de trouver une valeur autre que celle définie par défaut qui fasse converger le calcul.

**Le code EF implémenté sous *Matlab* est donc celui qui représente le mieux le comportement non-linéaire de la poutre E-E correspondant aux non-linéarités géométriques.** Il sera utilisé dans la suite pour l'étude dynamique. Le temps de calcul du code *Matlab* étant assez important, il serait intéressant de développer un modèle EF non-linéaire de poutre (élément 1D) sous *Femlab* afin de voir si, comme en statique, le temps de calcul est réduit.

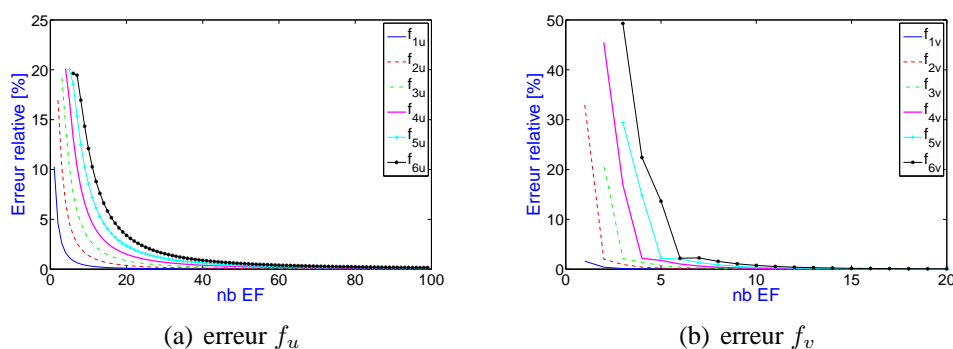
Nous allons maintenant nous intéresser aux différents paramètres rentrant en jeu dans la résolution du problème aux EF non-linéaire pour la poutre E-E (7.35) :

- Influence du nombre d'éléments choisis pour la discrétisation.
- Nombre de modes axiaux et transverses à prendre en compte dans la réponse.
- Influence du niveau de force.
- Influence du point d'excitation.
- Comparaison avec la résolution du système en Linéaire.

#### 7.4.2 Influence de la discrétisation de la poutre

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à l'influence du nombre d'éléments finis, pris pour discrétiser la poutre, sur les fréquences axiales et transverses de celle-ci. Nous avons choisi

arbitrairement de prendre 31 éléments pour discrétiser la poutre. Vérifions que ce nombre d'éléments est suffisant. Les erreurs relatives entre les fréquences théoriques et les fréquences issues du modèle EF de la poutre pour les six premiers modes transverses et axiaux ont été tracées sur la figure 7.14 en fonction du nombre d'éléments discrétisant la poutre (de 2 à 100 éléments).



**FIGURE 7.14: Convergence des fréquences propres axiales et transverses en fonction du nombre d'éléments de discrétisation de la poutre E-E.**

L'augmentation du nombre d'éléments de discrétisation permet d'améliorer la convergence des fréquences propres de la poutre. Pour les modes transverses (Fig. 7.14(b)), avec 10 éléments, l'erreur est déjà inférieure à 0.8 % et décroît ensuite très rapidement (<0.1 % pour 18 éléments). L'erreur relative pour les six fréquences transverses est inférieure à 0.02 % pour 31 éléments. Pour les modes axiaux, la convergence est moins rapide. Ainsi, avec 100 éléments, l'erreur relative est inférieure à 0.15 %. Pour 31 éléments, l'erreur relative pour les six fréquences axiales est seulement inférieure à 1.46 % (< 0.6 pour les quatre premières).

Le nombre d'éléments que nous avons choisi est suffisant pour les fréquences transverses mais un peu faible pour les fréquences axiales, pour lesquelles une centaine d'éléments serait nécessaire. Cependant, comme nous le démontrerons au paragraphe suivant, l'impact des modes axiaux sur le phénomène de couplage entre les déplacements axial et transverse est assez faible.

L'influence du nombre d'éléments pris en compte dans la discrétisation de la poutre E-E sur les amplitudes maximales des déplacements axial et transverse et de l'angle a été étudiée pour trois configurations (16, 31, et 61 éléments). Les résultats sont répertoriés dans le tableau 7.5.

Nb d'éléments	$U_{\max}$ ( $10^{-8}$ )	$V_{\max}$ ( $10^{-4}$ )	$\Theta_{\max}$ ( $10^{-3}$ )
16 ∈	0.701	0.992	0.308
31 ∈	0.698	0.991	0.309
61 ∈	0.700	0.992	0.311

**TABEAU 7.5:  $U_{\max}$ ,  $V_{\max}$  et  $\Theta_{\max}$  pour la poutre E-E en fonction du nombre d'éléments de discrétisation de la poutre.**

Les résultats du tableau nous indiquent que le nombre d'éléments finis, s'il est pris suffisamment élevé (> 10 éléments pour avoir des erreurs inférieures à 1 %) n'aura pas d'influence majeure sur les amplitudes temporelles maximales des déplacements axial et transverses, et de l'angle.

Regardons maintenant l'influence du nombre d'éléments choisis sur la TF du déplacement axial en un point particulier de la poutre (Fig. 7.15).

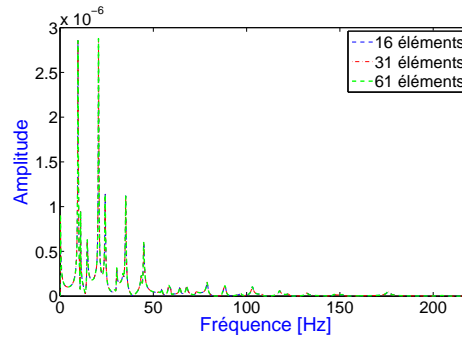


FIGURE 7.15: TF du déplacement axial en un point particulier de la poutre ( $x = 0.27 \text{ m}$ ) pour  $N_u = N_v = 6$  et différentes discrétisations de la poutre E-E (16, 31 et 61 éléments).

Les fréquences du déplacement axial qui ont une amplitude importante se situent surtout en basses fréquences or, quel que soit le nombre d'éléments choisis (16, 31 ou 61), les premières fréquences propres issues du calcul EF correspondent aux fréquences propres théoriques. Les fréquences affectées par un nombre d'éléments trop faible, donc une erreur sur la fréquence plus importante, sont surtout les fréquences élevées, qui ont des amplitudes plus faibles au niveau de la TF du déplacement axial. Le nombre d'éléments finis, s'il est pris suffisamment élevé ( $> 10$  éléments) n'aura donc pas d'influence majeure sur les composantes prépondérantes de la TF du déplacement axial.

### 7.4.3 Etudes temporelle et fréquentielle en fonction du nombre de modes transverses $N_v$ et axiaux $N_u$ choisis dans la base linéaire

Dans le Chapitre suivant, nous nous intéresserons au niveau d'amplitude des termes qui composent la mesure de l'ELB-CA. Pour cela, nous devons donc être sûr de prendre un nombre suffisant de modes dans la réponse pour avoir une approximation correcte de l'amplitude de ces termes. Une étude de convergence des amplitudes maximales des déplacements transverse et axial ainsi que de l'angle<sup>1</sup> en fonction du nombre de modes axiaux  $N_u$  et transverses  $N_v$  pris en compte dans la réponse a donc été réalisée. Nous avons également étudié les TF des signaux temporels numériques des déplacements axial et transverse en un point particulier de la poutre E-E. Le point a été choisi de telle manière à ne pas être sur un noeud de vibration de l'un des six premiers modes transverses de la poutre E-E, soit le cinquième point de discrétisation de la poutre situé à l'abscisse  $x_5 = 0.27 \text{ m}$ . Nous le nommerons  $X_5$ .

La poutre est discrétisée en 31 éléments. Les simulations numériques sont effectuées entre les instants  $t_0$  et  $t_f = 5 \text{ s}$ , intervalle de temps discrétisé en  $N_t = 20000$  points. Le nombre de points d'échantillonnage temporel est pris élevé de manière à obtenir une fréquence d'échantillonnage importante et ainsi pouvoir observer la première fréquence propre axiale vers  $1500 \text{ Hz}$ . La poutre est excitée par un choc appliqué dans le plan  $(O, x, y)$  au point d'abscisse  $x_0 = 0.5 \text{ m}$  et à l'instant  $t_0 = 0$ . Le choc est simulé par une demi-sinusoïde dont la durée est égale à  $0.0005 \text{ s}$ . La durée du choc est égale à deux pas de temps, ainsi l'amplitude de la TF de l'excitation est constante sur toute la plage de fréquence  $([0 \text{ } 2] \text{ kHz})$ . Toutes les fréquences sont donc excitées avec la même énergie. L'amplitude du choc est  $F = 10 \text{ N}$ . L'amortissement modal est pris constant pour tous les modes et égal à  $0.8 \%$ .

<sup>1</sup>Rappelons que l'angle  $\theta(x, t)$  est égal à la dérivé par rapport à  $x$  du déplacement transverse, soit  $v'(x, t)$ .

## 7.4 Etude numérique en dynamique

Les valeurs maximales des déplacements axial et transverse,  $U_{\max}$  et  $V_{\max}$ , ainsi que de l'angle,  $\Theta_{\max}$ , sont indiquées respectivement dans les tableaux 7.6, 7.7 et 7.8 pour  $N_v$  et  $N_u$  variant de 1 à 5.

$$\begin{aligned} U_{\max} &= \max_{x \in [0, L]} \left( \max_{t \in [0, t_f]} |u(x, t)| \right) \\ V_{\max} &= \max_{x \in [0, L]} \left( \max_{t \in [0, t_f]} |v(x, t)| \right) \\ \Theta_{\max} &= \max_{x \in [0, L]} \left( \max_{t \in [0, t_f]} |\theta(x, t)| \right) \end{aligned} \quad (7.55)$$

$U_{\max} (10^{-8})$	$N_v = 1$	$N_v = 2$	$N_v = 3$	$N_v = 4$	$N_v = 5$
$N_u = 0$	$0.2 \cdot 10^{-10}$	$0.5 \cdot 10^{-10}$	$0.6 \cdot 10^{-10}$	$0.6 \cdot 10^{-10}$	$0.6 \cdot 10^{-10}$
$N_u = 1$	0.004	0.3532	0.4655	0.4617	0.4941
$N_u = 2$	0.0239	0.3639	0.4767	0.4843	0.5110
$N_u = 3$	0.0238	0.3538	0.4522	0.4691	0.5006
$N_u = 4$	0.0799	0.3498	0.4575	0.4754	0.5581
$N_u = 5$	0.0799	0.4313	0.5065	0.5219	0.5783

**TABEAU 7.6: Déplacement axial maximal  $U_{\max}$  pour la poutre E-E en fonction du nombre de modes choisi pour la base linéaire.**

$V_{\max} (10^{-4})$	$N_v = 1$	$N_v = 2$	$N_v = 3$	$N_v = 4$	$N_v = 5$
$N_u = 0$	0.7650	0.9564	0.9576	0.9512	0.9778
$N_u = 1$	0.7650	0.9565	0.9577	0.9514	0.9778
$N_u = 2$	0.7650	0.9565	0.9577	0.9514	0.9778
$N_u = 3$	0.7650	0.9565	0.9578	0.9514	0.9778
$N_u = 4$	0.7651	0.9566	0.9578	0.9515	0.9780
$N_u = 5$	0.7651	0.9567	0.9579	0.9516	0.9779

**TABEAU 7.7: Déplacement transverse maximal  $V_{\max}$  pour la poutre E-E en fonction du nombre de modes choisi pour la base linéaire.**

$\Theta_{\max} (10^{-3})$	$N_v = 1$	$N_v = 2$	$N_v = 3$	$N_v = 4$	$N_v = 5$
$N_u = 0$	0.1390	0.2365	0.2566	0.2632	0.2789
$N_u = 1$	0.1390	0.2365	0.2566	0.2632	0.2789
$N_u = 2$	0.1390	0.2365	0.2566	0.2632	0.2790
$N_u = 3$	0.1390	0.2365	0.2566	0.2632	0.2790
$N_u = 4$	0.1390	0.2365	0.2566	0.2632	0.2790
$N_u = 5$	0.1390	0.2365	0.2566	0.2632	0.2790

**TABEAU 7.8: Angle maximal  $\Theta_{\max}$  pour la poutre E-E en fonction du nombre de modes choisi pour la base linéaire.**

Les tableaux 7.7 et 7.8 montrent que le nombre de modes axiaux pris en compte dans la base linéaire tronquée n'influe quasiment pas sur les valeurs maximales des déplacements transverse et des angles. En effet, pour  $N_u$  fixé, les amplitudes maximales du déplacement transverse ou de l'angle restent quasiment identiques pour  $N_v$  allant de 1 à 5.

Par contre, le tableau 7.6 montre que la valeur maximale du déplacement axial varie en fonction du nombre de modes axiaux  $N_u$  et transverses  $N_v$  pris en compte dans la base  $[\phi]$ . Plus  $N_u$  et  $N_v$  sont élevés, plus la valeur maximale du déplacement axial est importante.

### Choix du nombre de modes à prendre en compte pour le déplacement transverse et l'angle

Le temps de calcul est d'autant plus long qu'un nombre important de modes axiaux est pris en compte dans la base linéaire tronquée (pour le même jeu de paramètres et avec  $N_v = 5$ ,  $< 1 \text{ min}$  pour  $N_u = 1$  et  $\approx 30\text{-}45 \text{ min}$  pour  $N_u = 5$ ). Etant donné que les amplitudes maximales du déplacement transverse et de l'angle sont identiques lorsque  $N_v$  est fixé et que  $N_u = 0$  ou 5, l'évolution des amplitudes maximales du déplacement transverse et de l'angle pour  $N_u = 0$  (afin de réduire le temps de calcul) et  $N_v$  allant de 1 à 15 a été étudiée. Les résultats sont représentés sur la figure 7.16.

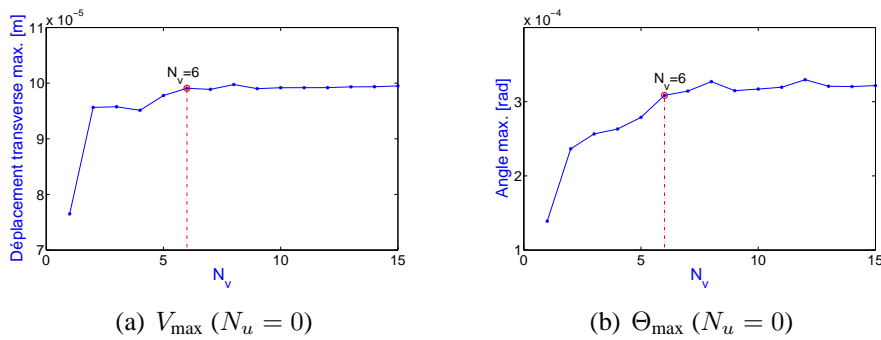


FIGURE 7.16: Détermination du nombre de modes transverses pris en compte dans la base linéaire pour la poutre E-E.

Il apparaît sur les graphes de la figure 7.16 qu'à partir de  $N_v = 6$ , les valeurs maximales du déplacement transverse et de l'angle ont convergé. **Il suffit donc de prendre seulement six modes transverses et aucun mode axial dans la réponse pour obtenir une approximation correcte des amplitudes maximales temporelles du déplacement transverse et de l'angle pour les caractéristiques de la poutre E-E choisies.**

Intéressons nous maintenant à l'étude fréquentielle pour le déplacement transverse et l'angle. La figure 7.17 présente les TF du déplacement transverse et de l'angle pour  $N_v$  fixé égal à 5 et  $N_u$  allant de 0 à 5.

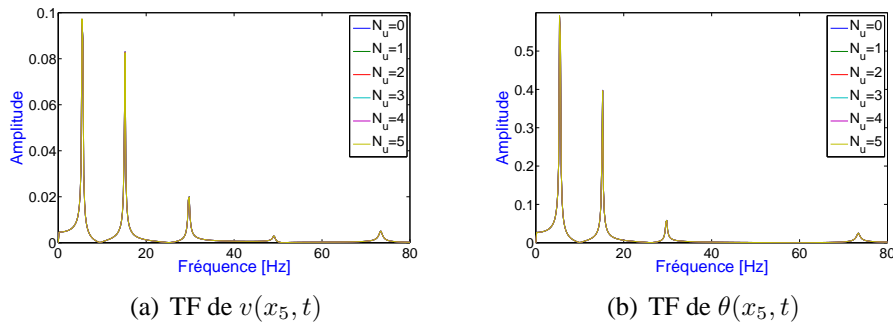


FIGURE 7.17: TF du déplacement transverse et de l'angle au point  $X_5$  pour  $N_v = 5$  et  $N_u = 0 \dots 5$ .

Les TF obtenues pour le déplacement transverse et l'angle en fonction de  $N_u$  ( $N_v$  fixé) se superposent. Comme pour les amplitudes temporelles maximales du déplacement transverse et de l'angle,

le nombre de modes axiaux pris en compte dans la base linéaire tronquée n'a pas d'influence sur les TF du déplacement transverse et de l'angle.

Les fréquences déterminées à partir des TF de la figure 7.17 sont répertoriées dans le tableau 7.9. Elles diffèrent légèrement des fréquences théoriques (Tab. 7.3) car le comportement de la poutre est non-linéaire, ce que nous montrerons plus tard.

Fréquences (Hz)	
$f_{1v}$	5.476
$f_{2v}$	15.19
$f_{3v}$	29.72
$f_{4v}$	49.06
$f_{5v}$	73.35

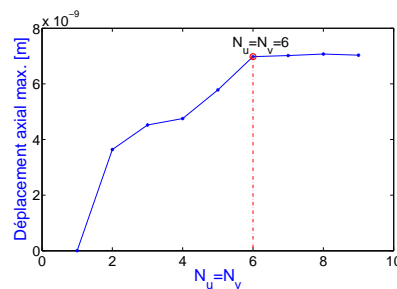
**TABEAU 7.9:** Fréquences propres obtenues pour la poutre E-E à partir des TF du déplacement transverse et de l'angle au point  $X_5$ .

### Choix du nombre de modes à prendre en compte pour le déplacement axial

Pour le déplacement axial (Tab. 7.6), nous avons observé que plus  $N_u$  et  $N_v$  sont élevés, plus la valeur maximale du déplacement axial est importante. Pour déterminer le nombre de modes axiaux et transverses à prendre en compte pour obtenir la convergence de l'amplitude temporelle maximale du déplacement axial, les valeurs maximales du déplacement axial pour  $N_u = N_v$  allant de 1 à 9 ont été calculées. Les résultats obtenus sont répertoriés dans le tableau 7.10 et représentés sur la figure 7.18.

Nb de modes	$U_{\max} (10^{-8}m)$	$V_{\max} (10^{-4}m)$	$\Theta_{\max} (10^{-3}rad)$
$N_u = N_v = 1$	0.004	0.7650	0.1390
$N_u = N_v = 2$	0.3639	0.9565	0.2365
$N_u = N_v = 3$	0.4522	0.9578	0.2566
$N_u = N_v = 4$	0.4754	0.9515	0.2632
$N_u = N_v = 5$	0.5783	0.9779	0.2790
$N_u = N_v = 6$	0.6979	0.9911	0.3087
$N_u = N_v = 7$	0.7017	0.9891	0.3145
$N_u = N_v = 8$	0.7072	0.9978	0.3273
$N_u = N_v = 9$	0.7032	0.9904	0.3150

**TABEAU 7.10:**  $U_{\max}$ ,  $V_{\max}$  et  $\Theta_{\max}$  pour la poutre E-E en fonction du nombre de modes choisi pour la base linéaire.



**FIGURE 7.18:** Détermination du nombre de modes axiaux pris en compte dans la base linéaire pour la poutre E-E.

Pour le déplacement axial, il s'avère également que seuls les six premiers modes transverses ( $N_v = 6$ ) sont nécessaires pour obtenir une approximation correcte de l'amplitude maximale du déplacement axial. Par contre, il faut également prendre les six premiers modes axiaux ( $N_u = 6$ ).

Pour l'étude fréquentielle du déplacement axial, les TF ont été calculées au point  $X_5$  pour  $N_v = 5$  et  $N_u$  allant de 1 à 5, et pour  $N_u = 5$  et  $N_v$  allant de 1 à 5. Elles sont tracées respectivement sur les figures 7.19 et 7.20.

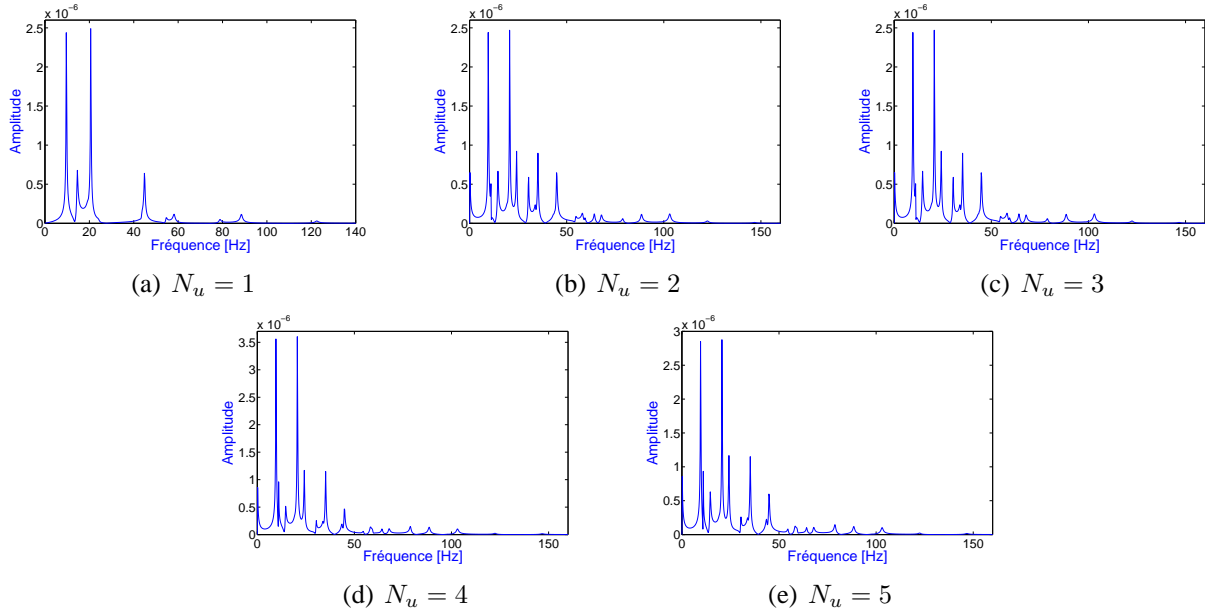


FIGURE 7.19: TF du déplacement axial au point  $X_5$  pour  $N_v = 5$  et  $N_u = 1 \dots 5$ .

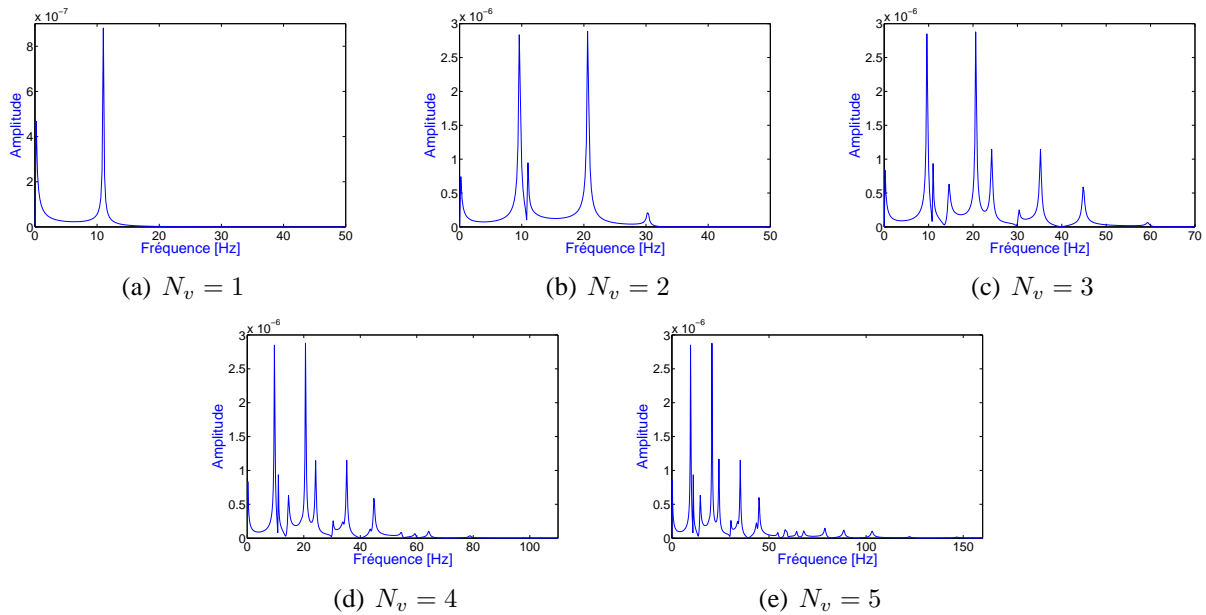


FIGURE 7.20: TF du déplacement axial au point  $X_5$  pour  $N_u = 5$  et  $N_v = 1 \dots 5$ .



## 7.4 Etude numérique en dynamique

La figure 7.19 montre qu'à partir de  $N_u = 2$ , pour  $N_v$  fixé égal à 5, le nombre des fréquences présentes dans le spectre du déplacement axial n'augmente plus, seules leurs amplitudes varient légèrement.

Les graphes de la figure 7.20 permettent de montrer que les fréquences présentes au niveau de la TF du déplacement axial sont des combinaisons linéaires des fréquences du déplacement transverse. Les fréquences présentes sur les différentes TF de la figure 7.20 sont répertoriées dans le tableau 7.11. Elles sont comparées aux combinaisons des fréquences propres obtenues à partir de la TF du déplacement transverse (Tab. 7.9).

Fréquences (Hz)	Calcul TF $v$	$N_v = 5$	$N_v = 4$	$N_v = 3$	$N_v = 2$	$N_v = 1$
$f_{2v} - f_{1v}$	9.711	9.619	+	+	+	-
$2f_{1v}$	10.95	11.02	+	+	+	+
$f_{3v} - f_{2v}$	14.53	14.61	+	+	-	-
$f_{4v} - f_{3v}$	19.34	non visible	non visible	-	-	-
$f_{2v} + f_{1v}$	20.66	20.62	+	+	+	-
$f_{3v} - f_{1v}$	24.24	24.20	+	+	-	-
$f_{5v} - f_{4v}$	24.29	non visible	-	-	-	-
$2f_{2v}$	30.37	30.40	+	+	+	-
$f_{4v} - f_{2v}$	33.87	33.80	+	-	-	-
$f_{3v} + f_{1v}$	35.20	35.19	+	+	-	-
$f_{4v} - f_{1v}$	43.58	43.55	+	-	-	-
$f_{5v} - f_{3v}$	43.63	non visible	-	-	-	-
$f_{3v} + f_{2v}$	44.91	44.87	+	+	-	-
$f_{4v} + f_{1v}$	54.53	54.54	+	-	-	-
$f_{5v} - f_{2v}$	58.16	58.33	-	-	-	-
$2f_{3v}$	59.44	non visible	+	+	-	-
$f_{4v} + f_{2v}$	64.25	64.21	+	-	-	-
$f_{5v} - f_{1v}$	67.87	67.90	-	-	-	-
$f_{4v} + f_{3v}$	78.78	78.79	+	-	-	-
$f_{5v} + f_{1v}$	78.83	non visible	-	-	-	-
$f_{5v} + f_{2v}$	88.54	88.49	-	-	-	-
$2f_{4v}$	98.12	non visible	+	-	-	-
$f_{5v} + f_{3v}$	103.07	103.07	-	-	-	-
$f_{5v} + f_{4v}$	122.41	122.39	-	-	-	-
$2f_{5v}$	146.7	146.73	-	-	-	-

**TABEAU 7.11: Fréquences propres obtenues pour la poutre E-E à partir de la TF du déplacement axial au point  $X_5$  en fonction de  $N_v$  ( $N_u = 5$ ).**

Rappelons que  $N_u$  est fixé et égal à 5. Lorsque  $N_v = 1$ , une seule fréquence est présente dans le spectre du déplacement axial : cette fréquence est égale à  $2f_{1v}$ . Ensuite pour  $N_v = 2$ , quatre fréquences sont présentes dans le spectre : elles sont égales à  $f_{2v} - f_{1v}$ ,  $2f_{1v}$ ,  $f_{2v} + f_{1v}$  et  $2f_{2v}$ . Pour  $N_v = 3$ , neuf fréquences sont présentes dans le spectre : elles sont égales à  $f_{2v} - f_{1v}$ ,  $2f_{1v}$ ,  $f_{3v} - f_{2v}$ ,  $f_{2v} + f_{1v}$ ,  $f_{3v} - f_{1v}$ ,  $2f_{2v}$ ,  $f_{3v} + f_{1v}$ ,  $f_{3v} + f_{2v}$  et  $2f_{3v}$ . Ainsi pour  $N_v = k$ , le nombre de fréquences présentes au niveau de la TF du déplacement axial sera égal à  $\left[ k + 2 \sum_{i=1}^{k-1} i \right]$ . Cependant, toutes les

fréquences ne sont pas observables sur la TF, d'une part parce que leur amplitude est trop faible et d'autre part car deux combinaisons peuvent être égales ou très proches en fréquence et donc l'un des deux pics peut être prépondérant et occulter l'autre.

En effectuant un zoom des TF du déplacement axial (Fig. 7.21), il apparaît que la première fréquence propre axiale ( $f_{1u}$  située aux alentours de  $1500\text{ Hz}$ ) est présente dans le spectre mais avec une amplitude beaucoup plus faible que les combinaisons des fréquences du déplacement transverse ( $10^{-10}$  contre  $10^{-6}$  -  $10^{-7}$ ). Par contre, elle n'est pas observée au niveau de la TF du déplacement transverse car les amplitudes des pics sont beaucoup plus importantes (de l'ordre de  $10^{-1}$  -  $10^{-2}$ ), la fréquence est donc complètement noyée au niveau de la TF du déplacement transverse (amplitude égale à  $10^{-6}$  pour  $1500\text{ Hz}$ ).

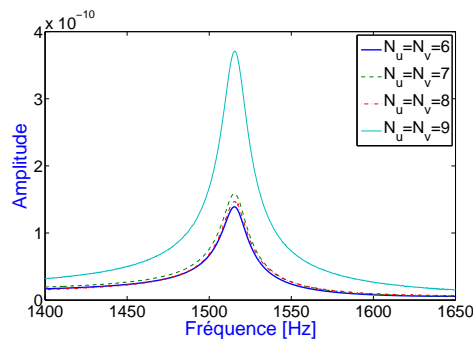


FIGURE 7.21: Première fréquence propre axiale en fonction de  $N_u$  et  $N_v$ .

Les pics des fréquences axiales ont une amplitude très faible au niveau de la TF du déplacement axial et ceux correspondant aux combinaisons de fréquences propres transverses sont donc prépondérants. Ces pics étant surtout présents en basses fréquences, du fait des caractéristiques de la poutre choisies pour l'étude, nous allons alors nous intéresser à une bande de fréquences plus réduite. Ceci va nous permettre de prendre un nombre de points moins important pour la discrétisation temporelle et ainsi de réduire le temps de calcul. A partir de maintenant, nous aurons toujours  $N_u = N_v = 6$ , les simulations numériques seront effectuées entre les instants  $t_0$  et  $t_f = 15\text{ s}$ , intervalle de temps discrétisé avec seulement  $N_t = 3750$  points. Les caractéristiques du choc (demi-sinusoïde,  $F = 10\text{ N}$ ) appliqué dans le plan  $(O, x, y)$  sont identiques sauf pour la durée qui, du fait de la modification du pas de temps, vaut maintenant  $0.008\text{ s}$  contre  $0.0005\text{ s}$  précédemment.

Une analyse par ondelettes à l'aide de la TOC va permettre d'identifier le caractère non linéaire du comportement de la poutre lorsque  $F = 10\text{ N}$ . De plus, cette analyse va également montrer que les arêtes (ou fréquences instantanées) issues des premiers modes du déplacement axial correspondent bien à des combinaisons des arêtes des modes du déplacement transverse.

La figure 7.22 présente les signaux temporels des déplacements axial et transverse au point  $X_5$  ainsi que leurs TO globales sur la plage de fréquences  $[0 - 60]\text{ Hz}$ . Pour le traitement des signaux par la TOC, le temps d'arrêt est égal à la durée totale du signal soit  $t_f = 5\text{ s}$ ,  $Q = 40$  et  $N_{TOC} = 400$  points.

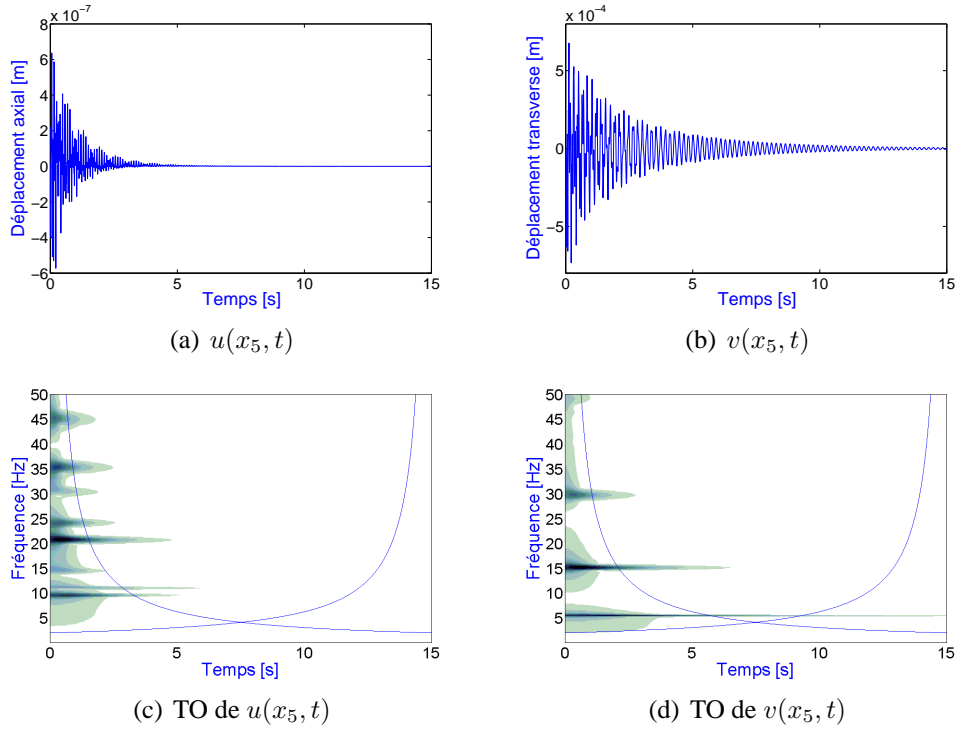


FIGURE 7.22: Signal temporel et TO des déplacements axial et transverse au point  $X_5$ .

Les arêtes de trois fréquences du déplacement axial et des combinaisons de fréquences du déplacement transverse correspondantes sont tracées sur la figure 7.23. Afin d'effectuer la comparaison, les mêmes paramètres pour le traitement local des signaux par la TOC ont été pris pour toutes les fréquences ( $f_{1v}$ ,  $f_{2v}$ ,  $f_{1u}$ ,  $f_{2u}$  et  $f_{5u}$ ). Le temps d'arrêt est égal à  $t_f = 15$  s,  $Q = 25$  et  $N_{TOC}=400$  points/Hz.

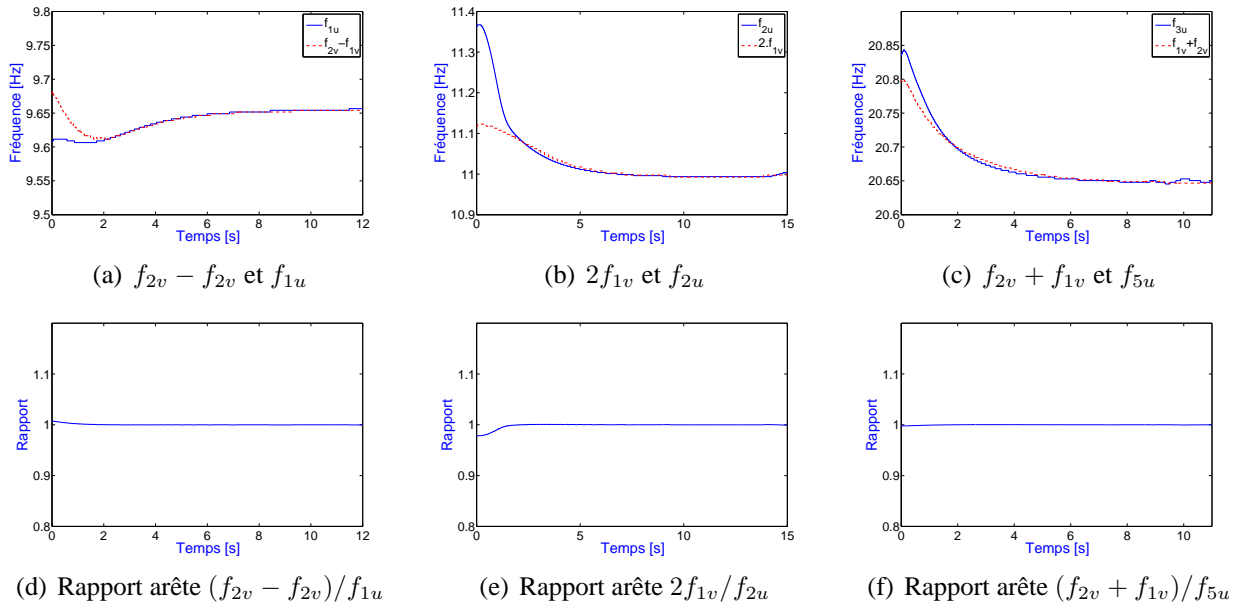


FIGURE 7.23: Identification des fréquences de  $u(x_5, t)$  à partir de celles de  $v(x_5, t)$  à l'aide des fréquences instantanées déterminées avec la TOC.

La comparaison des arêtes issues du déplacement axial et des combinaisons d'arêtes issues du déplacement transverse correspondantes est plutôt satisfaisante. Les écarts importants au début du signal sont dûs aux effets de bord. Ainsi, l'analyse des signaux numériques par la TOC permet de valider que les fréquences présentes dans le spectre du déplacement axial sont bien des combinaisons linéaires particulières (doubles, sommes et différences) des fréquences propres observées au niveau du spectre du déplacement transverse.

*Nous avons montré que, pour les caractéristiques de la poutre E-E choisies, seulement six modes axiaux et transverses sont nécessaires pour former la base linéaire tronquée  $[\phi]$  et obtenir des valeurs correctes des amplitudes maximales des déplacements axial et transverse, et de l'angle :  $N_u = N_v = 6$ .*

*L'étude des TF des signaux temporels numériques des déplacements axial et transverse, ainsi que l'analyse par ondelettes de ces signaux, ont permis de montrer que, pour un niveau de force donné (ici  $F = 10\text{ N}$ ), le couplage entre les déplacements axial et transverse avait peu d'influence sur le déplacement transverse et sa TF.*

*Par contre pour le déplacement axial, les fréquences prépondérantes au niveau de la TF sont celles provenant du couplage avec le déplacement transverse. Ces fréquences ont des valeurs particulières puisque ce sont des combinaisons linéaires (double, somme et différence) des fréquences propres du déplacement transverse.*

*Par ailleurs, il n'est pas nécessaire d'obtenir de trop faibles erreurs relatives pour les modes axiaux. Le nombre d'éléments choisi arbitrairement pour l'étude (31 éléments) est donc correct.*

#### 7.4.4 Influence du niveau de force sur les déplacements axial et transverse

Nous allons maintenant nous intéresser à l'influence du niveau de force sur les déplacements axial et transverse de la poutre E-E. Cette étude nous permettra par ailleurs de voir l'évolution du couplage entre les déplacements axial et transverse, notamment pour de faibles amplitudes du déplacement transverse (c'est-à-dire pour le cas L). La discrétisation est la même qu'au paragraphe précédent et l'abscisse de l'excitation est  $x=0.5\text{ m}$ . Les équations non-linéaires du système régissant le comportement de la poutre sont résolues pour plusieurs niveaux de force : 0.1, 0.5, 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 et 45 N.

La figure 7.24 présente, pour différents niveaux de force, l'évolution des amplitudes temporelles maximales des déplacements axial et transverse en fonction de l'abscisse  $x$ ,  $v_{\max}(x)$  et  $u_{\max}(x)$  (Fig. 7.24(a) et 7.24(c)), ainsi que les amplitudes maximales des déplacements axial et transverse au niveau de la poutre,  $V_{\max}$  et  $U_{\max}$  (Fig. 7.24(b) et 7.24(d)).

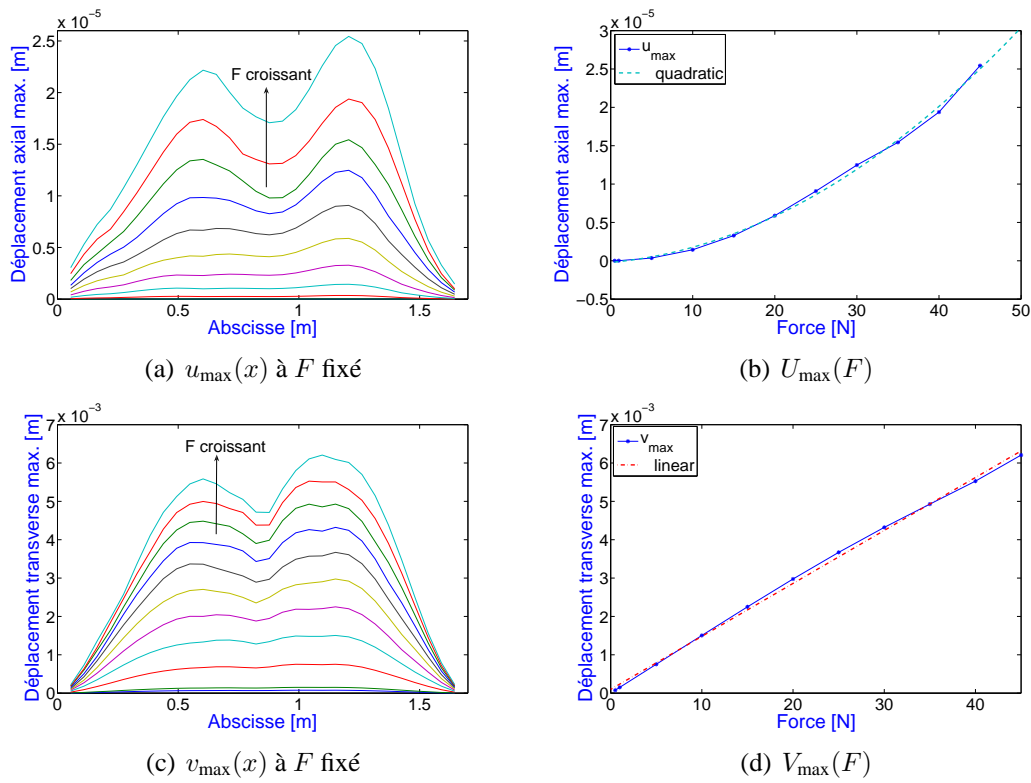


FIGURE 7.24: Déplacements axial et transverse maximum en fonction de l'abscisse de la poutre E-E pour différents niveaux de force.

Les figures 7.24(b) et 7.24(d) montrent que la flèche maximale de la poutre a une évolution quasi-linéaire en fonction de la force (amplitude de l'ordre de  $10^{-3} m$ ) alors que l'amplitude maximale du déplacement axial a une évolution quadratique en fonction de la force (amplitude de l'ordre de  $10^{-5} m$ ).

Regardons les TF des déplacements axial et transverse au point d'abscisse  $X_5$  pour quatre niveaux de force particuliers : 1, 10, 20 et 40 N. Les TF obtenues à partir des déplacements axial et transverse pour ces valeurs de force sont tracées sur la figure 7.25. Par ailleurs, l'évolution des amplitudes des pics des trois premières fréquences des TF des déplacements axial et transverse au point  $X_5$  ont été tracées en fonction du niveau de force sur la figure 7.26.

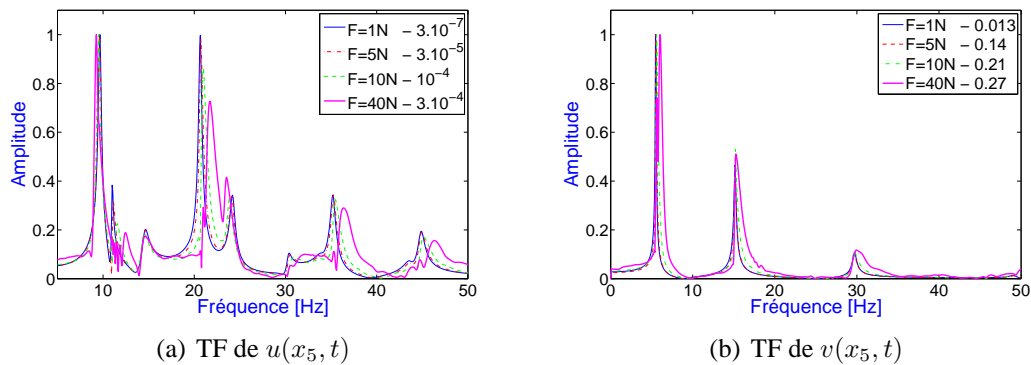


FIGURE 7.25: TF des déplacements axial et transverse au point  $X_5$  pour différents niveaux de force.

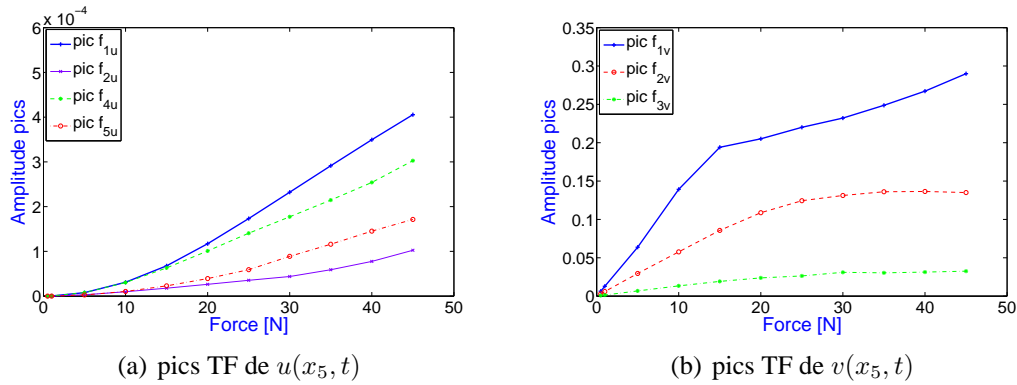


FIGURE 7.26: Amplitude des pics des TF des déplacements axial et transverse au point  $X_5$  pour la poutre E-E et différents niveaux de force.

Au niveau de la figure 7.26, on observe que l'évolution de l'amplitude des pics est très différente pour le déplacement axial et le déplacement transverse. Pour le déplacement axial, l'évolution est plutôt régulière et quadratique tandis que pour le déplacement transverse elle est plutôt bi-linéaire (rupture de pente pour  $F=15\text{ N}$ ).

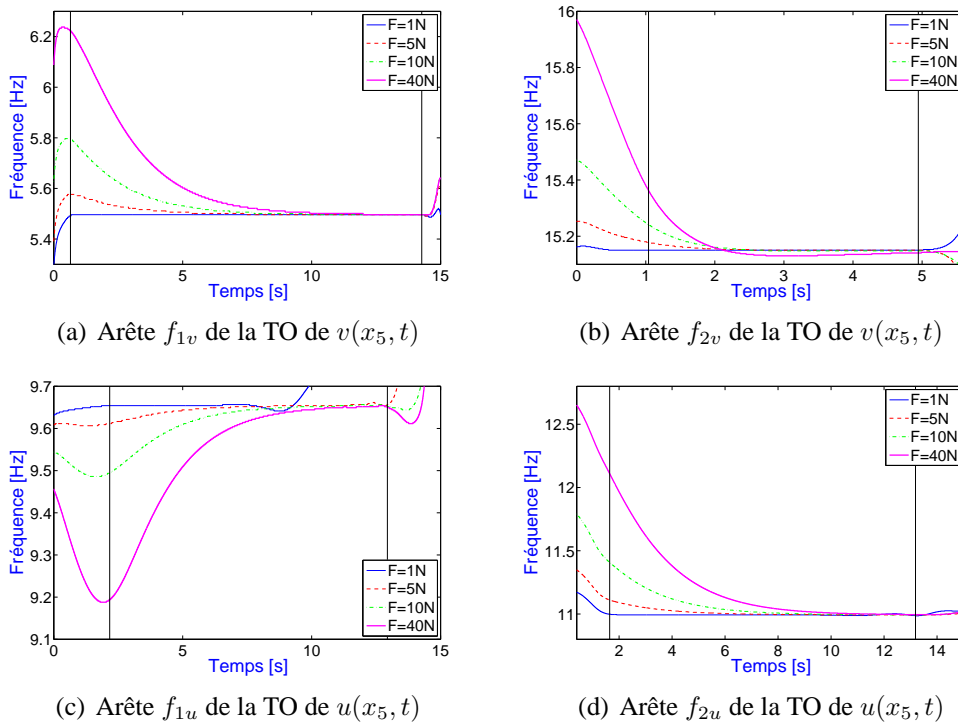
Les TF de la figure 7.25 montrent que l'augmentation du niveau de force a pour effet d'élargir les pics des fréquences, qui deviennent fortement dissymétriques (ici avec une forte pente à gauche du pic) et se décalent en fréquence vers la droite (c.a.d augmentation des fréquences).

L'évolution de ce décalage fréquentiel n'est pas la même pour tous les pics de fréquences. Pour le déplacement transverse, tous les pics de fréquences se décalent vers la droite, c'est-à-dire que les fréquences augmentent avec la force. Ce comportement est dit «hardening» : la raideur de la poutre devient plus importante avec les fortes excitations. Pour le déplacement axial, certains pics ont le même comportement, par contre d'autres ont l'effet inverse : leurs fréquences diminuent lorsque la force augmente, par exemple, les pics autour des fréquences  $10\text{ Hz}$ ,  $15\text{ Hz}$  et  $24\text{ Hz}$ . Ces fréquences sont des différences de fréquences transverses (resp.  $f_{2v} - f_{1v}$ ,  $f_{3v} - f_{2v}$  et  $f_{3v} - f_{1v}$ ), or  $\Delta f_{1v} > \Delta f_{2v}$ ,  $\Delta f_{1v} > \Delta f_{3v}$  et  $\Delta f_{2v} > \Delta f_{3v}$ , ce qui explique que les fréquences diminuent avec le niveau de force.

L'évolution des fréquences instantanées des deux premiers modes transverses,  $f_{1v}$  et  $f_{2v}$ , et des deux premiers modes axiaux,  $f_{1u} = f_{2v} - f_{1v}$  et  $f_{2u} = 2f_{1v}$  confirme ces observations. Les résultats sont présentés sur la figure 7.27 et les paramètres du traitement local des signaux temporels par la TOC sont répertoriés dans le tableau 7.12. Pour  $F = 1\text{ N}$ , le premier mode est moins excité que pour les niveaux de force plus élevés, le signal traité à l'aide de la TOC est donc plus court ( $t_f = 10\text{ s}$ , Fig 7.27(c)).

Modes	Plage de fréquence (Hz)	$N_{TOC}$	$Q$	$t_f$ (s)
$f_{1v}$	[5 7]	800	15	15
$f_{2v}$	[15 16]	400	20	6
$f_{1u}$	[9 10]	400	25	10-15
$f_{1u}$	[10.8 12.8]	800	25	15

TABLEAU 7.12: Paramètres de la TOC pour le traitement local, au niveau des deux premiers modes, des signaux numériques des déplacements axial et transverse au point  $X_5$ .



**FIGURE 7.27:** Arêtes des deux premiers modes des déplacements axial et transverse pour la poutre E-E et différents niveaux de force.

Les graphes de la figure 7.27 confirment les résultats obtenus pour les TF du déplacement transverse, à savoir que la fréquence augmente avec le niveau de force. L'évolution des fréquences instantanées (ou arêtes) montre que, lorsque le signal s'amortit suffisamment, le comportement de la poutre redevient linéaire. En effet, les arêtes des modes obtenues, à partir de la TO des signaux numériques des déplacements axial et transverse au point  $X_5$ , pour des niveaux de force élevés ( $F=10, 20$  et  $40\text{ N}$ ) convergent vers les arêtes des modes obtenues à partir de la TO du signal pour  $F=1\text{ N}$  (qui est constante dans le temps caractérisant ainsi un comportement linéaire de la poutre, ceci pour les deux modes (Fig. 7.27(a) et 7.27(b))).

Pour le déplacement axial, on observe le même comportement pour la deuxième fréquence  $f_{2u} = 2f_{1v}$ . Comme pour les TFs, la première fréquence  $f_{1u}$ , qui correspond à une différence de fréquence en l'occurrence  $f_{2v} - f_{1v}$ , a un comportement inverse : la fréquence diminue lorsque l'excitation augmente.

*L'analyse des TF et des TO des déplacements axial et transverse en fonction du niveau de l'excitation ont permis de montrer que pour le déplacement transverse de la poutre E-E, le comportement est « hardening » (la raideur de la poutre devient plus importante pour de fortes excitations).*

*Pour le déplacement axial, les fréquences dont la combinaison correspondante est une différence de fréquences propres transverses ont le comportement inverse : la fréquence diminue lorsque l'excitation augmente. Les autres fréquences (double et somme) ont un comportement « hardening ».*

*L'étude a également permis de montrer que le couplage est, certes moins important, mais toujours présent pour un faible niveau de force ( $F = 1\text{ N}$ ) correspondant au cas L.*

### 7.4.5 Influence du lieu d'excitation

Vérifions à présent l'influence de la position de l'excitation sur la TF du déplacement axial au point  $X_5$ . Les paramètres sont les mêmes que précédemment à part le point d'excitation. La poutre est excitée par un choc (demi-sinusoïde) appliqué dans le plan  $(O, x, y)$  aux points d'abscisse  $x_0 = 0.5 m$  et  $x_0 = 0.85 m$ .

La figure 7.28 représente les TF des déplacements axial et transverse au point  $X_5$  pour les deux points d'excitation.

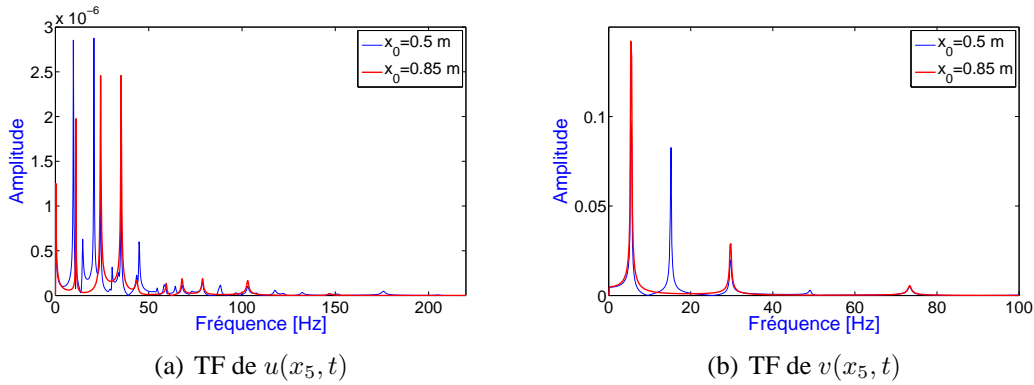


FIGURE 7.28: TF des déplacements axial et transverse au point  $X_5$ .

L'abscisse du deuxième choc correspond, étant données les CL et les dimensions de la poutre choisies, à l'un des noeuds des modes transverses pairs à savoir  $k = 2, 4, \dots, 2n$ . Ces modes ne sont donc pas excités. La réponse ne comprenant que six modes transverses, les modes 2, 4 et 6 ne sont pas excités. Ceci est observable au niveau de la TF du déplacement transverse (Fig. 7.28(b)). Il apparaît alors sur la figure 7.28(a) que toutes les combinaisons de fréquences faisant intervenir ces fréquences non excitées ne sont pas présentes au niveau de la TF du déplacement axial :  $f_{2v} - f_{1v}$ ,  $f_{3v} - f_{1v}$ ,  $f_{2v} + f_{1v}$ ,  $2f_{2v}$ ,  $f_{4v} - f_{2v}$ , ... On retrouve bien le résultat attendu, du fait de la forme de l'expression du déplacement axial.

### 7.4.6 Comparaison entre les cas L et G

Dans ce paragraphe, nous nous sommes intéressés à examiner les différences entre la résolution du système d'équations régissant le comportement dynamique de la poutre pour les cas L et G. La comparaison est effectuée essentiellement sur le déplacement transverse puisque le déplacement axial est très faible pour le cas L.

Les figures 7.29 et 7.30 montrent respectivement, l'évolution de l'amplitude maximale du déplacement transverse de la poutre,  $V_{\max}$ , et l'évolution des amplitudes des pics des deux premières fréquences de la TF du déplacement transverse au point  $X_5$ , en fonction de la force pour les cas L et G.



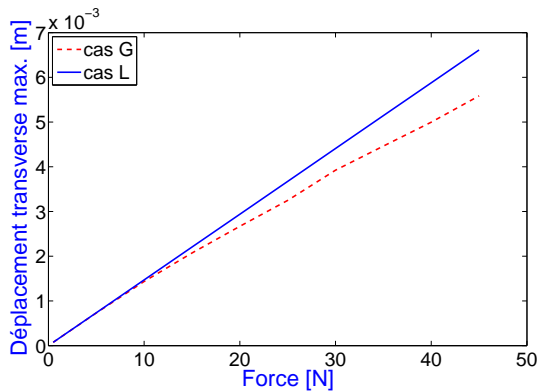


FIGURE 7.29: Déplacement transverse maximal en fonction de la force obtenu avec les cas L et G pour la poutre E-E.

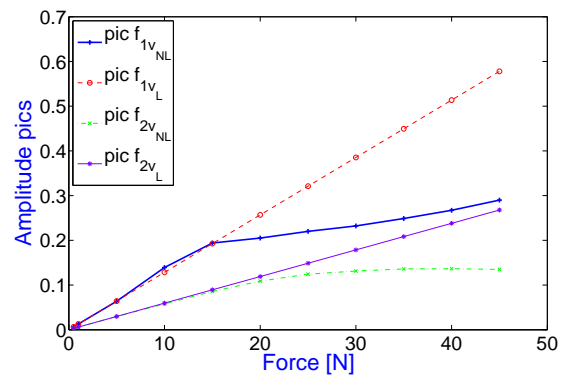


FIGURE 7.30: Amplitudes des pics des deux premières fréquences propres de la TF du déplacement transverse au point  $X_5$  en fonction de la force obtenues avec les cas L et G pour la poutre E-E.

Comme pour l'étude statique, la flèche maximale obtenue pour le cas G est inférieure à celle obtenue pour le cas L (Fig. 7.29). Par ailleurs, les graphes des figures 7.29 et 7.30 permettent de mettre en évidence que, jusqu'à une force de 10-15 N, l'écart entre les cas L et G est assez faible et qu'à partir de 15 N, notamment pour l'amplitude du pic de la première fréquence (Fig. 7.30), l'écart devient plus important. L'utilisation du cas L n'est alors plus valide.

### 7.4.7 Autres cas de CL

Les résultats obtenus pour l'étude des déplacements axial et transverse pour les autres cas de CL de la poutre, A-A et E-L, sont présentés en annexe E. Les caractéristiques de la poutre restent inchangées par rapport à l'étude du cas E-E réalisée au paragraphe précédent (Tab. 7.1).

Cette étude a permis de dégager les similitudes et les différences entre les différents cas de CL :

*L'étude dynamique des différentes CL a permis de montrer que le déplacement axial avait peu d'influence sur le déplacement transverse. Par contre, l'inverse n'est pas vrai puisque les fréquences prépondérantes présentes dans le spectre du signal temporel du déplacement axial sont des combinaisons des fréquences (double, somme et différence) issues du déplacement transverse.*

*L'étude en fonction du niveau de force révèle que l'amplitude des pics de la TF du déplacement axial augmente beaucoup plus rapidement que celle du déplacement transverse. Elle a également permis de mettre en évidence les différents comportements suivant les cas de CL pour la composante transverse : «hardening» pour la poutre E-E et «softening» pour la poutre A-A et E-L.*

*Enfin pour la comparaison des résultats obtenus entre les cas L et G pour la flèche maximale de la poutre, contrairement au cas statique pour la poutre A-A et E-L, la flèche maximale de la poutre est plus importante pour le cas G que pour le cas L. De plus, pour les caractéristiques de la poutre choisies, il apparaît que, pour une flèche maximale supérieure au dixième de l'épaisseur de la poutre, l'utilisation du modèle linéaire n'est plus valide.*

### 7.4.8 Calcul analytique simplifié du déplacement axial pour une poutre E-E en flexion

Dans ce paragraphe, nous allons établir un modèle analytique de la TF du déplacement axial d'une poutre E-E en linéaire, afin de vérifier certains résultats observés numériquement dans ce Chapitre, notamment la présence de combinaisons de fréquences propres transverses dans le spectre du déplacement axial et l'évolution de l'amplitude de ces pics avec le niveau de force.

Pour calculer le déplacement axial  $u(x, t)$ , nous allons nous intéresser essentiellement à la deuxième équation du système défini en (7.15) :

$$\rho S \ddot{u} - ES(u'' + v'v'') = 0 \quad (7.56)$$

soit

$$\rho S \ddot{u} - ESu'' = f_{induite} \quad (7.57)$$

avec  $f_{induite} = ESv'v''$ .

Cette équation est linéaire en  $u$  et la solution sera alors de la forme suivante :

$$u(x, t) = u_{RL}(x, t) + u_{RF}(x, t) \quad (7.58)$$

où  $u_{RL}(x, t)$  et  $u_{RF}(x, t)$  sont respectivement les réponses libre et forcée du déplacement axial de la poutre.

Nous supposons que les réponses libre et forcée du déplacement axial de la poutre peuvent s'exprimer par superposition modale :

$$u_{RL}(x, t) \approx \sum_{k=1}^{N_u} \alpha_{RL}^k(t) \Psi_k(x) \quad u_{RF}(x, t) \approx \sum_{k=1}^{N_u} \alpha_{RF}^k(t) \Psi_k(x) \quad (7.59)$$

où  $\alpha_{RL}^k(t)$  et  $\alpha_{RF}^k(t)$  sont les coefficients temporels des réponses libre et forcée du déplacement axial et  $\Psi_k(x)$  les déformées modales de la poutre E-E en traction-compression définies par :

$$\Psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho SL}} \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (7.60)$$

Par ailleurs, étant donné que le couplage est également présent pour le cas L (faible niveau de force) et qu'il agit très peu sur le déplacement transverse, nous supposerons abusivement que le déplacement transverse peut se décomposer classiquement, lorsque seuls les  $N_v$  premiers modes sont pris en compte, par superposition modale [11] :

$$v(x, t) \approx \sum_{k=1}^{N_v} b_k(t) \phi_k(x)$$

où  $b_k(t)$  et  $\phi_k(x)$  sont respectivement la réponse à la force  $g(x, t)$  et les déformées modales de la poutre, définies au Chapitre 4 en 4.2.

Rappelons l'expression de  $b_k(t)$  définie, au Chapitre 4 en (4.3), pour une excitation de la forme  $g(x, t) = F \cdot \delta_t^{t_0} \cdot \delta_x^{x_0}$  et pour  $t_0 = 0$  :

$$b_k(t) = \frac{F \phi_i(x_0)}{\rho S \tilde{\omega}_k^v} \sin(\tilde{\omega}_k^v t) \cdot e^{-\xi_k^v \omega_k^v t}$$

avec  $\omega_k = \frac{(\beta_k L)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$  et  $\tilde{\omega}_k = \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}$ ,  $\beta_k L$  étant une solution de l'équation transcendante aux valeurs propres qui est  $\cos(\beta_k L) \cdot \cosh(\beta_k L) = 1$  pour la poutre E-E.

D'après la décomposition du déplacement transverse  $v(x, t)$ , il vient pour  $v'(x, t)$  et  $v''(x, t)$  :

$$v'(x, t) \approx \sum_{k=1}^{N_v} b_k(t) \phi'_k(x) \quad v''(x, t) \approx \sum_{k=1}^{N_v} b_k(t) \phi''_k(x)$$

La force d'excitation induite par le déplacement transverse  $f_{induite}(x, t)$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} f_{induite}(x, t) &= v'(x, t) \cdot v''(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{N_v} b_i(t) \phi'_i(x) \cdot \sum_{j=1}^{N_v} b_j(t) \phi''_j(x) \\ &= \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{j=1}^{N_v} B_{ij}(t) \varphi_{ij}(x) \end{aligned} \quad (7.61)$$

où  $B_{ij}(t) = b_i(t) \cdot b_j(t)$  et  $\varphi_{ij}(x) = \phi'_i(x) \cdot \phi''_j(x)$ .

La réponse libre du déplacement axial  $u_{RL}(x, t)$  s'atténuant au bout d'un certain temps, nous allons nous intéresser uniquement à la réponse forcée  $u_{RF}(x, t)$ . Le coefficient temporel  $\alpha_{RF}^k(t)$  est défini par

$$\alpha_{RF}^k(t) = \frac{1}{\rho S \tilde{\omega}_k^u} \int_0^t F_{induite}^k(\tau) \cdot \sin(\tilde{\omega}_k^u(t - \tau)) e^{-\xi_k^u \omega_k^u(t - \tau)} d\tau \quad (7.62)$$

avec  $F_{induite}^k(t) = \int_0^L f_{induite}(x, t) \Psi_k(x) dx$

La TF de la réponse forcée du déplacement axial est égale à

$$\hat{u}_{RF}(x, \omega) = \sum_{k=1}^{N_u} \Psi_k(x) \hat{\alpha}_{RF}(\omega) \quad (7.63)$$

et nous avons la transformée de Fourier classique, définie pour  $t \geq 0$  :

$$TF[\sin(at) \cdot e^{-bt}] = \frac{a}{(b + I\omega)^2 + a^2} \quad (7.64)$$

Le coefficient  $\alpha_{RF}^k(t)$  étant le produit de convolution des fonctions  $F_{induite}^k(t)$  et  $\sin(\tilde{\omega}_k^u t) e^{-\xi_k^u \omega_k^u t}$ , sa TF,  $\hat{\alpha}_{RF}(\omega)$ , sera égale au produit des TF de ces deux fonctions, soit

$$\hat{\alpha}_{RF}(\omega) = \frac{1}{\rho S} \hat{F}_{induite}^k(\omega) \cdot \frac{1}{\omega_k^{u2} - \omega^2 + 2I\xi_k^u \omega_k^u \omega} \quad (7.65)$$

Or, nous avons  $\widehat{F}_{induite}^k(\omega) = \int_0^L \widehat{f}_{induite}(x, \omega) \Psi_k(x) dx$  avec  $\widehat{f}_{induite}(x, \omega)$  qui vaut

$$\widehat{f}_{induite}(x, \omega) = \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{j=1}^{N_v} \varphi_{ij}(x) \widehat{B}_{ij}(\omega) \quad (7.66)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \widehat{B}_{ij}(\omega) &= a_{ij} \cdot \text{TF}[\sin(\tilde{\omega}_i^v t) \cdot e^{-\xi_i^v \omega_i^v t} \cdot \sin(\tilde{\omega}_j^v t) \cdot e^{-\xi_j^v \omega_j^v t}] \\ &= a_{ij} \cdot \text{TF} \left[ [\cos((\tilde{\omega}_j^v - \tilde{\omega}_i^v)t) - \cos((\tilde{\omega}_i^v + \tilde{\omega}_j^v)t)] \cdot e^{-(\xi_i^v \omega_i^v + \xi_j^v \omega_j^v)t} \right] \end{aligned} \quad (7.67)$$

$a_{ij}$  étant un facteur d'amplitude, dépendant du niveau de force  $F$  et de l'abscisse du point d'excitation  $x_0$ , défini par

$$a_{ij}(x_0, F) = \frac{1}{2} \frac{F^2 \phi_i(x_0) \phi_j(x_0)}{(\rho S)^2 \tilde{\omega}_j^v \tilde{\omega}_i^v} \quad (7.68)$$

En posant  $\Delta_{ij}^+ = \tilde{\omega}_i^v + \tilde{\omega}_j^v$  les sommes des pulsations,  $\Delta_{ij}^- = \tilde{\omega}_j^v - \tilde{\omega}_i^v$  les différences des pulsations et  $\zeta_{ij} = \xi_i^v \omega_i^v + \xi_j^v \omega_j^v$ , il vient après simplification

$$\widehat{B}_{ij}(\omega) = a_{ij}(x_0, F) \cdot \frac{4(\zeta_{ij} + I\omega) \tilde{\omega}_j^v \tilde{\omega}_i^v}{[(\zeta_{ij} + I\omega)^2 + \Delta_{ij}^{-2}] [(\zeta_{ij} + I\omega)^2 + \Delta_{ij}^{+2}]} \quad (7.69)$$

Finalement, pour la TF de la réponse forcée du déplacement axial, nous avons

$$\widehat{u}_{RF}(x, \omega) = \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{j=1}^{N_v} a_{ij}(x_0, F) \cdot C_{ij}(x, \omega) \quad (7.70)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } C_{ij}(x, \omega) &= \sum_{k=1}^{N_u} D_{ijk}(x) \cdot E_{ijk}(\omega) \\ D_{ijk}(x) &= \Psi_k(x) \cdot \int_0^L \varphi_{ij}(x) \cdot \Psi_k(x) dx \\ E_{ijk}(\omega) &= \frac{4(\zeta_{ij} + I\omega) \tilde{\omega}_j^v \tilde{\omega}_i^v}{[\omega_k^{u2} - \omega^2 + 2I\xi_k^u \omega_k^u \omega] \cdot [(\zeta_{ij} + I\omega)^2 + \Delta_{ij}^{-2}] \cdot [(\zeta_{ij} + I\omega)^2 + \Delta_{ij}^{+2}]} \end{aligned} \quad (7.71)$$

A partir de l'expression de la TF du déplacement axial (7.70), plusieurs remarques peuvent être faites. Tout d'abord, nous retrouvons bien que les fréquences présentes dans le spectre sont des combinaisons des fréquences propres transverses de la poutre (sommes, différences et doubles (pour  $i = j$ )), au travers des termes  $\Delta_{ij}^+$ ,  $\Delta_{ij}^-$ . La figure 7.31 permet de l'illustrer en représentant les termes de la somme  $C_{4j}$  et  $C_{5j}$  pour  $j = 1 \dots 5$ .

Ensuite, l'expression (7.68) du facteur d'amplitude  $a_{ij}(x_0, F)$  montre l'influence du point d'excitation par rapport aux modes excités ( $\phi_i(x_0) \cdot \phi_j(x_0)$ ) et on retrouve bien que l'évolution de l'amplitude des pics de la TF du déplacement axial en fonction du niveau de force est quadratique. Par ailleurs,

comme tout déplacement, seuls les premiers termes de l'expression (7.70) (pour  $i$  et  $j$  petits) ont une amplitude importante du fait des valeurs du facteur  $a_{ij}$  (Fig. 7.32).

Enfin, il apparaît que le facteur spatial (ou forme modale) de ces combinaisons de fréquences est assez complexe et dépend du nombre de modes axiaux choisis pour le modèle :  $\sum_{k=1}^{N_u} \Psi_k(x) \cdot \int_0^L \varphi_{ij}(x) \cdot \Psi_k(x) dx$ .

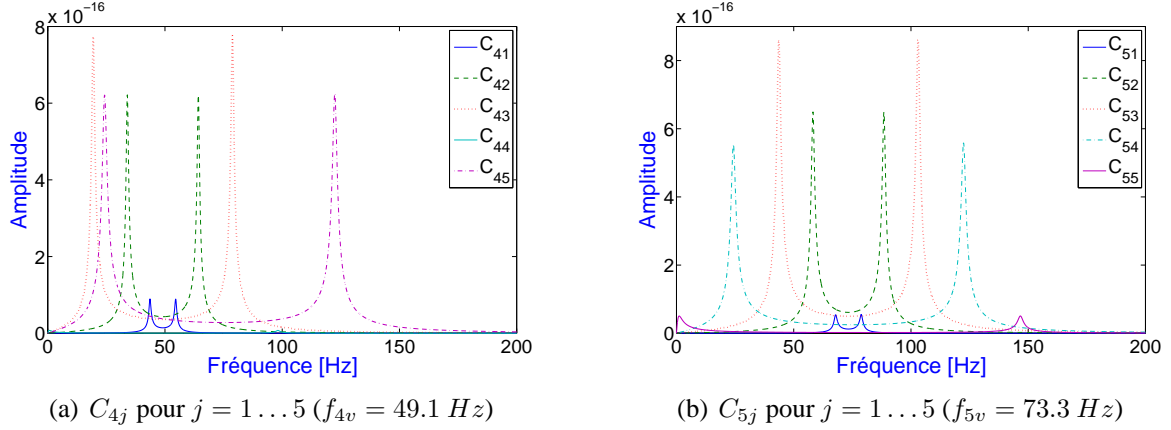


FIGURE 7.31: Composantes de la TF du déplacement axial.

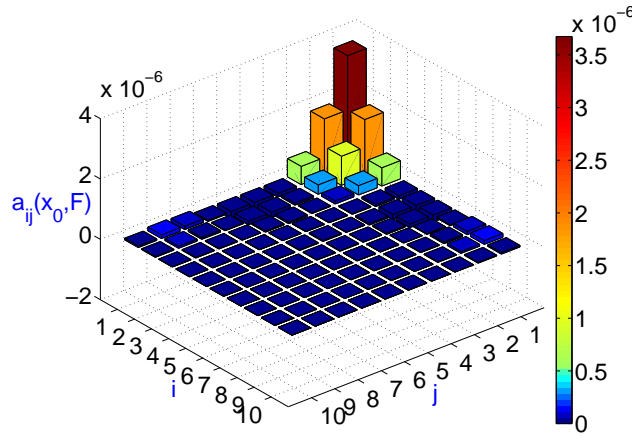


FIGURE 7.32: Facteur d'amplitude  $a_{ij}$  pour  $N_v = 10$  ( $i = 1 \dots 10$  et  $j = 1 \dots 10$ ).

Nous avons comparé les résultats obtenus pour la TF du déplacement axial au point  $X_5$  ( $x = 0.27$  m) issue de la résolution du système non-linéaire couplé (7.15) et du calcul théorique approché (7.70), pour une force d'amplitude  $F_v = 0.1$  N ( $F_u = 0$ ), le point d'excitation  $x_0 = 0.5$  m et  $N_v = N_u = 5$ . Les caractéristiques de la poutre sont celles répertoriées dans le tableau 7.1. Comme les excitations ne sont pas tout à fait identiques et que la normalisation des TF est différente, les TF ont été normalisées au maximum d'amplitude dans la bande de fréquence  $[0 \ 100]$  Hz.

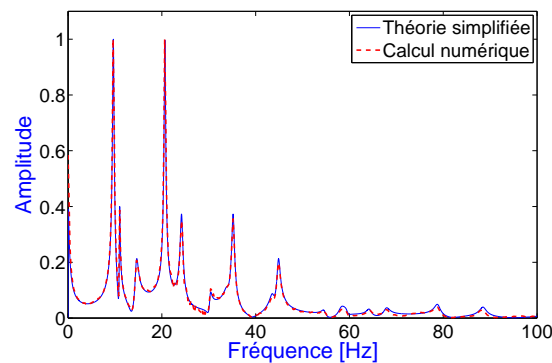


FIGURE 7.33: Comparaison des TF obtenues à partir du calcul théorique et de la résolution numérique du système défini en (7.15).

Les courbes normalisées obtenues à partir des calculs théorique et numérique sont confondues. Cela permet de valider le calcul analytique simplifié de la TF du déplacement axial (7.70) établi dans ce paragraphe pour une poutre E-E et de faibles niveaux de force ou de flèche.

## 7.5 Conclusion

Dans ce Chapitre, le comportement d'une poutre soumise à des rotations modérées a été étudié en statique et en dynamique. Cette étude a permis de montrer les limites des logiciels commerciaux et de valider la modélisation EF proposée pour représenter le phénomène des non-linéarités géométriques. Trois cas de conditions aux limites ont été traités (A-A, E-E et E-L). L'étude de ces trois cas a mis en évidence les limites du cas L (modèle linéaire) et l'influence du couplage entre les déplacements axial et transverse, en particulier sur l'amplitude temporelle maximale du déplacement axial.

Un modèle simplifié de la TF du déplacement axial pour la poutre E-E a été défini et comparé, pour validation, à la TF obtenue à partir de la résolution numérique du système non linéaire couplé régissant le mouvement de la poutre. Les deux concordent.

Dans le Chapitre suivant, nous allons utiliser les déplacements axial et transverse obtenus dans ce Chapitre, en statique et en dynamique, afin de calculer la mesure réalisée par un ELB-CA fixé sur une poutre soumise à des rotations modérées. En effet, les déplacements axial et transverses,  $u$  et  $v$ , vont permettre de déterminer les termes qui composent la mesure de l'ELB-CA, à savoir,  $u'$ ,  $u'^2$ ,  $v'^2$ ,  $v''$ ... Les observations faites dans ce Chapitre, notamment sur l'étude du spectre du déplacement axial, serviront pour différencier les spécificités de la mesure des ELB-CA de celles du comportement de la poutre en non-linéaire.

## 7.6 Bibliographie

- [1] Nguyen T.M., *Dynamique non linéaire des systèmes mécaniques couplés : Réduction de modèle et Identification*, Thèse, ENPC, Paris/Marne la Vallée, 2007.
- [2] Potel C., *Principes et Applications de Mécanique Analytique*, Cépaduès Edition, 2006.
- [3] Clough R.W., Penzien J., *Dynamics of Structures*, Mc Graw Hill, 1993.
- [4] <http://www.comsol.fr/products/multiphysics>
- [5] COMSOL Multiphysics User's Guide, version 3.2.

- [6] [http ://www.mscsoftware.com/products/adams.cfm](http://www.mscsoftware.com/products/adams.cfm)
- [7] Gérardin M., Cardona A., *Flexible Multibody Dynamics : a Finite Element Approach*, Wiley & Sons, 2001.
- [8] Verlinden O., *Simulation du comportement dynamique de systèmes multicorps flexibles comportant des membrures de formes complexe*, Thèse, Faculté Polytechnique de Mons, 1994.
- [9] Dehombreux P., *Simulation du comportement dynamique de systèmes multicorps contraints*, Thèse, Faculté Polytechnique de Mons, 1995.
- [10] Datoussaïd S., *Optimisation du comportement dynamique et cinématique de systèmes multicorps à structure cinématique complexe*, Thèse, Faculté Polytechnique de Mons, 1998.
- [11] Gérardin M., Rixen D., *Théorie des vibrations : Application à la dynamique des structures*, Masson, 1996.





## Chapitre 8

### Mesure d'un ELB-CA pour une poutre mince en rotations modérées

---

**C**E CHAPITRE présente l'étude de la mesure réalisée par les ELB-CA pour une poutre soumise à des rotations modérées. A partir des déplacements axial et transverse étudiés au Chapitre précédent, les différents termes composants la mesure de déformation et donc de l'ELB-CA sont calculés. Ainsi, les termes prépondérants de la mesure sont déterminés et des expressions simplifiées de la mesure de l'ELB-CA sont proposées en statique et en dynamique suivant les différents cas de CL de la poutre.

Les études statique et dynamique montrent que les deux termes de la mesure de l'ELB-CA,  $u'$  et  $v'^2/2$ , se compensent. Alors, en dynamique, les expressions de la mesure de l'ELB-CA définies dans le cas L et l'état de l'art ne sont pas applicables pour des rotations modérées de la poutre, le cas G doit être utilisé.

L'apparition de pics supplémentaires observée au Chapitre 6 au niveau de la TF des ELB-CA, lorsque la flèche de la poutre augmente, est confirmée. L'apparition de ces pics provient de la déformation de l'axe neutre et la sensibilité de l'ELB-CA aux non-linéarités géométriques, en fonction de son placement, est alors définie.

Des confrontations théorie-expérience réalisées sur des poutre E-E et E-L permettent de valider ces résultats et il semblerait que des pics supplémentaires soient également présent au niveau des TF des accéléromètres.

---

**Plan du Chapitre 8**

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>243</b>
<b>8.2</b>	<b>Rappels : Mesure de l'ELB-CA pour une poutre en flexion . . . . .</b>	<b>243</b>
8.2.1	Mesure de l'ELB-CA . . . . .	243
8.2.2	Hypothèse des petites déformations . . . . .	243
<b>8.3</b>	<b>Simplification de la mesure de l'ELB-CA pour des rotations modérées . . . . .</b>	<b>244</b>
8.3.1	Calcul numérique de la mesure de l'ELB-CA . . . . .	244
8.3.2	Vérification de l'hypothèse des petites déformations . . . . .	246
8.3.3	Etude des termes composant la mesure de l'ELB-CA . . . . .	248
<b>8.4</b>	<b>Mesure de l'ELB-CA pour une poutre en rotations modérées en statique . . .</b>	<b>252</b>
8.4.1	Cas de la poutre E-E . . . . .	253
8.4.2	Autres cas de CL . . . . .	258
8.4.3	Confrontation théorie-expérience : poutre E-L . . . . .	259
<b>8.5</b>	<b>Mesure de l'ELB-CA pour une poutre en rotations modérées en dynamique . .</b>	<b>259</b>
8.5.1	Mesure dynamique locale de la déformation . . . . .	260
8.5.2	Intégration de la mesure de déformation : l'ELB-CA . . . . .	265
8.5.3	Apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF des ELB-CA . . . . .	267
8.5.4	Comparaison de la mesure de l'ELB-CA obtenue à partir des différentes formulations . . . . .	270
8.5.5	Comparaison de la mesure de l'ELB-CA avec les données numériques de déplacement, vitesse et accélération . . . . .	272
8.5.6	Autres cas de CL . . . . .	276
8.5.7	Confrontations théorie-expérience . . . . .	277
<b>8.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>291</b>
<b>8.7</b>	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>291</b>

---

## 8.1 Introduction

Dans ce Chapitre, nous allons nous attacher à déterminer les termes prépondérants de l'expression de la mesure réalisée par l'ELB-CA définie au Chapitre 3 pour la flexion transverse d'une poutre en rotations modérées. Par ailleurs, la vérification de la validité de l'hypothèse des petites déformations est faite.

Dans un premier temps, un rappel de l'expression générale de la mesure d'un ELB-CA et des hypothèses faites pour le cas d'application de la poutre est effectué. Ensuite, les simulations numériques déjà effectuées au Chapitre précédent pour étudier les déplacements transverse et axial de la poutre pour les différentes CL vont nous permettre de calculer tous les termes composants la mesure de l'ELB-CA et d'évaluer leur amplitude. Nous pourrons alors, en fonction des résultats obtenus, proposer une expression simplifiée de la mesure de l'ELB-CA.

Une fois cette expression obtenue, des études numériques statique et dynamique sont réalisées pour les différentes CL de la poutre. L'objectif de l'étude dynamique est de valider ou non l'apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF de la mesure de l'ELB-CA qui a été observée au Chapitre 6. Une étude dynamique numérique d'autres types de mesure ponctuelle (déplacement, vitesse et accélération) est également réalisée et les résultats sont comparés à ceux obtenus pour l'ELB-CA.

Conjointement aux études numériques statique et dynamique, des confrontations théorie-expérience sont présentées. Les expériences sont réalisées avec les deux systèmes de mesure optique présentés au Chapitre 2 : sur une poutre E-E en acier en dynamique avec le système de mesure SMARTEC et sur une poutre E-L en plexiglas avec le système de mesure FOGALE en statique et en dynamique.

## 8.2 Rappels : Mesure de l'ELB-CA pour une poutre en flexion

### 8.2.1 Mesure de l'ELB-CA

L'expression générale de la mesure réalisée par un ELB-CA, établie au Chapitre 3 en (3.62), pour la flexion transverse d'une poutre dans le plan  $(O, x, y)$  avec les hypothèses cinématiques d'Euler-Bernoulli est :

$$D_{opt}(t) = \int_a^b \frac{n_0}{2\sqrt{1 + n_0^2\beta[(1 - \nu)p_{12} - \nu p_{11}]\varepsilon_{xx}}} \sqrt{1 + 2\beta\varepsilon_{xx}} dx$$

où  $n_0 = 1.46$  est l'indice de réfraction de la FO (silice),  $\nu = 0.25$  le coefficient de Poisson de la FO,  $p_{11} \approx 0.12$  et  $p_{12} \approx 0.27$  les constantes photoélastiques de la FO [9],  $\beta$  le facteur de restitution de la déformation au niveau de l'ELB-CA que l'on prendra égal à 1 et  $\varepsilon_{xx}$  la déformation axiale subie par l'ELB-CA définie en (3.49) par :

$$\varepsilon_{xx} = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y \frac{u''v' - (1 + u')v''}{\sqrt{(1 + u')^2 + v'^2}} + \frac{y^2 [u''v' - (1 + u')v'']^2}{2 [(1 + u')^2 + v'^2]^2}$$

où  $u$  et  $v$  sont respectivement les déplacements axial et transverse de la poutre et  $y$  la distance de l'ELB-CA à l'axe neutre.

### 8.2.2 Hypothèse des petites déformations

L'hypothèse principale réalisée est celle des petites déformations, définie en 3.4.1 :  $\varepsilon_{xx} \ll 1$ . Nous avons alors démontré que la variation de longueur optique  $\Delta D_{opt}(t)$  est égale à la variation de

longueur physique  $\Delta D_{AB}(t)$  à une constante multiplicative près

$$\Delta D_{opt}(t) = (\beta n_0 + \kappa) \Delta D_{AB}(t)$$

avec  $\kappa = -\frac{1}{2}n_0^3\beta[(1-\nu)p_{12} - \nu p_{11}]$

Il suffit donc de s'intéresser au calcul de la variation de longueur physique  $\Delta D_{AB}(t)$  pour obtenir la mesure réalisée par l'ELB-CA :

$$\Delta D_{AB}(t) = \int_a^b \varepsilon_{xx} dx = \int_a^b \left[ u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y \frac{u''v' - (1+u')v''}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} + \frac{y^2 [u''v' - (1+u')v'']^2}{2 [(1+u')^2 + v'^2]^2} \right] dx$$

Les termes  $u'$ ,  $u''$ ,  $v'$  et  $v''$  vont être calculés à partir des déplacements axial et transverse obtenus lors des simulations numériques réalisées au Chapitre précédent. Ainsi, nous allons pouvoir évaluer l'amplitude des termes qui composent la mesure  $\Delta D_{AB}(t)$  et déterminer lesquels sont prépondérants. La mesure  $\Delta D_{AB}(t)$  étant l'intégrale de la déformation  $\varepsilon_{xx}$ , cela revient donc à évaluer les termes prépondérants de la déformation subie par l'ELB-CA pour une poutre en rotations modérées. Dans la suite du Chapitre, lorsque nous parlerons de la mesure de l'ELB-CA pour les études numériques, nous ferons allusion à la variation de longueur physique du capteur  $\Delta D_{AB}(t)$ .

### 8.3 Simplification de la mesure de l'ELB-CA pour des rotations modérées

Rappelons que les simulations numériques réalisées au Chapitre précédent, permettant d'obtenir les déplacements axial et transverse pour la poutre en rotations modérées, sont effectuées à partir du code EF implémenté sous *Matlab* en dynamique et à partir du logiciel *Femlab* en statique. Les caractéristiques de la poutre sont celles répertoriées dans le tableau 7.1 du Chapitre précédent.

Pour l'étude statique, une échelle de force de 0 à 20 N, discrétisée en 400 points, soit un pas de force de 0.05 N, a été appliquée au point de la poutre d'abscisse  $x = 0.88$  m. Le modèle de poutre est discrétisé avec des éléments 2D (maillage triangulaire à 6 noeuds), il comprend 941 éléments et 5412 ddl. Ensuite en post-traitement, les résultats sont interpolés et lissés sur une grille régulière de 30 points d'ordonnée  $y = 0$ .

Pour l'étude dynamique, la poutre est discrétisée en 31 éléments et le nombre de mode choisis pour la base linéaire tronquée est  $N_u = N_v = 6$ . Les simulations numériques sont effectuées entre les instants  $t_0 = 0$  et  $t_f = 15$  s, intervalle de temps discrétisé en  $N_t = 3750$  points. La poutre est excitée par un choc appliqué dans le plan  $(O, x, y)$  au point d'abscisse  $x_0 = 0.5$  m et à l'instant  $t_0$ . Le choc est simulé par une demi-sinusoïde dont la durée est égale à 0.008 s. La durée du choc est égale à deux pas de temps, ainsi l'amplitude de la TF de l'excitation est constante sur toute la plage de fréquence. L'amortissement modal est pris constant pour tous les modes et égal à 0.8 %.

#### 8.3.1 Calcul numérique de la mesure de l'ELB-CA

Les déplacements axial et transverse, respectivement  $u$  et  $v$ , sont obtenus en statique et en dynamique avec une discrétisation de la poutre comprenant 30 ou 31 noeuds suivant les CL étudiées. Pour obtenir  $u'$ ,  $u''$ ,  $v'$  et  $v''$  à partir de  $u$  et  $v$ , les déplacements axial et transverse discrétisés sont interpolés par spline (1000 points) pour chaque pas de temps en dynamique et pour chaque pas de

force en statique. L'interpolation par spline obtenue est ensuite interpolée par un polynôme d'ordre élevé (de degré 20) dont les coefficients permettent de remonter aux quantités désirées par simple et double dérivation spatiale.

La figure 8.1 présente un exemple en dynamique où, pour un pas de temps donné quelconque, les déplacements axial et transverse discrétisés (30 points) et leurs deux interpolations successives (spline puis polynôme) sont comparées. On vérifie bien que les courbes se superposent parfaitement.

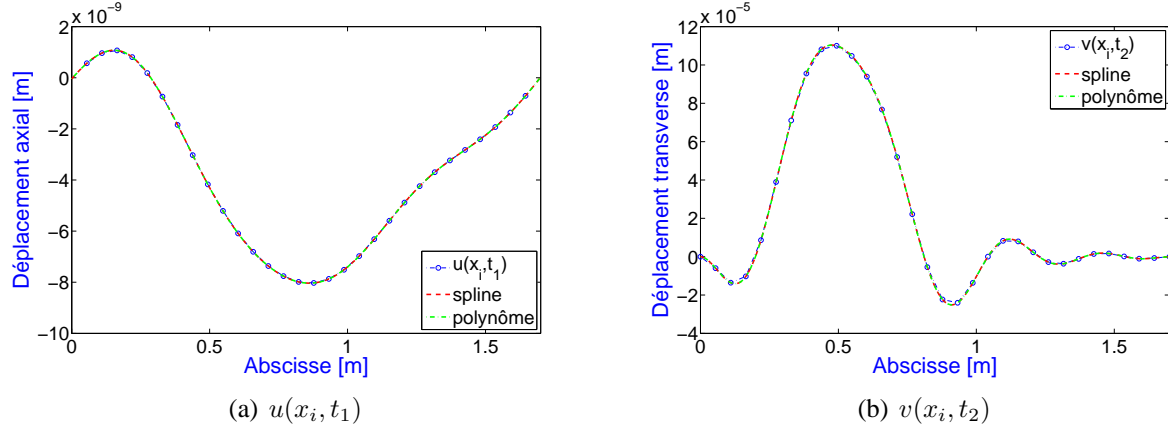


FIGURE 8.1: Interpolations des déplacements axial et transverse en dynamique pour un pas de temps donné.

Afin de vérifier que l'erreur introduite dans le calcul de la mesure de l'ELB-CA par la double interpolation et la simple ou double dérivation de  $u$  et  $v$  n'est pas trop importante, les mesures dynamiques d'un ELB-CA obtenues pour le cas  $L^1$  à l'aide de l'expression analytique du déplacement transverse définie en (4.1) et par double interpolation puis double dérivation de  $v$  ont été comparées. La figure 8.2 présente la mesure d'un ELB-CA, situé entre les abscisse  $x=[0.6 \ 0.9]$  m, obtenue à partir des calculs analytique d'une part et numérique d'autre part.

<sup>1</sup>Dans ce cas, la mesure de l'ELB-CA vaut  $\Delta D_{AB}(t) = -y \cdot \int_a^b v'' dx$  et peut être déterminée analytiquement.

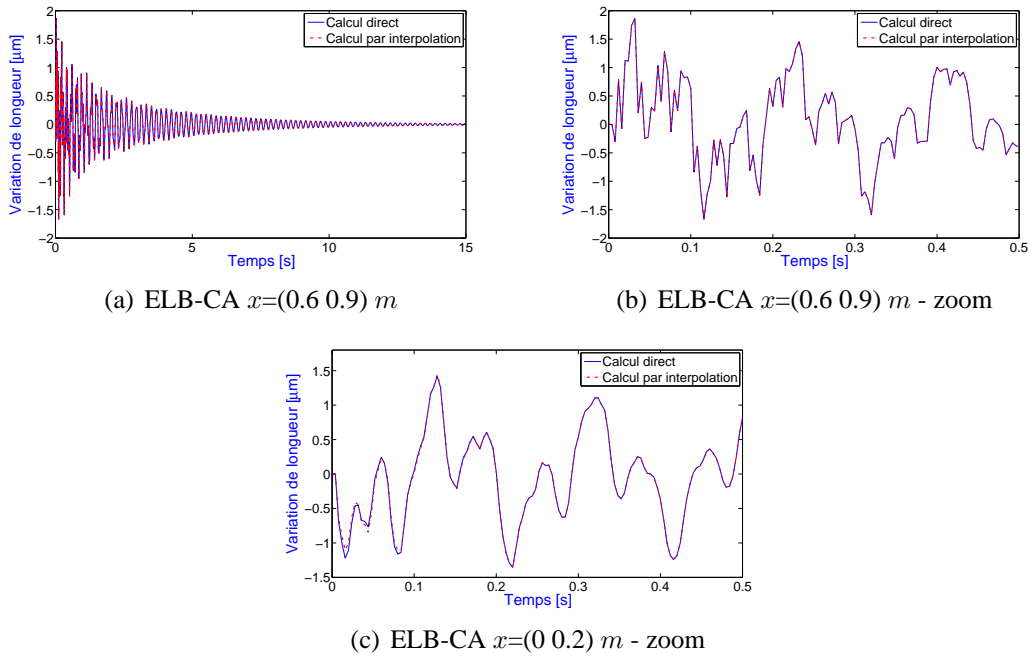


FIGURE 8.2: Comparaison des signaux de l'ELB-CA obtenus à partir de l'expression analytique et par interpolation.

La mesure de l'ELB-CA obtenue par interpolation coïncide parfaitement avec celle obtenue à partir de l'expression analytique. Un zoom de la figure 8.2(a), présenté sur la figure 8.2(b), le confirme. Cependant, l'ELB-CA est placé vers le milieu de la poutre or l'erreur introduite par les interpolations devient plus importante au niveau des extrémités. La figure 8.2(c) présente un zoom de la mesure obtenue pour un ELB-CA placé entre les abscisses  $x=[0 \ 0.2] \text{ m}$ . Un léger décalage est observé entre les mesures analytique et numérique pour  $t < 0.1 \text{ s}$ . Celui-ci étant infime, il n'aura pas d'influence sur les résultats pour le calcul des TF des mesures numériques d'ELB-CA.

### 8.3.2 Vérification de l'hypothèse des petites déformations

Dans ce paragraphe, nous allons nous assurer que l'hypothèse des petites déformations ( $\varepsilon_{xx} < 1$ ) est bien vérifiée pour une ligne des surfaces de la poutre ( $y = \pm h/2$ , l'expression de la déformation est rappelée en 8.2.1) et pour l'axe neutre dont l'expression de la déformation est :

$$\varepsilon_{xx}^{\text{axe}} = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2}$$

Les figures 8.3 et 8.4 présentent l'amplitude maximale des déformations obtenues pour une ligne de la surface de la poutre et pour l'axe neutre en fonction du rapport  $R = v_{\text{max}}/h$  suivant les différents cas de CL, respectivement en dynamique et en statique. La déformation pour la surface supérieure ( $y = h/2$ ) est notée  $\varepsilon_{xx}^+$  et celle pour la surface inférieure ( $y = -h/2$ ) est notée  $\varepsilon_{xx}^-$ .

Les graphes des figures 8.3 et 8.4 sont tracés en fonction du rapport de la flèche maximale sur la hauteur de la poutre ( $R$ ). Les simulations numériques réalisées au Chapitre précédent en fonction de la force permettent d'obtenir en statique des rapports  $R$  maximum ( $R_{\text{max}}$ ) de 12 pour la poutre A-A, 160 pour la poutre E-L, 2 pour la poutre E-E. En dynamique,  $R_{\text{max}}$  vaut 0.4 pour la poutre A-A, 0.3 pour la poutre E-L et 2 pour la poutre E-E.

### 8.3 Simplification de la mesure de l'ELB-CA pour des rotations modérées

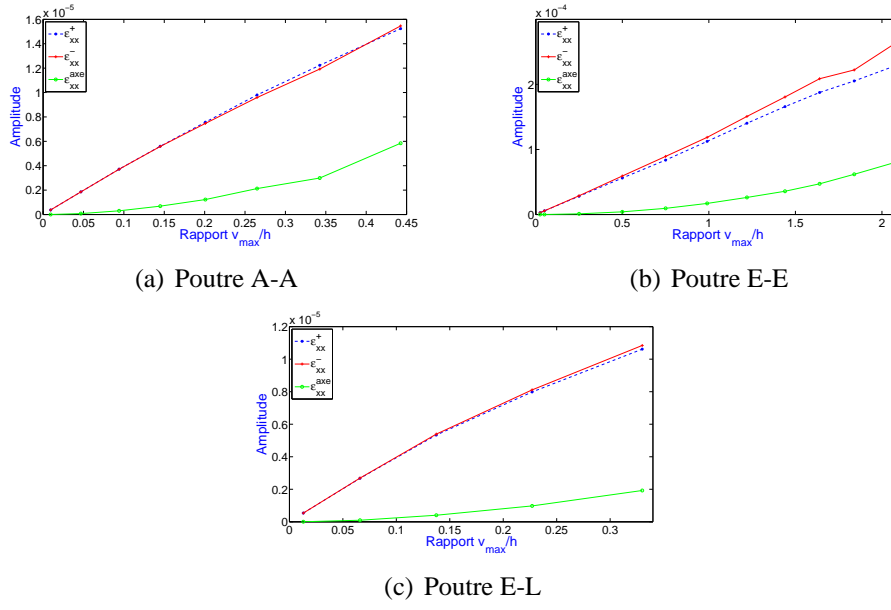


FIGURE 8.3: Amplitude maximale de  $\varepsilon_{xx}^+$ ,  $\varepsilon_{xx}^-$  et  $\varepsilon_{xx}^{axe}$  en fonction de  $R = v_{\max}/h$ , en dynamique et pour différents cas de CL de la poutre.

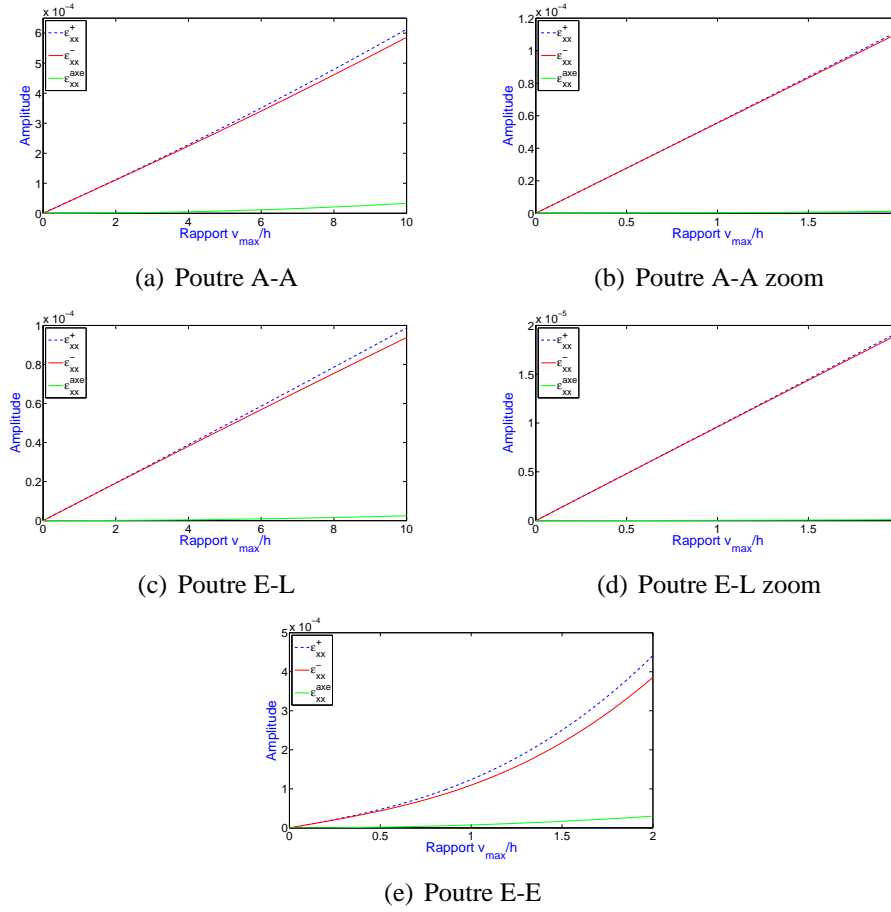


FIGURE 8.4: Amplitude maximale de  $\varepsilon_{xx}^+$ ,  $\varepsilon_{xx}^-$  et  $\varepsilon_{xx}^{axe}$  en fonction de  $R = v_{\max}/h$ , en statique et pour différents cas de CL de la poutre.

Aussi bien en statique qu'en dynamique, nous observons toujours que  $\varepsilon_{xx}^{\pm} > \varepsilon_{xx}^{\text{axe}}$ . Nous obtenons pour les différents cas de CL les valeurs de déformation maximale  $\varepsilon_{xx}^{AA} < 1.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_{xx}^{EL} < 10^{-5}$  et  $\varepsilon_{xx}^{EE} < 2 \cdot 10^{-4}$  en dynamique et si nous prenons pour toutes les CL un rapport  $R$  égal à 2 en statique, nous avons  $\varepsilon_{xx}^{AA} < 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_{xx}^{EL} < 2 \cdot 10^{-5}$  et  $\varepsilon_{xx}^{EE} < 4.5 \cdot 10^{-4}$  (sinon pour la poutre A-A avec  $R = 12$  nous avons  $\varepsilon_{xx}^{AA} < 7.5 \cdot 10^{-4}$  et pour la poutre E-L avec  $R = 160$ ,  $\varepsilon_{xx}^{EL} < 2.2 \cdot 10^{-3}$ ).

*L'hypothèse des petites déformations,  $\varepsilon_{xx} \ll 1$ , est vérifiée pour n'importe quelle ligne de hauteur  $y$  de la poutre compris entre  $-h/2$  et  $+h/2$  (soit l'ensemble de la poutre,  $h$  étant la hauteur de la poutre) dont l'axe neutre ( $y = 0$ ).*

Il faut toutefois se souvenir que pour les cas de CL où le rapport  $R$  est élevé (A-A et surtout E-L), nous n'avons pas pris en compte la déformation plastique de la poutre, qui n'est pas l'objet de l'étude présente. Ainsi, les résultats obtenus pour des rapports  $R$  élevés sont à considérer avec précaution.

Comme  $\varepsilon_{xx}^{\text{axe}} \ll 1$ , alors l'expression de la déformation peut être simplifiée en effectuant un développement limité des deux fractions, soit :

$$\varepsilon_{xx} \approx u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y \cdot [u''v' - (1 + u')v''] + \frac{y^2}{2}[u''v' - (1 + u')v'']^2 \quad (8.1)$$

et en négligeant les termes d'ordre supérieur  $y^2/2 \cdot [u''v' - (1 + u')v'']^2$  et  $u'^2/2$ , il vient une première simplification

$$\varepsilon_{xx} \approx u' + \frac{v'^2}{2} + y[u''v' - (1 + u')v''] \quad (8.2)$$

### 8.3.3 Etude des termes composant la mesure de l'ELB-CA

Dans ce paragraphe, nous allons décomposer l'expression de la déformation  $\varepsilon_{xx}$  en plusieurs termes et étudier l'évolution des maxima de ces termes pour différents rapports  $R$  (ou niveaux de flèche de la poutre), afin de déterminer lesquels sont prépondérants dans la mesure de l'ELB-CA. Notre étude portera sur une ligne de la poutre située à la surface supérieure ( $y = h/2$ ), alors les termes de la déformation étudiés sont les suivants :  $u'$ ,  $v'^2/2$ ,  $(h/2)u''v'$ ,  $-(h/2)v''$  et  $-(h/2)u'v''$ . Pour déterminer les amplitudes maximales de ces termes, nous calculerons leurs valeurs absolues. Les valeurs maximales des différents termes, obtenues en dynamique et en statique pour différents rapports  $R$  et trois cas de CL (E-E, A-A et E-L), sont respectivement représentées sur les figures 8.5 et 8.6.



### 8.3 Simplification de la mesure de l'ELB-CA pour des rotations modérées

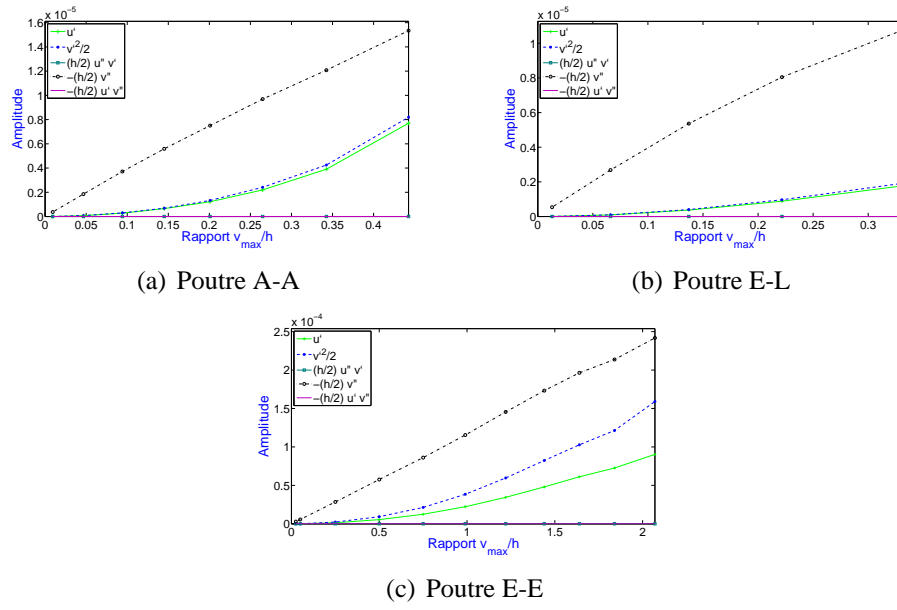


FIGURE 8.5: Amplitude maximale des termes principaux de la mesure de l'ELB-CA en dynamique et différents cas de CL de la poutre.

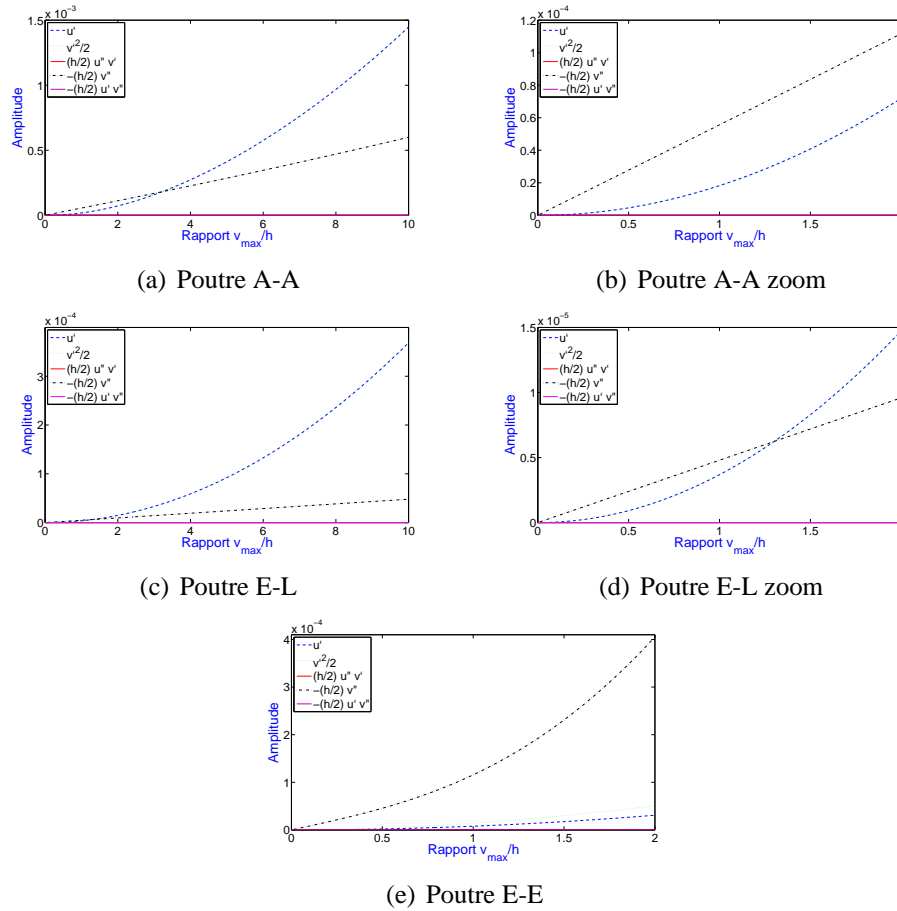


FIGURE 8.6: Amplitude maximale des termes principaux de la mesure de l'ELB-CA en statique et pour différents cas de CL de la poutre.

Le tableau 8.1 répertorie les valeurs maximales des valeurs absolues des termes composants la mesure de l'ELB-CA pour les rapports  $R$  maximum en dynamique (2 pour E-E, 0.4 pour A-A et 0.3 pour E-L) et pour un rapport  $R = 2$  en statique.

Termes	Statique			Dynamique		
	A-A	E-E	E-L	A-A	E-E	E-L
$u'$	$7.39 \cdot 10^{-5}$	$2.89 \cdot 10^{-5}$	$1.49 \cdot 10^{-5}$	$7.70 \cdot 10^{-6}$	$9.03 \cdot 10^{-5}$	$1.76 \cdot 10^{-6}$
$v'^2/2$	$7.28 \cdot 10^{-5}$	$5.05 \cdot 10^{-6}$	$1.49 \cdot 10^{-5}$	$8.19 \cdot 10^{-6}$	$1.59 \cdot 10^{-4}$	$1.91 \cdot 10^{-6}$
$u' + v'^2/2$	$1.29 \cdot 10^{-6}$	$3.00 \cdot 10^{-5}$	$7.89 \cdot 10^{-10}$	$5.84 \cdot 10^{-6}$	$7.97 \cdot 10^{-5}$	$1.93 \cdot 10^{-6}$
$u'^2/2$	$2.73 \cdot 10^{-9}$	$4.19 \cdot 10^{-10}$	$1.11 \cdot 10^{-10}$	$2.96 \cdot 10^{-11}$	$4.08 \cdot 10^{-9}$	$1.55 \cdot 10^{-12}$
$yu''v'$	$2.89 \cdot 10^{-9}$	$2.30 \cdot 10^{-9}$	$8.22 \cdot 10^{-11}$	$2.01 \cdot 10^{-10}$	$1.21 \cdot 10^{-8}$	$4.64 \cdot 10^{-11}$
$-yv''$	$1.13 \cdot 10^{-4}$	$4.14 \cdot 10^{-4}$	$9.64 \cdot 10^{-6}$	$1.53 \cdot 10^{-5}$	$2.42 \cdot 10^{-4}$	$1.07 \cdot 10^{-5}$
$-yu'v''$	$1.02 \cdot 10^{-9}$	$1.11 \cdot 10^{-8}$	$4.11 \cdot 10^{-11}$	$6.72 \cdot 10^{-11}$	$6.97 \cdot 10^{-9}$	$7.68 \cdot 10^{-12}$

**TABEAU 8.1:** Amplitudes maximales des termes de l'expression de la déformation pour les différentes CL de la poutre.

Les figures 8.5 et 8.6, ainsi que les résultats du tableau 8.1, montrent que les termes prépondérants au niveau de la déformation en dynamique et en statique, pour les rapports  $R$  considérés, sont les termes  $u'$ ,  $v'^2/2$  et  $-(h/2)v''$ . Par ailleurs, les valeurs maximales de la somme  $u' + v'^2/2$  ont été répertoriées dans le tableau 8.1. Cela permet de voir que, plutôt que de s'ajouter, les contributions de chacun des termes  $u'$  et  $v'^2/2$  ont tendance à se compenser. Rappelons que les valeurs obtenues ici pour les différents termes sont spécifiques à la configuration choisie : dimensions de la poutre et emplacement de la force. Une généralisation paraît difficile, il faut donc faire des études au cas par cas.

En statique, à partir d'un certain rapport  $R$ , l'amplitude des termes  $u'$  et  $v'^2/2$  devient supérieure à celle du terme  $-(h/2)v''$  pour les poutres A-A et E-L. En dynamique, par extrapolation des courbes, cela se produirait également pour des valeurs de  $R$  plus importantes avec les cas A-A et E-E. Cependant pour le code EF développé, à partir d'un certain niveau de flèche, le temps de calcul devient extrêmement important. Ainsi, pris séparément,  $u'$  et  $v'^2/2$  peuvent devenir prépondérants devant  $-(h/2)v''$  mais leur somme  $u' + v'^2/2$ , qui est l'expression simplifiée de la déformation de l'axe neutre, ne l'est pas (voir poutre E-L en statique Tab. 8.1). Ceci montre bien que les deux termes se compensent.

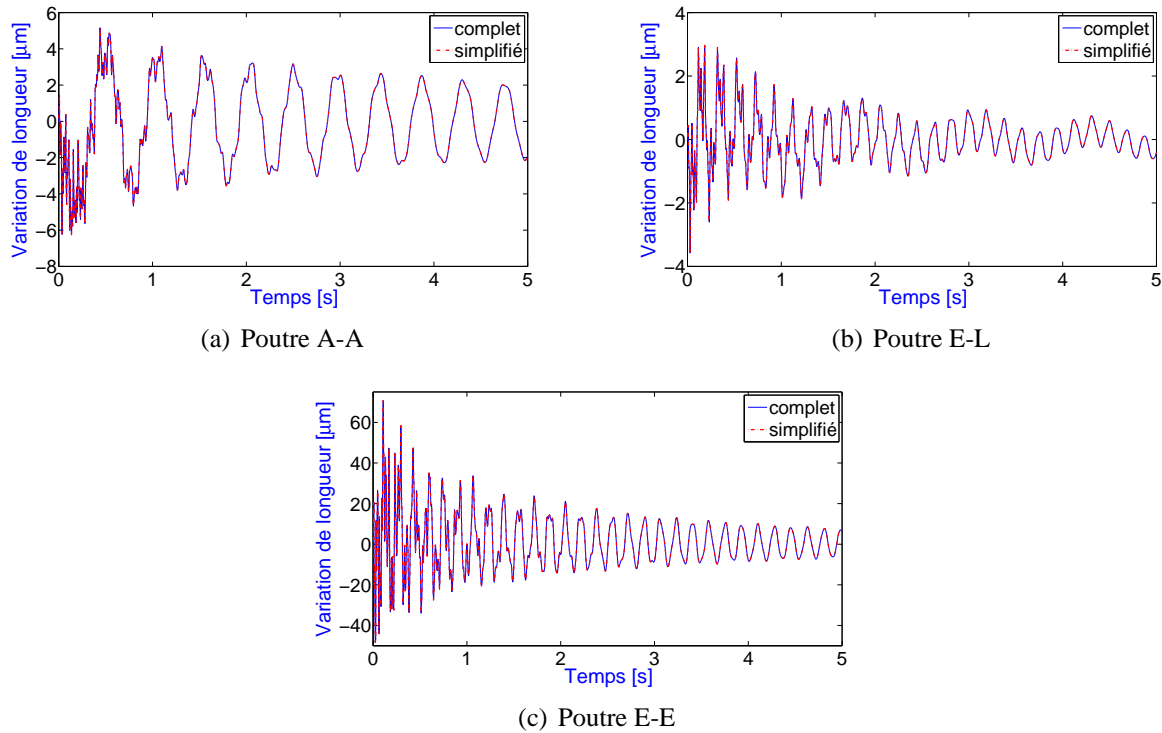
Finalement, l'expression de la déformation pour une poutre en rotations modérées s'écrit simplement :

$$\varepsilon_{xx} \approx u' + \frac{v'^2}{2} - yv'' \quad (8.3)$$

*Comme pour le cas des cordes vibrantes [1], il s'avère que  $u'$  est du même ordre de grandeur que  $v'^2/2$ . Alors, la simplification usuelle présentée dans beaucoup de cours de RDM ainsi que dans [2], où l'expression de la déformation  $\varepsilon = u' + u'^2/2 + v'^2/2$  se simplifie en  $\varepsilon = u'$  lorsque les termes d'ordre supérieur sont négligés, est incorrecte pour une poutre en flexion. En effet, si  $u' \ll 1$  alors  $u'^2/2$  peut être négligé devant  $u'$ , ce qui n'est pas le cas de  $v'^2/2$ , qui s'avère être du même ordre de grandeur quelque soit la flèche de la poutre.*

### 8.3 Simplification de la mesure de l'ELB-CA pour des rotations modérées

Afin de s'assurer que l'utilisation de l'expression de la déformation simplifiée obtenue en (8.3) est justifiée pour les niveaux de flèche de la poutre importants, nous avons comparé les mesures de l'ELB-CA obtenues à partir des expressions générale (rappels en 8.2.1) et simplifiée (8.3) de la déformation, en dynamique et en statique, pour les trois cas de CL. Les figures 8.7 et 8.8 présentent les résultats obtenus respectivement en dynamique et en statique.



**FIGURE 8.7:** Comparaison de la réponse dynamique de l'ELB-CA obtenue à partir des modèles complet et simplifié de la déformation pour différents cas de CL de la poutre.

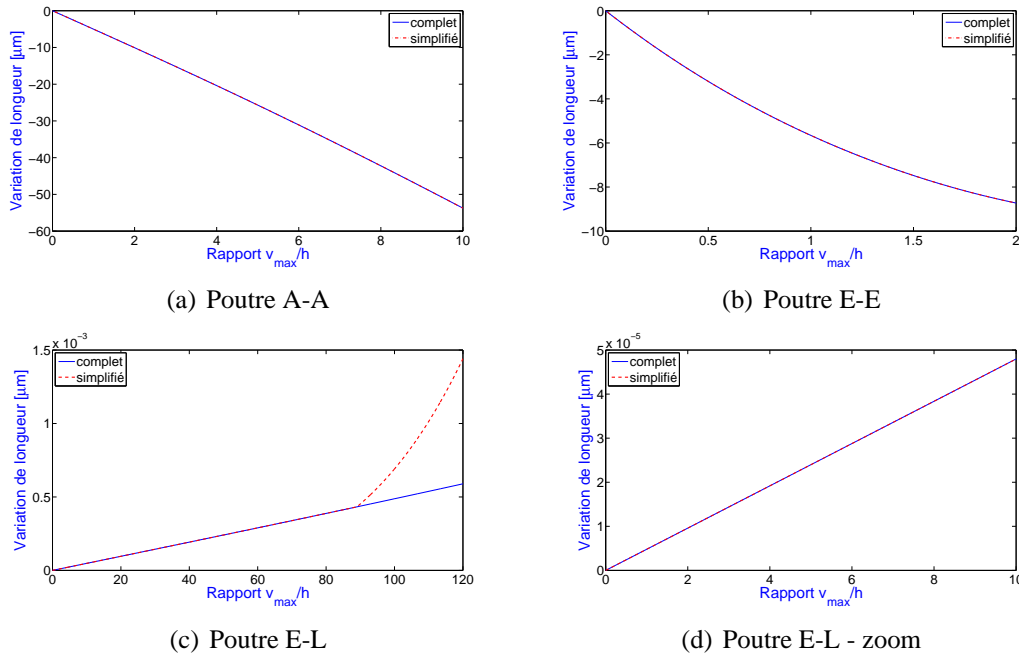


FIGURE 8.8: Comparaison de la réponse statique de l'ELB-CA obtenue à partir des modèles complet et simplifié de la déformation pour différents cas de CL de la poutre.

Les figures 8.7 et 8.8 confirment que les réponses de l'ELB-CA obtenues à partir des expressions générale et simplifiée de la déformation coïncident parfaitement en statique et en dynamique pour les cas de CL A-A et E-E, avec les rapports  $R$  considérés. Cependant, la figure 8.8(c), dont la figure 8.8(d) est un zoom, montre que l'expression de la déformation simplifiée, obtenue en (8.3), n'est plus satisfaisante pour la poutre E-L pour des rapports  $R$  beaucoup plus importants (sous réserve que la poutre ne soit pas dans un domaine de déformation plastique). Il apparaît alors que le terme d'ordre supérieur  $u'^2/2$  doit être pris en compte dans le calcul de la mesure pour des valeurs de  $R$  plus importantes. L'expression de la déformation **pour la poutre E-L en statique** sera alors

$$\varepsilon_{xx} \approx u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} - yv'' \quad (8.4)$$

Nous avons vérifié que la réponse obtenue pour l'ELB-CA avec l'expression générale et avec l'expression de la déformation (8.4) coïncident parfaitement pour  $R > 120$ . L'expression de la déformation (8.4) sera plus satisfaisante pour des valeurs de  $R$  plus importantes.

## 8.4 Mesure de l'ELB-CA pour une poutre en rotations modérées en statique

Précédemment, nous nous sommes intéressés à l'amplitude maximale des termes composant la déformation d'une poutre. Ces termes composent également la mesure de l'ELB-CA car le capteur réalise l'intégrale de la déformation entre les bornes du capteur. Nous avons déterminé de manière globale (maximum au niveau de la poutre) les termes qui sont prépondérants (à savoir  $u'$ ,  $v'^2/2$ ,  $-yv''$ ) et dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser localement, en statique, à l'amplitude maximale de ces termes pour les différents cas de CL de la poutre. Les courbes représentant ces termes en fonction

de l'abscisse de la poutre sont obtenues avec les cas L et G pour différents niveaux de force et sont comparées. Ensuite, les mesures numériques statiques d'ELB-CA sont tracées en fonction du niveau de force appliqué (ou du rapport  $R = v_{\max}/h$ ).

### 8.4.1 Cas de la poutre E-E

La figure 8.9 présente l'allure des termes composant la mesure simplifiée de l'ELB-CA (8.3) obtenue pour les cas L et G en fonction de l'abscisse de la poutre E-E et pour différents niveaux de force. Les paramètres de l'étude sont ceux définis au Chapitre précédent en 7.3.

La principale différence entre les résultats obtenus à partir des cas L et G pour les différents termes est la valeur de  $u'$  : de l'ordre de  $10^{-8}$  pour le cas L contre  $10^{-5}$  pour le cas G. De ce fait, pour le cas L, la déformation de l'axe neutre va se résumer au seul terme  $v'^2/2$  (Fig. 8.9(f)). Celui-ci va devenir prépondérant pour le calcul de la déformation au niveau de la surface de la poutre (Fig. 8.9(j)), lorsque la flèche de la poutre augmente, devant le terme  $-(h/2)v''$ . Le cas L ne pourra donc être valable que pour des niveaux de flèche de la poutre très faibles, pour lesquels  $v'^2/2$  est négligeable devant  $-(h/2)v''$ .

Pour le cas G, le couplage entre les déplacements axial et transverse implique que le terme  $u'$  est nettement plus important. Par ailleurs, par rapport au cas L, les courbes représentant les termes issus du déplacement transverse en fonction de l'abscisse de la poutre,  $v'^2/2$  et  $-(h/2)v''$ , sont différentes et leurs amplitudes sont beaucoup plus faibles (au minimum divisée par 2 pour  $-(h/2)v''$  et par 20 pour  $v'^2/2$ ). Ceci provient du couplage qui va avoir pour effet de «dissiper» le déplacement transverse au profit du déplacement axial. Il apparaît donc que, globalement,  $u'$  est du même ordre de grandeur que  $v'^2/2$  quel que soit le niveau de force, ce qui n'est pas le cas localement. En effet, au vu de l'allure de ces termes par rapport à l'abscisse de la poutre (resp. Fig. 8.9(a) et 8.9(c)), l'un ou l'autre des deux termes sera prépondérant devant l'autre localement. En fait, pour le cas de la poutre E-E, la déformation de l'axe neutre (Fig. 8.9(e)) est quasi-constante en fonction de l'abscisse de la poutre, même si des oscillations de faibles amplitudes apparaissent lorsque le niveau de force augmente. Ce résultat est en accord avec la théorie puisqu'en statique la seconde équation du système (7.41), régissant le mouvement de la poutre en rotations modérées, est  $u'' + v'v'' = 0$ , soit  $u' + v'^2/2 = cst$ .

Les figures 8.9(g) et 8.9(i) permettent de montrer que la contribution de l'axe neutre au niveau de la déformation de la surface de la poutre n'est pas négligeable devant celle du terme de courbure  $-(h/2)v''$ , notamment aux abscisses où ce terme est faible (entre 0.1 et 0.7 m et entre 1.1 et 1.6 m). La contribution du terme de l'axe neutre dans la mesure de déformation augmente avec la flèche de la poutre.

Rappelons que l'allure des courbes obtenues est caractéristique des paramètres de l'étude, notamment l'emplacement de la force. Pour notre étude, elle est appliquée à l'abscisse  $x = 0.88$  m qui est proche du milieu de la poutre. Ainsi, une certaine symétrie est observée pour les courbes obtenues pour les différents termes.

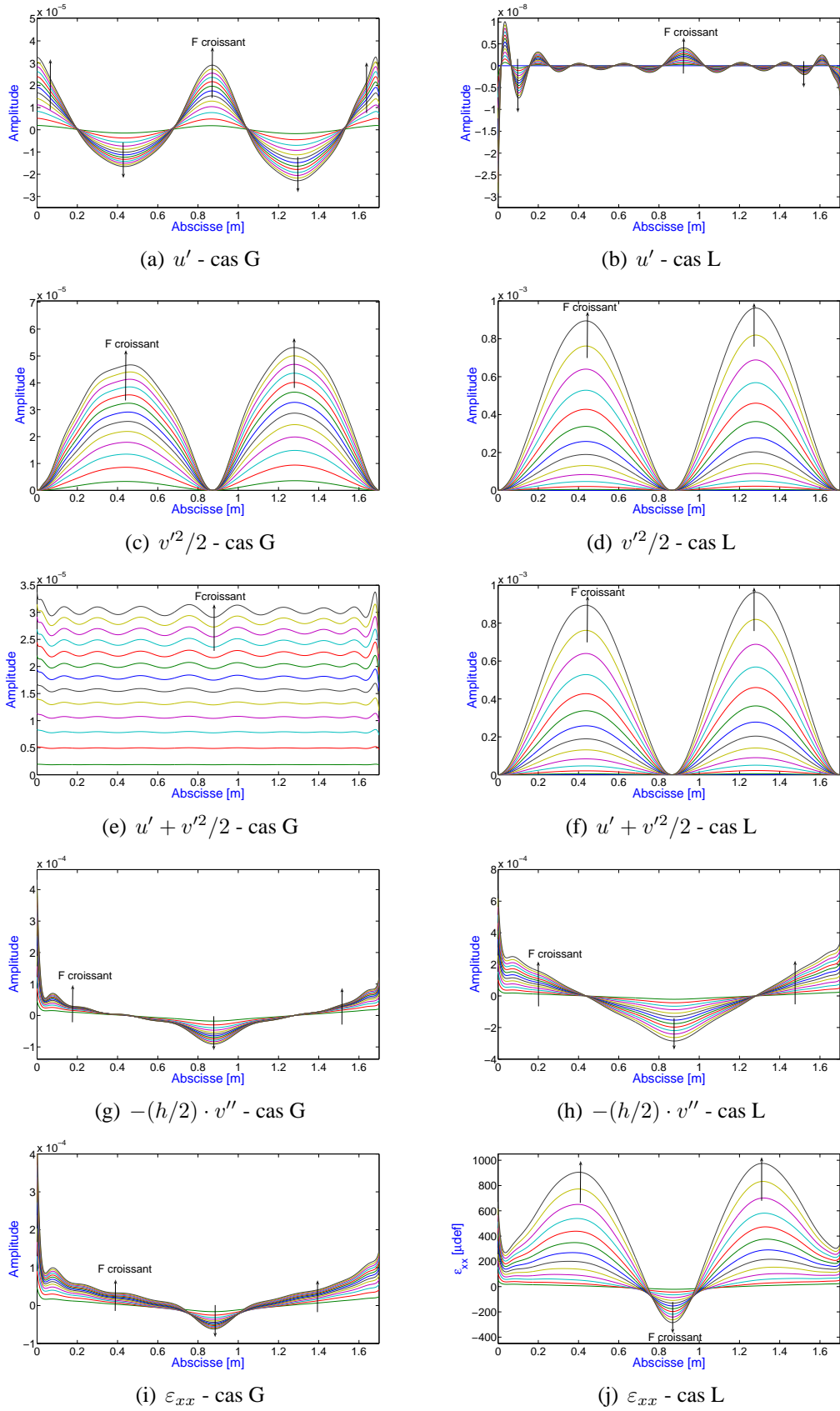
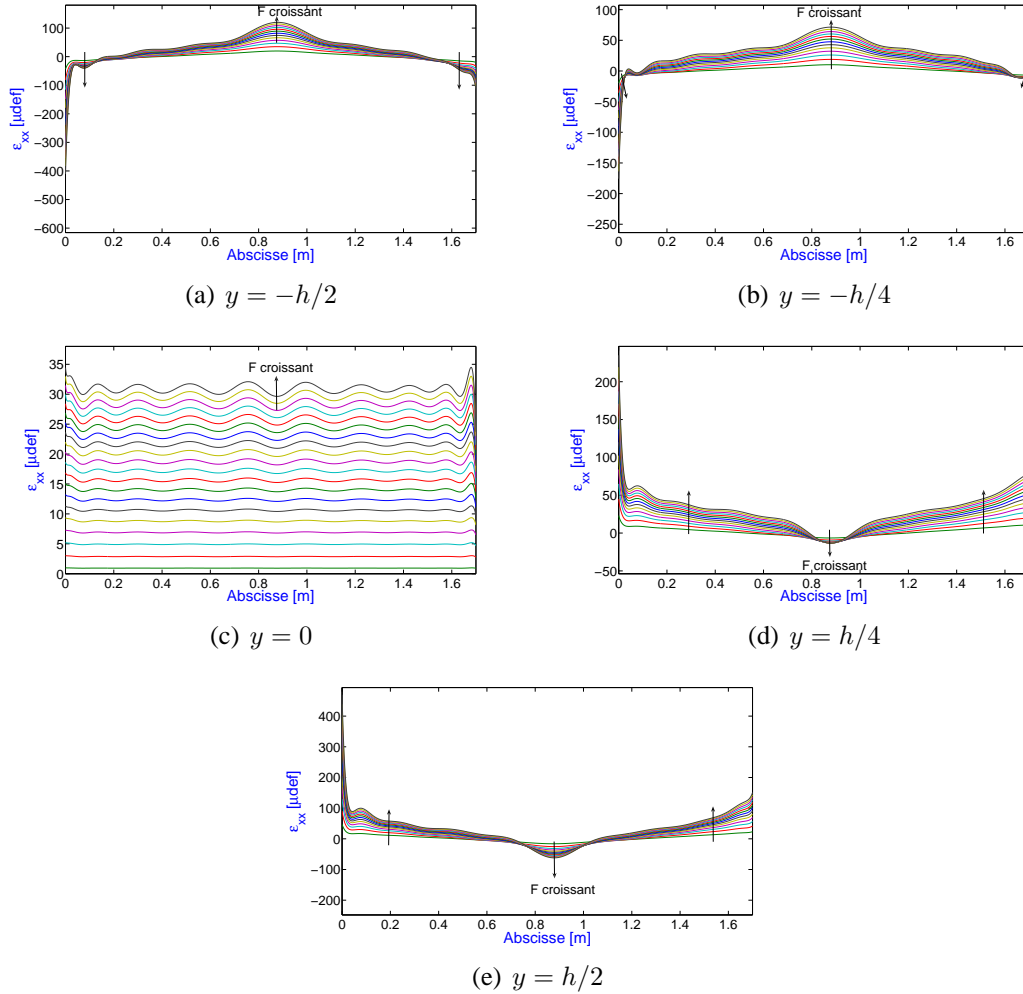


FIGURE 8.9: Evolution des termes composant l'expression de la mesure de l'ELB-CA obtenus avec les cas L et G pour la poutre E-E et différents niveaux de force.

#### 8.4 Mesure de l'ELB-CA pour une poutre en rotations modérées en statique

Au niveau de la figure 8.9, nous avons étudié la déformation au niveau de la surface supérieure de la poutre, c'est-à-dire pour  $y = h/2$ . L'amplitude du terme  $-yv''$  est alors maximale. Le terme de la mesure de l'ELB-CA dépendant de l'axe neutre étant constant et indépendant de la hauteur à l'axe neutre, il sera alors d'autant plus proche, en amplitude, du terme  $-yv''$  que l'on se situera sur une ligne proche de l'axe neutre. Le cas limite est l'axe neutre lui-même où la contribution du terme de courbure  $-yv''$  est nulle puisque  $y = 0$ . La figure 8.10 présente l'évolution de la déformation  $\varepsilon_{xx}$  obtenue pour le cas  $G$  en fonction du niveau de force appliquée et pour plusieurs hauteurs  $y$  ( $-h/2$ ,  $-h/4$ ,  $0$ ,  $h/4$  et  $h/2$ ). Elle permet d'illustrer ce qui est énoncé plus haut.

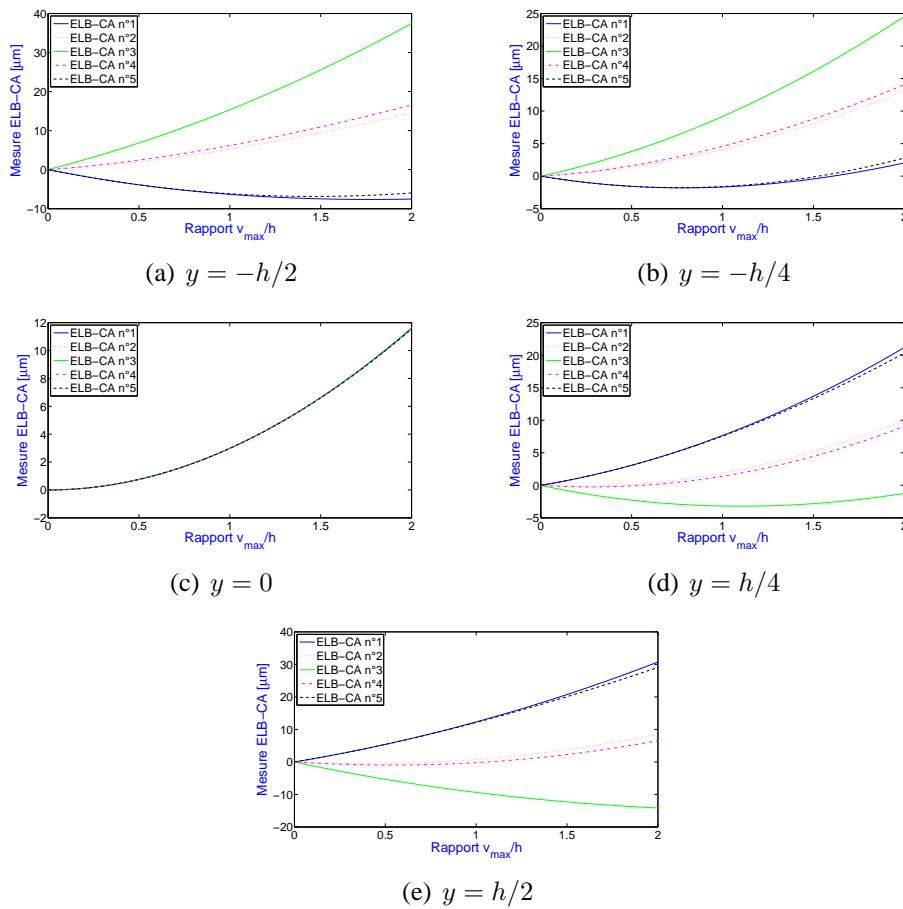


**FIGURE 8.10:** Evolution de la déformation de la poutre en fonction de la force pour différentes valeurs de la hauteur à l'axe neutre  $y$ .

Intéressons nous maintenant à la mesure réalisée par l'ELB-CA. La simulation numérique des mesures d'ELB-CA en fonction du rapport  $R$  ( $=v_{\max}/h$ ), présentée sur la figure 8.11, a été réalisée pour la poutre E-E instrumentée par cinq ELB-CA uniformément répartis, ainsi que pour différentes hauteurs à l'axe neutre  $y$ . Le placement des ELB-CA est répertorié dans le tableau 8.2.

ELB-CA	Bornes d'intégration de l'ELB-CA	
	$a(m)$	$b(m)$
1	0	0.34
2	0.34	0.68
3	0.68	1.02
4	1.02	1.36
5	1.36	1.7

TABLEAU 8.2: Placement des ELB-CA sur la poutre E-E.


 FIGURE 8.11: Mesures numériques statique d'ELB-CA en fonction du rapport  $R$ , obtenues pour plusieurs hauteurs à l'axe neutre  $y$  pour la poutre E-E.

Du fait de la symétrie de la déformation (Fig. 8.9(i)) et du placement des ELB-CA au niveau de la poutre, les mesures numériques obtenues à partir des ELB-CA n°1 et n°5, et n°2 et n°4 sont très proches et ce, quelle que soit la hauteur à l'axe neutre  $y$ . Sur la figure 8.11(c), la déformation de l'axe neutre étant quasi-constante sur l'ensemble de la poutre, les mesures obtenues à partir des cinq ELB-CA sont confondues. Il apparaît qu'entre les hauteurs  $h/2$ ,  $h/4$  et  $-h/4$ ,  $-h/2$ , l'ordre des capteurs est inversé : pour  $y = -h/2$  et  $-h/4$ , nous avons  $\varepsilon_{elb3} > \varepsilon_{elb4} > \varepsilon_{elb2} > \varepsilon_{elb5} > \varepsilon_{elb1}$  et pour  $y = h/2$  et  $h/4$ ,  $\varepsilon_{elb1} > \varepsilon_{elb5} > \varepsilon_{elb2} > \varepsilon_{elb4} > \varepsilon_{elb3}$ . Les graphes de la figure 8.11 montrent que les zones de traction

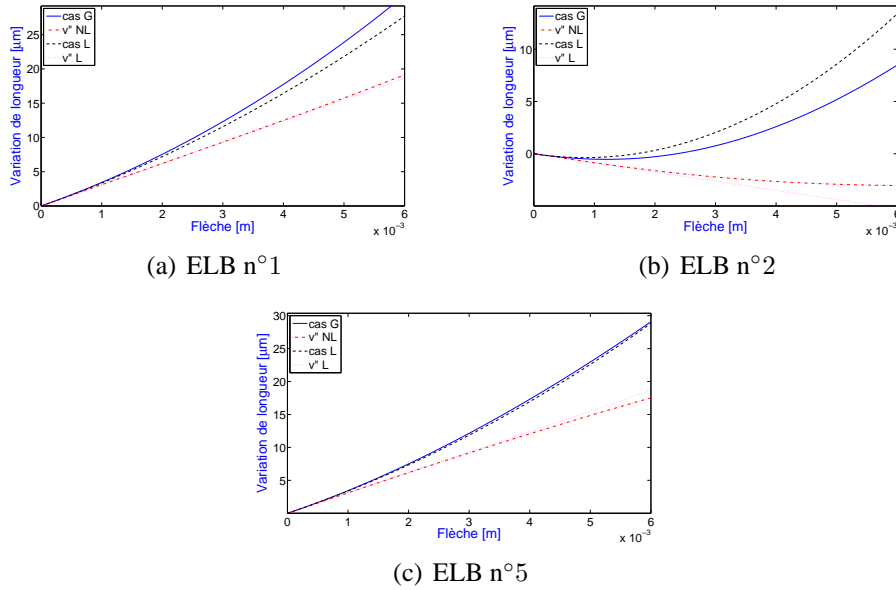


et de compression se déplacent lorsque le rapport  $R$  augmente. Les mesures des ELB-CA n°1 et n°5 permettent de le montrer : pour  $y = -h/4$  (Fig. 8.11(b)), la mesure est négative au départ puis elle devient positive lorsque  $R$  augmente (à partir de  $R \approx 1.6$ ). Les ELB-CA n°1 et n°5 initialement en compression, passent donc en traction à partir de  $R \approx 1.6$ .

Ensuite, nous nous sommes intéressés à l'étude de la mesure obtenue pour un ELB-CA à partir des différentes expressions de la mesure présentées dans le manuscrit : le cas L (3.77), le cas G simplifié (8.3), l'état de l'art (3.97). Pour l'expression de l'état de l'art, nous avons regardé les résultats obtenus en prenant le terme  $v''$  déterminé à partir des équations du cas L et du cas G, notons les  $v_L''$  et  $v_G''$ . Les expressions de la mesure de l'ELB-CA comparées sont donc les suivantes :

$$\begin{aligned} \text{cas L} \quad \Delta D_{AB}^L(t) &= \int_a^b \left( \frac{1}{2} v_L'^2 - y v_L'' \right) dx & \text{Etat de l'art L} \quad \Delta D_{AB}^{v_L''}(t) &= -y \int_a^b v_L'' dx \\ \text{cas G} \quad \Delta D_{AB}^G(t) &= \int_a^b \left( u_G' + \frac{1}{2} v_G'^2 - y v_G'' \right) dx & \text{Etat de l'art G} \quad \Delta D_{AB}^{v_G''}(t) &= -y \int_a^b v_G'' dx \end{aligned}$$

La figure 8.12 présente les résultats obtenus à partir des différentes expressions de la mesure de l'ELB-CA en fonction de  $R$  pour la poutre E-E, différents ELB-CA (n°1, n°2 et n°5) et  $y = h/2$ .



**FIGURE 8.12:** Comparaison des différentes expressions de la mesure de l'ELB-CA en fonction de  $R$  pour différents ELB-CA et pour la poutre E-E.

Pour les trois ELB-CA, les tendances des résultats obtenus, respectivement à partir des cas L et G, et à partir des expressions de l'état de l'art, sont similaires. De plus, les résultats issus de l'expression de l'état de l'art sont éloignés de ceux obtenus avec les cas L et G. Pour l'ELB-CA n°5, les résultats obtenus à partir des cas L et G sont presque identiques car le placement de l'ELB-CA est symétrique par rapport à l'un des noeud de  $u'$  (Fig. 8.9(a)). L'intégrale de  $u'$  est donc très faible et le terme prépondérant au niveau de la déformation de l'axe neutre est  $v'^2/2$  tout comme pour le cas L. Pour ce niveau de flèche de la poutre, les termes  $v'^2/2$  et  $v''$  déterminés à partir des cas L et G sont proches donc la mesure de l'ELB-CA l'est également.

Pour l'analyse des mesures, les graphes des figures 8.9(c) et 8.9(d) peuvent prêter à confusion car ils sont tracés en fonction des différents niveaux de force et non pas en fonction des différents niveaux

de flèche. Or, nous avons vu au Chapitre précédent en 7.3.5 que, pour une même valeur de force, la valeur de flèche obtenue à partir des cas L et G n'est pas la même. En effet, pour  $F = 20 \text{ N}$  (les courbes d'amplitudes plus importantes des deux figures), la flèche obtenue pour le cas L est de  $0.025 \text{ m}$  tandis que pour le cas G elle est seulement de  $0.006 \text{ m}$  (Fig. 7.11 du Chapitre précédent). Ainsi pour une flèche de  $0.006 \text{ m}$ , la courbe représentative pour le cas G sera la plus élevée de la figure 8.9(c) tandis que pour le cas L elle se situera plutôt dans les moins élevées de la figure 8.9(d).

*Les mesures obtenues à partir du cas L se rapprochent le plus de celles du cas G mais, suivant le placement de l'ELB-CA, l'écart peut tout de même être assez important. Par contre, ce n'est pas le cas de l'expression de l'état de l'art, dont les résultats restent très éloignés de ceux obtenus avec le cas G quel que soit l'emplacement de l'ELB-CA. Ainsi, pour la poutre E-E, le seul domaine de validité du cas L et de l'expression de l'état de l'art, indépendamment de l'emplacement de l'ELB-CA, est pour de faibles valeurs de flèche (pour notre étude,  $v_{\max}$  est de l'ordre de  $10^{-4} \text{ m}$ ). Pour ce niveau de flèche de la poutre, toutes les expressions sont équivalentes puisque le terme de courbure  $-(h/2)v''$  est prépondérant et que le couplage est faible. Pour des valeurs de flèche plus importantes, le cas L et l'expression de l'état de l'art ne sont pas valides.*

### 8.4.2 Autres cas de CL

Les mêmes études que pour la poutre E-E (amplitude maximale locale des termes composant la mesure de déformation, comparaison entre les cas L et G, mesure des ELB-CA en fonction du niveau de force) sont réalisées pour les autres cas de CL (A-A et E-L) et les résultats obtenus sont présentés en annexe F en F.1. Les caractéristiques de la poutre restent inchangées par rapport au paragraphe précédent.

Ces études ont permis de dégager les similitudes et les différences pour les mesures de déformation et des ELB-CA entre les différents cas de CL :

*En statique, il apparaît que l'écart entre les formulations des cas L et G est assez important, notamment pour la dérivée du déplacement axial  $u'(x)$  (de l'ordre de  $10^{-8}$  contre  $10^{-2}$ - $10^{-5}$  suivant le cas de CL, quel que soit le niveau de force appliqué). Pour les autres termes,  $v'^2/2$  et  $-(h/2)v''$ , l'écart entre les résultats obtenus à partir des cas L et G sera d'autant plus important que les CL seront contraintes (dans l'ordre E-E > A-A > E-L).*

*Pour le cas L, le terme prépondérant au niveau de la déformation de l'axe neutre et au niveau de la déformation à la surface de la poutre, lorsque le niveau de force augmente, est le terme  $v'^2/2$ . Le cas L n'est donc pas adapté puisque nous avons montré que, pour tous les cas de CL de la poutre,  $u'$  est du même ordre de grandeur que  $v'^2/2$  et que ces deux termes se compensent. Cependant, l'un de ces deux termes peut être prépondérant devant l'autre localement.*

*Au niveau de la mesure réalisée par l'ELB-CA, moins la poutre est contrainte par les CL, plus la mesure est linéaire en fonction du niveau de force, plus  $u'$  et  $v'^2/2$  se compensent (c'est-à-dire moins l'axe neutre de la poutre se déforme) et plus les termes  $v''$  déterminés à partir des cas L et G sont similaires. Ainsi, pour la poutre A-A et E-L, le terme prépondérant dans la mesure de déformation est  $-yv''$ . Les résultats obtenus à partir du cas G et de l'expression de l'état de l'art sont alors identiques, ce qui n'est pas le cas pour la poutre E-E.*

### 8.4.3 Confrontation théorie-expérience : poutre E-L

Afin de valider les résultats numériques obtenus dans le paragraphe précédent, nous avons comparé les résultats expérimentaux obtenus lors de l'étude statique expérimentale présentée au Chapitre 6 en 6.3.5 avec les résultats obtenus par simulation numérique. Rappelons brièvement les paramètres de l'étude : la poutre E-L est en plexiglas, mesure  $1\text{ m}$  de long et  $5\text{ mm}$  d'épaisseur, est instrumentée avec une jauge ( $x=[0.82\ 0.94]\text{ m}$ ) et un ELB-CA FOGALE ( $x=[0.76\ 0.96]\text{ m}$ ), et cinq niveaux de flèche ont été appliqués à l'extrémité libre de la poutre avec un pas de  $0.05\text{ m}$  (de  $0$  à  $0.2\text{ m}$  puis retour à l'état initial).

La figure 8.13 présente les courbes expérimentales obtenues à partir de l'ELB-CA et de la jauge n°2 (resp. Fig.8.13(a) et 8.13(b)), ainsi que les courbes obtenues numériquement à partir des différentes expressions de la mesure de déformation (cas G, état de l'art avec  $v_L''$  et  $v_G''$ ) et en utilisant les déplacements axial et transverse issus de *Femlab*. Pour la figure 8.13(a), qui présente les courbes obtenues pour l'ELB-CA, nous avons également ajouté la variation de longueur physique du capteur car l'ELB-CA mesure une variation de longueur optique proportionnelle, sous certaines hypothèses, à la variation de longueur physique (3.70).

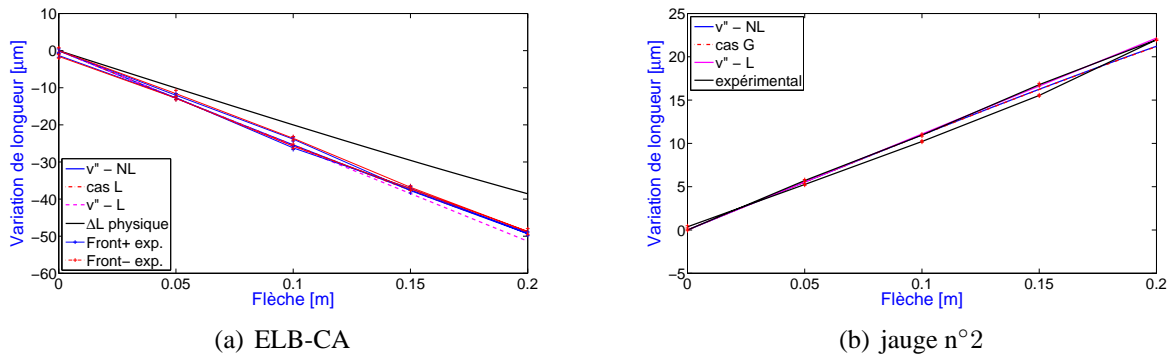


FIGURE 8.13: Comparaison théorie-expérience pour une poutre E-L en plexiglas instrumentée avec une jauge de déformation de  $12\text{ cm}$  et un ELB-CA de  $20\text{ cm}$ .

Pour les niveaux de flèche atteints, les résultats numériques obtenus à partir des différentes expressions diffèrent peu : les courbes obtenues pour le cas G et l'état de l'art, en prenant le terme  $v_G''$  (issu du cas G), sont confondues ; la courbe obtenue avec l'expression de l'état de l'art en prenant le terme  $v_L''$  (issu du cas L) diffère légèrement (pour  $v_{\text{max}}=0.2\text{ m}$ , la variation de longueur obtenue pour l'ELB-CA est de  $-52.2\ \mu\text{m}$  contre  $-49\ \mu\text{m}$  pour les autres expressions, soit  $6\%$  d'écart). Les mesures expérimentales coïncident bien avec les courbes obtenues numériquement à partir des expressions théoriques, aussi bien la jauge que l'ELB-CA, cependant l'écart des mesures entre l'aller et le retour des positions ne permet pas de dire si les valeurs expérimentales suivent plus particulièrement l'une ou l'autre des courbes obtenues numériquement.

## 8.5 Mesure de l'ELB-CA pour une poutre en rotations modérées en dynamique

Nous allons maintenant étudier la mesure dynamique réalisée par un ELB-CA sur une poutre soumise à des rotations modérées.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au cas de la poutre E-E et à l'étude dynamique locale (en un point donné) de la déformation. Ensuite, la même étude numérique que celle effectuée pour le cas L au Chapitre 6 va être réalisée, afin de voir si les résultats sont similaires, c'est-à-dire si des pics supplémentaires apparaissent au niveau de la TF du signal de l'ELB-CA lorsque la flèche de la poutre augmente. Pour cela, nous nous appuierons sur l'étude des déplacements axial et transverse réalisée au Chapitre précédent. Si des pics supplémentaires sont présents dans la TF de l'ELB-CA, nous chercherons à en déterminer l'origine et à définir la sensibilité de l'ELB-CA aux non-linéarités géométriques vis-à-vis de sa configuration (longueur et placement) sur la poutre.

Les résultats numériques obtenus pour la mesure de l'ELB-CA avec le cas G seront également comparés à ceux obtenus à partir des différentes expressions de la mesure (cas L, état de l'art), ainsi qu'à d'autres quantités plus classiques à savoir le déplacement  $v$  (étudié au Chapitre précédent), la vitesse  $\dot{v}$  et l'accélération  $\ddot{v}$ .

Enfin, une confrontation théorie-expérience est présentée pour une poutre en acier E-E et une poutre E-L en plexiglas.

### 8.5.1 Mesure dynamique locale de la déformation

Nous allons dans un premier temps nous intéresser à la mesure dynamique de la déformation de la poutre localement. Ainsi en un point de la poutre, la déformation simplifiée est définie par l'expression (8.3).

Les paramètres choisis (dimensions de la poutre, abscisse du choc, discrétisation temporelle...) sont les mêmes que pour l'étude dynamique réalisée dans le Chapitre précédent en 7.4 : notamment  $N_u = N_v = 6$  et  $t=[0\ 15]\ s$ , intervalle de temps discrétisé en  $N_t = 3750$  points. Nous allons prendre le même point d'étude qu'au Chapitre précédent : le point  $X_5$  d'abscisse  $x = 0.27\ m$ . Pour la poutre E-E, les équations non linéaires du système régissant le comportement de la poutre sont résolues pour plusieurs niveaux de force :  $F=0.5, 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$  et  $45\ N$ . Les valeurs du rapport  $R$  correspondantes sont :  $R=0.025, 0.05, 0.25, 0.50, 0.75, 0.99, 1.22, 1.44, 1.64, 1.84$  et  $2.07$ .

La figure 8.14 présente les signaux temporels et les TF correspondantes des termes composant la déformation au point situé à la surface de la poutre et appartenant à la même section droite de la poutre que le point  $X_5$ , soit  $u'(X_5, t)$ ,  $v'^2(X_5, t)/2$ ,  $-(h/2) \cdot v''(X_5, t)$ , ainsi que la déformation au niveau de l'axe neutre et de la surface de la poutre. L'amplitude de la force d'excitation est  $F=20\ N$ .

En dynamique, l'apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF du signal de l'ELB-CA pour le cas L (voir Chapitre 6) est dû au terme  $v'^2/2$ . En effet, si le terme  $v'$  est défini par décomposition modale (7.61), il possède le même facteur temporel que le déplacement transverse  $v$ . Le spectre du terme  $v'^2/2$  comporte donc des fréquences qui sont des combinaisons (double, somme et différence) des fréquences propres transverses de la poutre. Ainsi, pour que des pics supplémentaires n'apparaissent pas au niveau de la TF du signal de l'ELB-CA, comme c'était le cas pour le cas L, il faudrait qu'un terme atténue ou annule la contribution de  $v'^2/2$  dans la mesure. En statique, nous avons vu dans le paragraphe précédent que les termes  $u'$  et  $v'^2/2$  se compensent. Cependant, si en statique cela peut sembler logique, en dynamique cela paraît moins évident du fait de l'introduction du paramètre fréquentiel : pour que les termes  $u'$  et  $v'^2/2$  puissent se compenser en dynamique, il faudrait que leurs spectres aient le même contenu fréquentiel. Or, nous avons vu au Chapitre précédent que le spectre du déplacement axial comporte des fréquences qui sont des combinaisons (double, somme et différence) des fréquences propres transverses de la poutre comme pour  $v'^2/2$ . Les caractéristiques fréquentielles du déplacement axial provenant du facteur temporel, une dérivation spatiale

ne changera donc pas le contenu fréquentiel mais seulement l'amplitude des pics de fréquence.

*Tout comme pour  $v'^2/2$ , le spectre de  $u'$  comporte des fréquences qui sont des combinaisons (double, somme et différence) des fréquences propres transverses de la poutre.*

Les figures 8.14(b) et 8.14(d) présentent les spectres de  $u'$  et  $v'^2/2$ . Ceux-ci comportent bien des combinaisons de fréquences propres transverses de la poutre. Les figures 8.14(a) et 8.14(c), présentant les signaux temporels, permettent de montrer que les deux termes vont se compenser. Les fréquences propres transverses ainsi que les combinaisons de fréquences pouvant être présentes dans les différents spectres sont répertoriées respectivement dans les tableaux 7.9 et 7.11 du Chapitre précédent. La figure 8.14(f) présente le spectre de la déformation de l'axe neutre (égale à  $u' + v'^2/2$ ). Il apparaît clairement que les deux termes se sont compensés puisque, sur les trois pics prépondérants de chacun des spectres (pour  $f = f_2 - f_1$ ,  $2f_1$  et  $f_2 + f_1$ ), un seul ( $f = 2f_1$ ) reste prépondérant dans le spectre de la mesure de l'axe neutre.

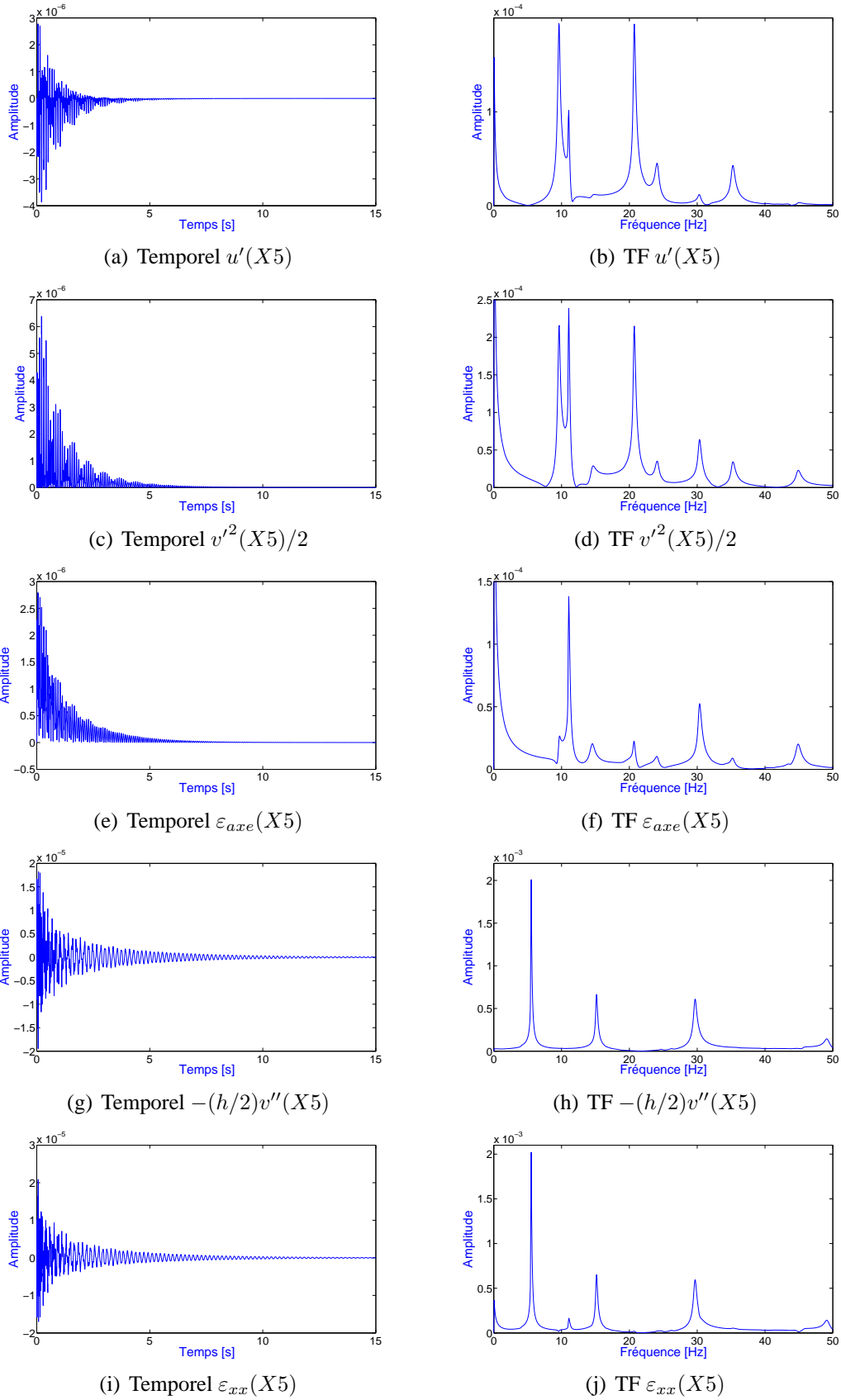


FIGURE 8.14: Signaux temporels et TF des termes composant la mesure de déformation au point  $X_5$ , de la déformation au niveau de l'axe neutre et de la surface de la poutre.

Les figures 8.14(f) et 8.14(h) permettent de déterminer les niveaux d'amplitude du terme de l'axe neutre et du terme de courbure pour la TF de la déformation du point d'abscisse  $x=0.27\text{ m}$  situé à la surface de la poutre (Fig. 8.14(j)) : de l'ordre de  $10^{-4}$  pour la déformation de l'axe neutre et de  $10^{-3}$  pour le terme de courbure qui est donc prépondérant. Cependant, le pic ayant l'amplitude la plus élevée au niveau de la TF de la déformation de l'axe neutre, pour  $f = 2f_1$ , sera tout de même visible au niveau de la TF de la déformation à la surface de la poutre.

*Ainsi, tout comme pour le cas L, des pics supplémentaires apparaissent au niveau de la TF de la déformation locale pour des niveaux de flèche importants (pour  $F=20\text{ N}$ ,  $v_{\max}=3\cdot 10^{-3}\text{ m}$ ). Cependant, étant donné que  $u'$  et  $v'^2/2$  se compensent, les pics sont moins nombreux et leur amplitude est moins élevée que ce qui avait été observé pour le cas L (Fig. 6.1(b) du Chapitre 6).*

La figure 8.15 présente les TF, normalisées au pic de fréquence d'amplitude maximale dans la plage de fréquence  $[0\ 50]\text{ Hz}$ , obtenues avec différents rapports  $R$  (0.05, 0.5, 1 et 1.4) pour les différents termes de la mesure de la déformation, ainsi que l'évolution de l'amplitude des trois premiers pics de fréquence en fonction de  $R$ .

On observe les mêmes allures que ce que nous avons obtenu dans le Chapitre précédent pour l'évolution de l'amplitude des pics : plutôt quadratique pour  $u'$  et  $v'^2/2$  (comme le déplacement axial  $u$ ) et linéaire avec une rupture de pente pour  $v''$  (comme pour le déplacement transverse  $v$ ). De ce fait, sur la figure 8.15(i), il apparaît que le pic supplémentaire situé au niveau de la fréquence  $f = 2f_1$  devient plus important lorsque  $R$  augmente : l'évolution de l'amplitude du pic est quadratique par rapport à  $R$  alors que pour le terme  $v''$  elle est linéaire.

Enfin, comme dans le Chapitre précédent, l'augmentation de  $R$  entraîne un décalage des pics de fréquence qui est soit positif (vers la droite), soit négatif (vers la gauche) suivant les pics étudiés.

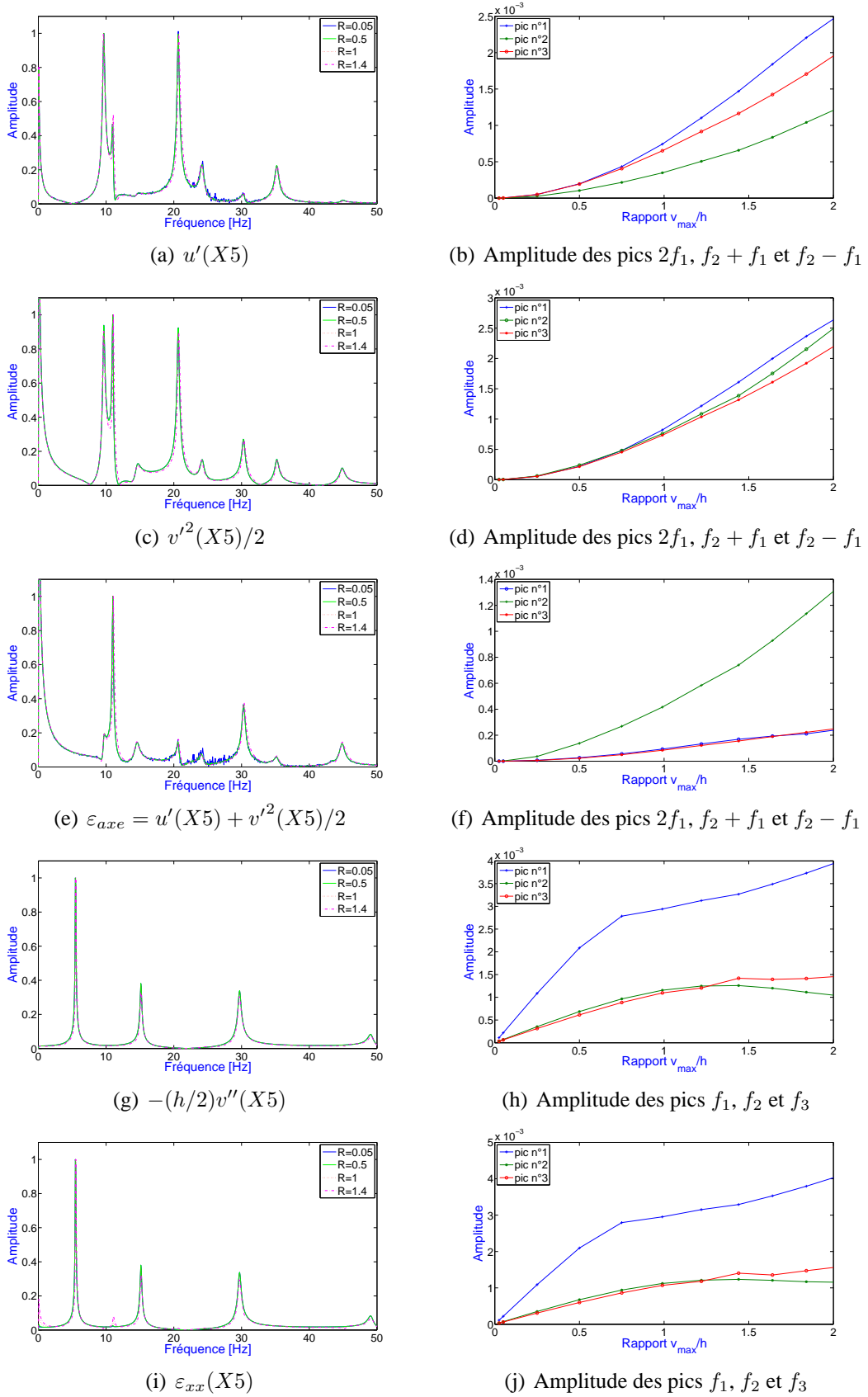


FIGURE 8.15: TF normalisées des termes composant la mesure de déformation au point  $X_5$ , de la déformation au niveau de l'axe neutre et de la surface de la poutre, et amplitudes des premiers pics de fréquence en fonction de plusieurs rapports  $R$ .



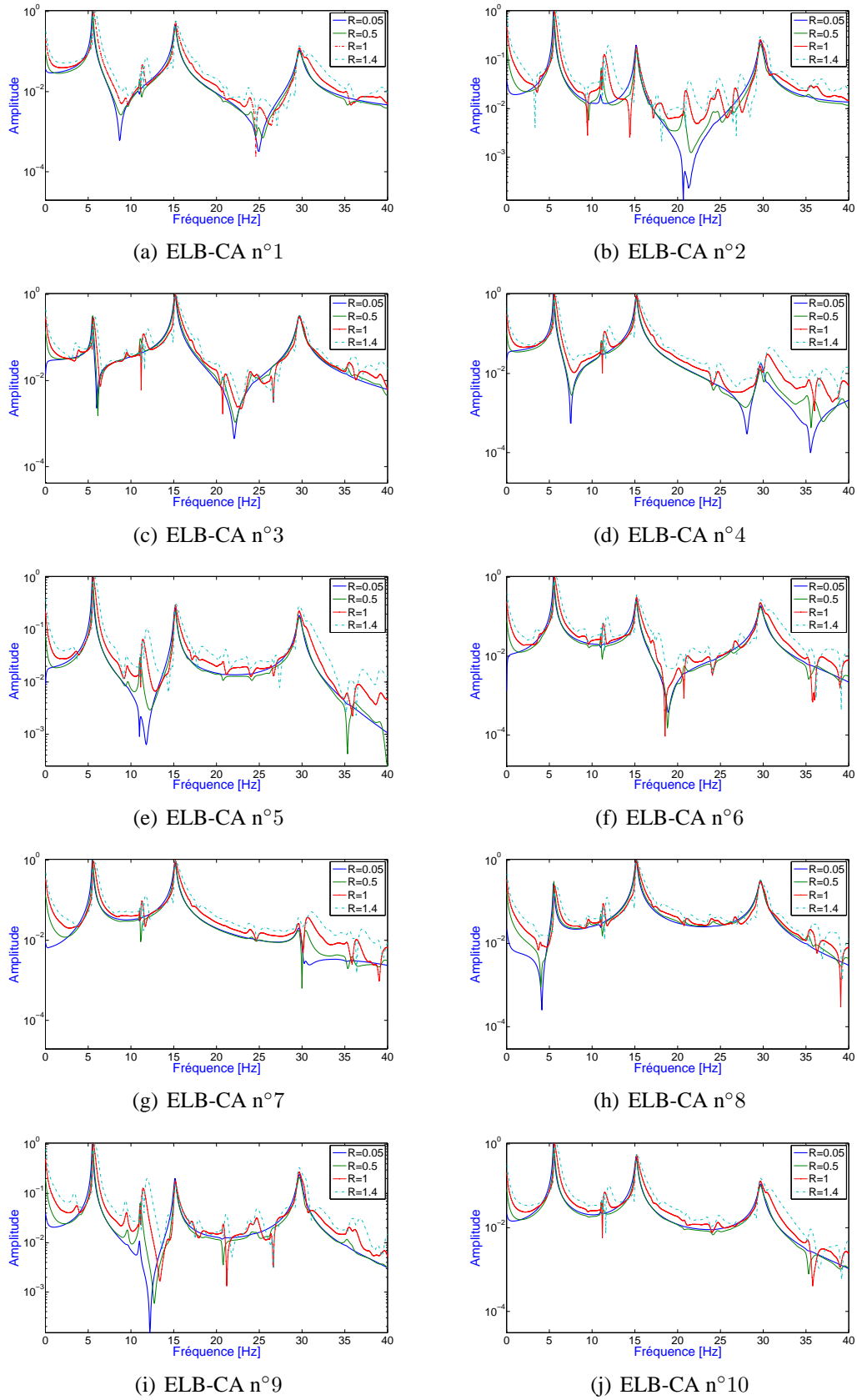
### 8.5.2 Intégration de la mesure de déformation : l'ELB-CA

Nous venons d'étudier la mesure dynamique de la déformation à la surface d'une poutre soumise à des rotations modérées en un point particulier de la poutre. La mesure réalisée par un ELB-CA est proportionnelle à la variation de longueur physique du capteur qui est l'intégrale de la déformation au niveau de l'emplacement du capteur. Il mesure donc l'intégrale de la déformation de la poutre sur la longueur du capteur et au niveau de la ligne de hauteur  $y$  à laquelle il est placé. Suivant l'abscisse de la poutre à laquelle on se place, la déformation de l'axe neutre et le terme de courbure  $-yv''$  auront des valeurs différentes et la répartition spectrale du signal de la déformation de l'axe neutre sera différente de celle observée précédemment au point  $X_5$ . L'ELB-CA va donc moyenner les différentes contributions suivant son placement au niveau de la poutre.

La figure 8.16 présente les TF obtenues pour plusieurs valeurs de  $R$  (0.05, 0.5, 1 et 1.4) à partir des signaux de mesure numériques de dix ELB-CA répartis uniformément au niveau de la surface supérieure de la poutre ( $y = h/2$ ). Le positionnement des ELB-CA est répertorié dans le tableau 8.3.

ELB-CA	Bornes d'intégration de l'ELB-CA	
	$a(m)$	$b(m)$
1	0	0.17
2	0.17	0.34
3	0.34	0.51
4	0.51	0.68
5	0.68	0.85
6	0.85	1.02
7	1.02	1.19
8	1.19	1.36
9	1.36	1.53
10	1.53	1.7

TABLEAU 8.3: Placement des ELB-CA sur la poutre E-E.


 FIGURE 8.16: TF normalisée des ELB-CA pour la poutre E-E pour différentes valeurs de  $R = v_{\max}/h$ .

*Comme pour les TF de la déformation locale, des pics supplémentaires apparaissent au niveau des TF des ELB-CA pour des niveaux de flèche importants. Les pics sont également moins nombreux et leur amplitude est moins élevée que ce qui avait été observé pour le cas L (Fig. 6.1 du Chapitre 6).*

Les différentes TF de la figure 8.16 montrent que des pics supplémentaires apparaissent pour tous les ELB-CA, cependant certains semblent plus sensibles que d'autres : soit l'amplitude des pics supplémentaires observés sur la TF est plus importante soit les pics sont plus nombreux, comme pour l'ELB-CA n°9 (Fig. 8.16(i)).

Nous allons expliquer dans le paragraphe suivant pourquoi certains ELB-CA sont plus sensibles aux non-linéarités géométriques.

### 8.5.3 Apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF des ELB-CA

Tout d'abord, rappelons que l'expression de la mesure de l'ELB-CA situé à une distance  $y$  de l'axe neutre peut s'exprimer en fonction de la mesure de l'ELB-CA qui serait situé au niveau de l'axe neutre et d'un terme dépendant de  $y$  et de la courbure de la poutre (3.79). Dans notre cas, le capteur étant à la surface de la poutre  $y$  est égal à  $h/2$ .

La figure 8.17 présente la TF de la mesure de l'ELB-CA n°9 obtenue pour  $R = 1$ , ainsi que les TF de la mesure de l'ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre  $\Delta D_{AB}^{axe}$  et du terme de courbure  $D_{AB}^{h/2}$ . Rappelons que

$$\Delta D_{AB}(t) = \Delta D_{AB}^{axe} + D_{AB}^y(t)$$

$$\text{avec } D_{AB}^y(t) = -y \int_a^b v'' dx \text{ et } \Delta D_{AB}^{axe} = \int_a^b (u' + \frac{1}{2}v'^2) dx.$$

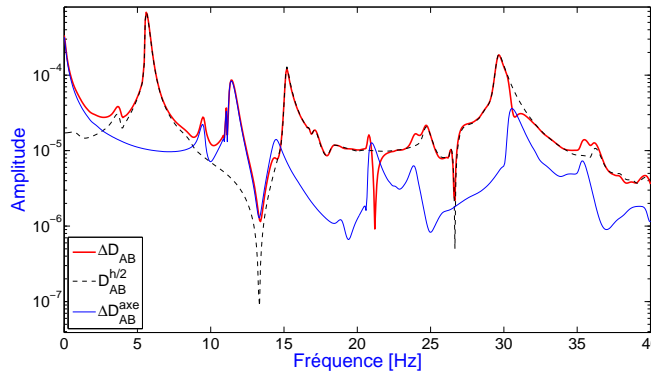


FIGURE 8.17: Décomposition de la mesure de ELB-CA n°9 pour la poutre E-E et  $R = 1$ .

La figure 8.17 permet de voir quelles sont les contributions de chacun des deux termes. La grande majorité des pics supplémentaires qui apparaissent au niveau de la TF de la mesure de l'ELB-CA provient de la mesure de l'ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre, c'est-à-dire de la déformation de l'axe neutre, et les pics des fréquences propres transverses de la poutre proviennent du terme de courbure  $D_{AB}^{h/2}$ .

Etant donné que le terme de courbure  $T_C(x, t) = D_{AB}^{h/2}$  et celui de l'axe neutre  $T_{axe}(x, t) = \Delta D_{AB}^{axe}$  privilégient plutôt les basses fréquences, du fait que leurs facteurs temporels soient similaires

à celui d'un déplacement, nous allons étudier les maxima temporels locaux de ces deux termes afin de quantifier la sensibilité de l'ELB-CA par rapport aux non-linéarités géométriques.

L'axe neutre de la poutre est discrétisé en  $N_p = 1000$  points notés  $x_k$ . On note  $N_{ab}$  le nombre de points  $x_k$  compris entre  $x = a$  et  $x = b$  correspondant à l'emplacement du capteur. On calcule ensuite la moyenne des maxima temporels locaux pour le placement de chaque ELB-CA, étant donné que l'ELB-CA réalise une mesure intégrée :

$$M_{T_{axe}} = \frac{1}{N_{ab}} \sum_{a \leq x_k \leq b} \mathcal{M}_{T_{axe}}(x_k), \quad M_{T_C} = \frac{1}{N_{ab}} \sum_{a \leq x_k \leq b} \mathcal{M}_{T_C}(x_k) \quad (8.5)$$

où  $\mathcal{M}_{T_{axe}}(x_k) = \max_{t_i \in [0, t_f]} (T_{axe}(x_k, t_i))$  et  $\mathcal{M}_{T_C}(x_k) = \max_{t_i \in [0, t_f]} (T_c(x_k, t_i))$ .

On définit également le rapport  $\chi$  entre ces deux quantités :  $\chi = \frac{M_{T_C}}{M_{T_{axe}}}$

La figure 8.18 présente l'allure des maxima locaux,  $\mathcal{M}_{T_{axe}}(x_k)$  et  $\mathcal{M}_{T_C}(x_k)$ , des différents termes composant la déformation de la poutre ( $u'$ ,  $v'^2/2$ ,  $u' + v'^2/2$  et  $v''$ ) pour plusieurs rapports  $R$ .

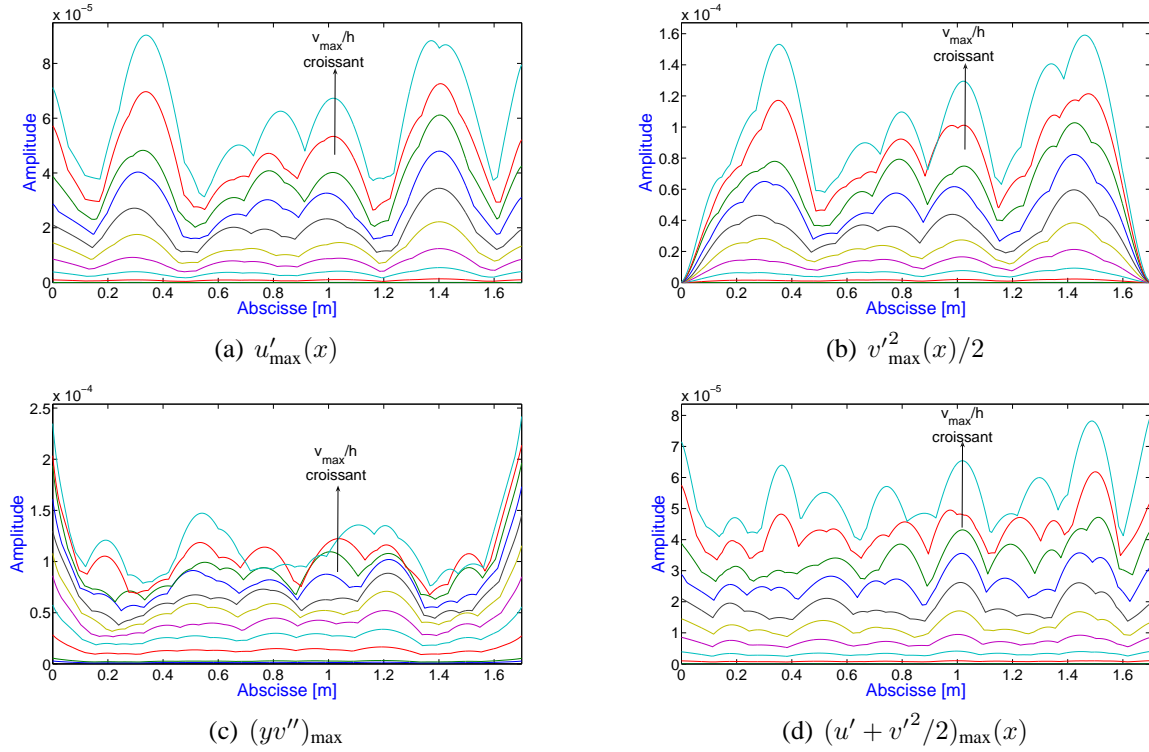


FIGURE 8.18: Maximum des termes prépondérants de la mesure de l'ELB-CA suivant l'abscisse de la poutre E-E et pour plusieurs niveaux de force.

Sur la figure 8.19, les termes  $\mathcal{M}_{T_{axe}}(x_k)$  et  $\mathcal{M}_{T_C}(x_k)$  sont tracés pour les quatre mêmes valeurs de  $R$  que sur la figure 8.16 (0.05, 0.5, 1 et 1.4). Sur ces graphes, les valeurs  $M_{T_{axe}}$  et  $M_{T_C}$  ont été tracées pour chacun des dix ELB-CA et le facteur  $\chi$  associé est répertorié dans le tableau 8.4.

## 8.5 Mesure de l'ELB-CA pour une poutre en rotations modérées en dynamique

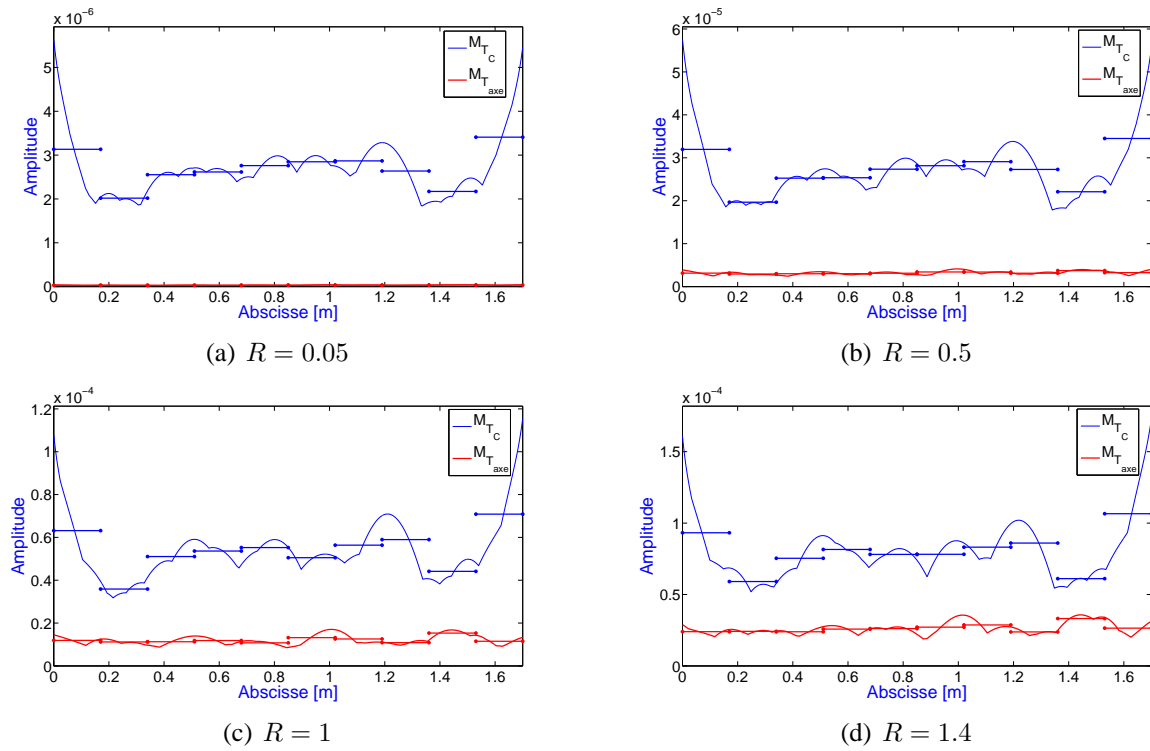


FIGURE 8.19: Comparaison des quantités  $\mathcal{M}_{T_{axe}}$  et  $\mathcal{M}_{T_C}$  pour la poutre E-E et différents rapports flèche/épaisseur  $R$ .

$\chi$	ELB n°1	ELB n°2	ELB n°3	ELB n°4	ELB n°5	ELB n°6	ELB n°7	ELB n°8	ELB n°9	ELB n°10
$R = 0.05$	102.4	69.0	85.4	87.1	86.9	84.8	83.4	84.2	59.0	99.8
$R = 0.5$	10.2	6.7	8.5	8.4	8.8	8.3	8.6	8.8	5.9	10.6
$R = 1$	5.3	3.2	4.5	4.5	5.1	3.8	4.5	5.4	2.9	6.2
$R = 1.44$	3.9	2.4	3.1	3.2	3.0	2.9	2.9	3.6	1.8	4.0

TABLEAU 8.4: Rapport  $\chi$  des ELB-CA pour la poutre E-E.

En reliant les résultats du tableau 8.4 à la figure 8.16, il apparaît que l'influence des non-linéarités géométriques, entraînant l'apparition de fréquences supplémentaires, est d'autant plus importante que le rapport  $\chi$  sera faible, *i.e.* lorsque  $M_{T_{axe}}$  se rapproche de  $M_{T_C}$ . Alors, en jouant sur la distance à l'axe neutre  $y$ , il est possible de faire diminuer le rapport  $\chi$  et de favoriser l'apparition de pics supplémentaires.

Prenons l'exemple de l'ELB-CA n°1 avec  $R = 1$ , pour lequel l'amplitude des pics supplémentaires est assez faible, et faisons varier la hauteur à l'axe neutre  $y$ . La figure 8.20 présente la TF de la mesure de l'ELB-CA n°1 pour trois valeurs différentes de  $y$  :  $h/2$ ,  $(3h)/10$  et  $h/10$ .

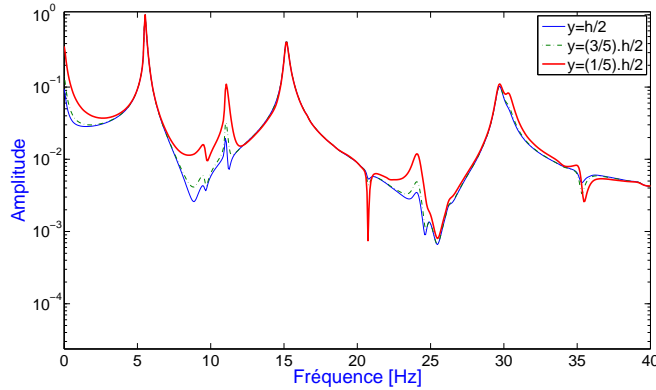


FIGURE 8.20: Mesure de l'ELB-CA n°1 pour différentes valeurs de la hauteur à l'axe neutre  $y$ .

La figure 8.20 met en évidence que plus le capteur sera proche de l'axe neutre, plus l'amplitude des pics supplémentaires qui apparaissent dans la TF de la mesure de l'ELB-CA sera élevée. Lorsque  $y$  diminue,  $\mathcal{M}_{TC}(x_k)$  diminue également et se rapproche alors de  $\mathcal{M}_{T_{axe}}(x_k)$  (Fig. 8.19) donc, au niveau de l'ELB-CA,  $\chi$  sera plus faible et l'effet des non-linéarités géométriques plus important.

*L'apparition de pics supplémentaires (combinaisons des fréquences propres transverses de la poutre) au niveau de la TF des ELB-CA est due à la déformation de l'axe neutre, qui est  $\varepsilon_{axe} = u' + v'^2/2$ , et les fréquences propres transverses du spectre proviennent du terme de courbure  $-yv''$ . Les pics supplémentaires seront d'autant plus nombreux et leur amplitude plus élevée que les moyennes des maxima temporels de la déformation de l'axe neutre et du terme de courbure, au niveau de l'emplacement du capteur, seront proches. Au niveau de la poutre, il existe donc des endroits plus sensibles que d'autres aux non-linéarités géométriques. Il est également possible d'augmenter la sensibilité de l'ELB-CA aux non-linéarités géométriques en diminuant la hauteur par rapport à l'axe neutre  $y$ .*

#### 8.5.4 Comparaison de la mesure de l'ELB-CA obtenue à partir des différentes formulations

Dans ce paragraphe, nous allons comparer les TF obtenues à partir des mesures de l'ELB-CA issues des différentes expressions : cas G, cas L et état de l'art (avec  $v_L''$  et  $v_G''$ ). La figure 8.21 présente les TF obtenues à partir des différentes expressions avec  $F = 1 \text{ N}$  ( $R = 0.05$  pour les cas L et G) et  $20 \text{ N}$  ( $R = 1$  pour les cas L et G) pour deux ELB-CA : les ELB-CA le plus et le moins sensible aux non-linéarités géométriques, respectivement les ELB-CA n°9 et n°1.

Pour l'ELB-CA n°1, pour  $R$  petit (Fig. 8.21(a)), il n'y a presque aucune différence entre les différentes expressions, ce qui n'est pas le cas de l'ELB-CA n°9. En effet, ce dernier étant plus sensible aux non-linéarités géométriques, la mesure obtenue à partir du cas L, pour lequel  $u'$  est très petit devant  $v'^2/2$ , va amplifier le phénomène d'apparition des pics, d'où les différences observées sur la figure 8.21(c). Par contre, les autres expressions vont donner des résultats similaires.

Lorsque  $R$  augmente, les TF obtenues avec les cas L et G présentent des pics supplémentaires d'amplitude équivalente mais qui ne se situent pas aux mêmes fréquences car  $u'$  ne compense pas  $v'^2/2$  pour le cas L. Le cas L n'est donc pas adapté. L'expression de l'état de l'art ne permet pas

## 8.5 Mesure de l'ELB-CA pour une poutre en rotations modérées en dynamique

d'obtenir des pics supplémentaires ou alors de très faible amplitude (c'est le cas avec  $v''_G$ ), elle est donc également inadaptée pour une poutre en rotations modérées.

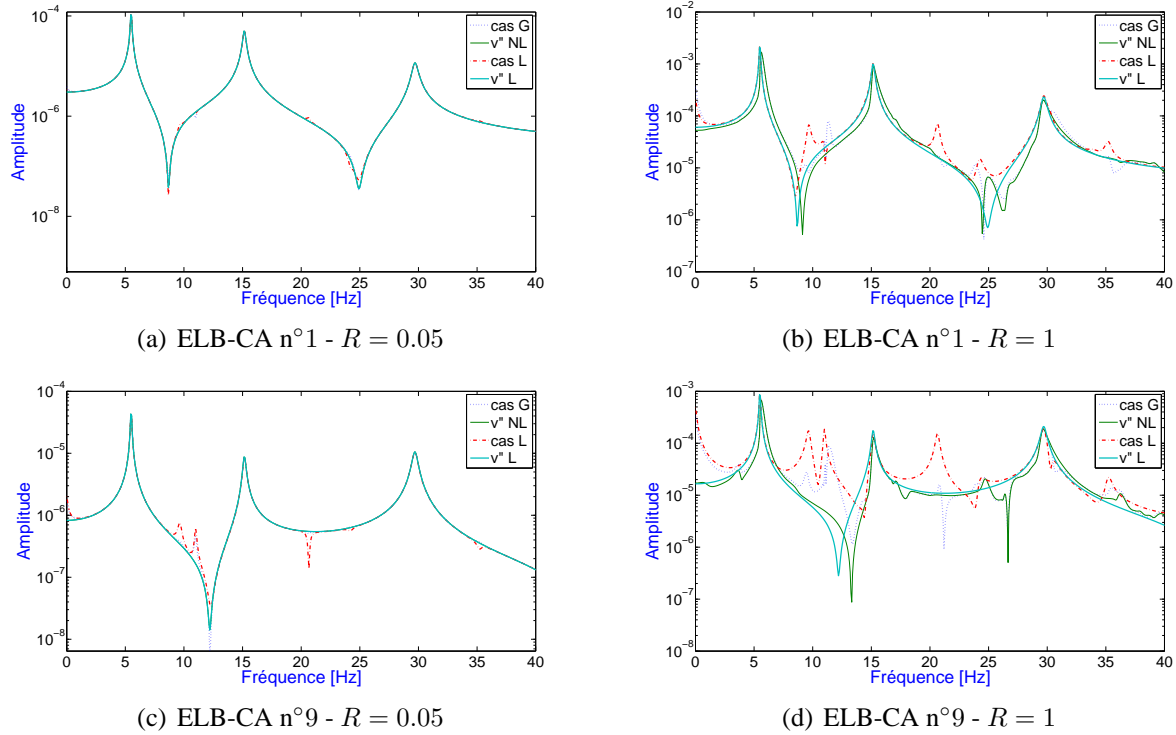


FIGURE 8.21: Comparaison des TF obtenues à partir des différentes expressions de la mesure de l'ELB-CA.

Afin de se faire une idée des différences entre les diverses expressions pour le calcul du signal temporel de l'ELB-CA, nous avons représenté sur la figure 8.22 le signal de mesure numérique obtenu avec les différentes expressions pour l'ELB-CA n°9 et  $R = 1$ . Les différences importantes obtenues entre les signaux sont d'ordre fréquentiel et il apparaît que l'amplitude maximale des signaux est sensiblement la même pour toutes les expressions, hormis le cas L où elle est un peu plus élevée.

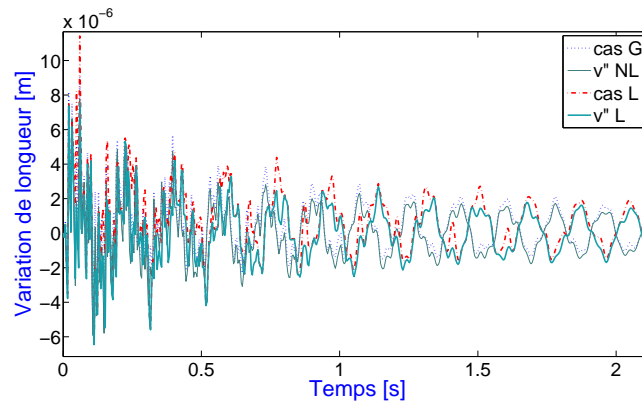


FIGURE 8.22: Comparaison des signaux temporels obtenus pour l'ELB-CA n°9 avec  $R = 1$  à partir des diverses expressions de la mesure.

*Les TF des mesures obtenues à partir des cas L et G, et de l'expression de l'état de l'art sont identiques pour de faibles niveaux de flèche et des zones de la poutre où l'ELB-CA est peu sensible aux non-linéarités géométriques. Autrement, les résultats obtenus à partir de l'expression de l'état de l'art ne permettent pas d'observer de pics supplémentaires au niveau des TF des ELB-CA au contraire de ceux obtenus à partir du cas L, les pics supplémentaires n'étant cependant pas situés aux mêmes fréquences que pour le cas G. Ainsi, le cas L et l'expression de l'état de l'art ne permettent pas de décrire correctement le comportement dynamique de l'ELB-CA collé sur une poutre E-E soumise à des rotations modérées.*

### 8.5.5 Comparaison de la mesure de l'ELB-CA avec les données numériques de déplacement, vitesse et accélération

Dans ce paragraphe, nous avons étudié d'autres quantités issues du calcul EF afin de voir si l'on observait également l'apparition de pics supplémentaires au niveau de leurs TF. Les quantités étudiées et comparées à la mesure de l'ELB-CA sont le déplacement  $v$  (étudié au Chapitre précédent), la vitesse  $\dot{v}$  et l'accélération  $\ddot{v}$ . Nous avons choisi de prendre les points de mesure de ces quantités au niveau des bornes des ELB-CA, soit aux abscisses  $x=0.17, 0.34, 0.51, 0.68, 0.85, 1.02, 1.19, 1.36$  et  $1.53\text{ m}$ .

La figure 8.23 présente les TF obtenues à partir des mesures numériques des ELB-CA, des déplacements, des vitesses et des accélérations pour la poutre E-E avec  $R = 0.05$  et  $1$ .



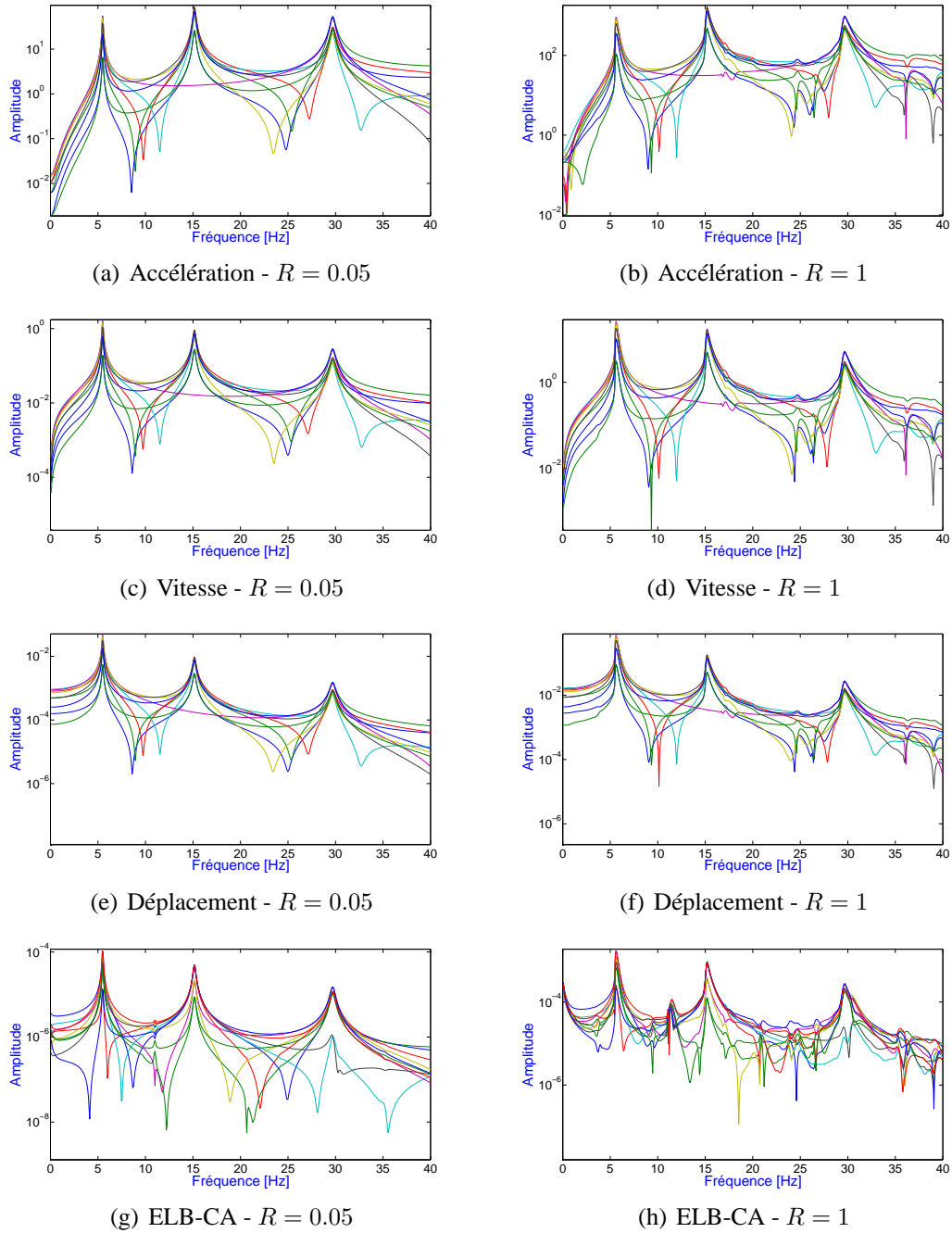


FIGURE 8.23: Comparaison des TF obtenues à partir des signaux numériques d'accélération, de vitesse, de déplacement et d'ELB-CA pour la poutre E-E et différents rapports  $R = v_{\max}/h$ .

La figure 8.23 montre que des pics de faible amplitude apparaissent au niveau des TF des déplacements, vitesses et accélérations, cependant rien de comparable avec les pics observés sur les TF des ELB-CA qui sont donc, a priori, plus sensibles aux effets des non-linéarités géométriques, c'est-à-dire aux rotations des sections. En effet, même pour  $R = 0.05$ , quelques pics supplémentaires de faible amplitude apparaissent déjà (Fig. 8.23(g)).

Par ailleurs, nous avons réalisé une analyse par ondelettes (TOC) des mesures numériques des différentes données (déplacement, vitesse, accélération, ELB-CA) pour les deux premiers modes de la poutre afin d'étudier l'évolution des arêtes en fonction de la force (ou du rapport  $R$ ). Les paramètres

du traitement des mesures par la TOC sont répertoriés dans le tableau 8.5 et les résultats obtenus sont présentés sur les figures 8.24 et 8.25. Rappelons que les lignes verticales délimitent la zone de validité de la TOC, les extrémités étant sujettes aux effets de bord.

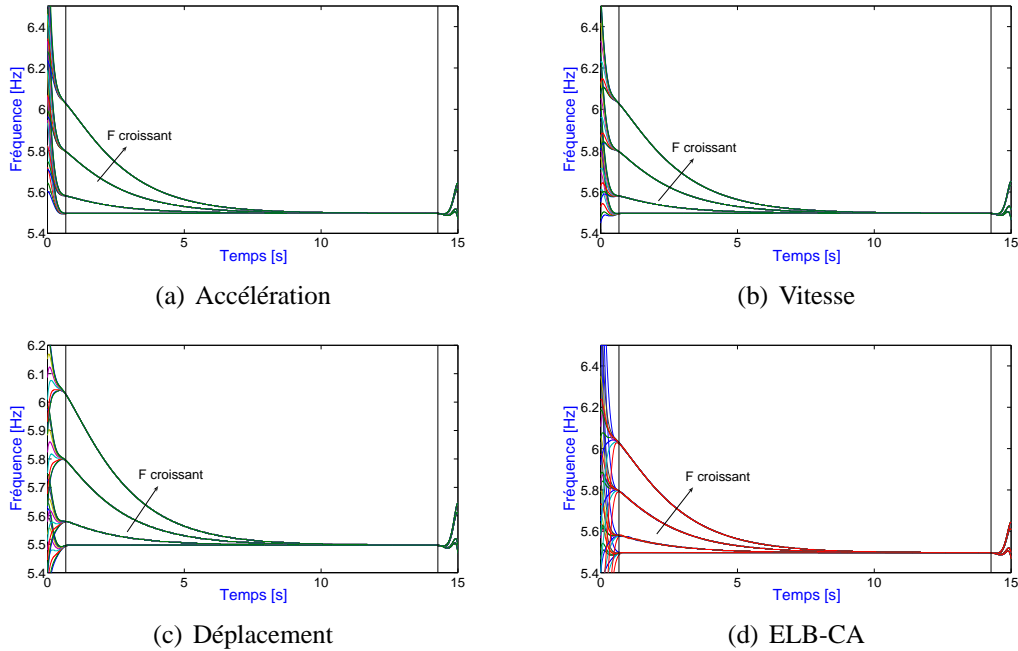


FIGURE 8.24: Arêtes du premier mode de la poutre E-E obtenues à partir de la TOC des signaux numériques d'accélération, de vitesse de déplacement et d'ELB-CA pour différents rapports  $R$ .

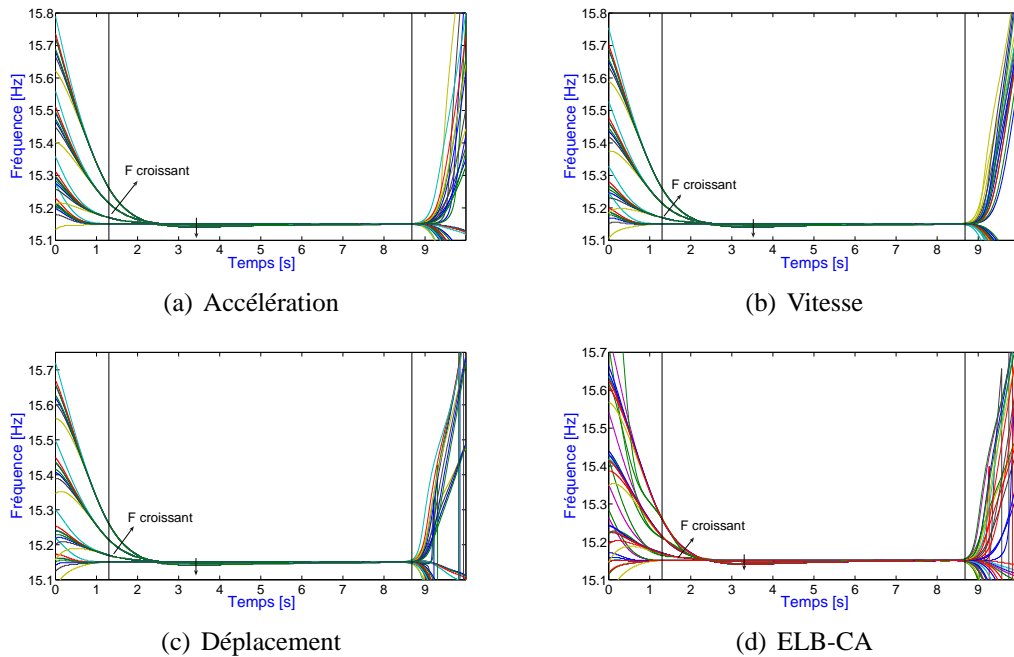


FIGURE 8.25: Arêtes pour le deuxième mode de la poutre E-E obtenues à partir de la TOC des signaux numériques d'accélération, de vitesse de déplacement et d'ELB-CA pour différents rapports  $R$ .

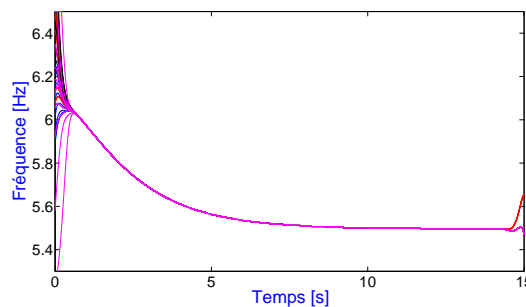
## 8.5 Mesure de l'ELB-CA pour une poutre en rotations modérées en dynamique

Modes	Plage de fréquence (Hz)	$N_{TOC}$	$Q$	$t_f$ (s)
$f_1$	[5 7]	800	15	15
$f_2$	[15 16]	400	20	6

**TABEAU 8.5:** Paramètres de la TOC pour le traitement local des deux premiers modes transverses de la poutre issus des différents signaux numériques.

Les figures 8.24 et 8.25 montrent que l'évolution des arêtes en fonction de  $R$  est la même quel que soit le type de mesure : la fréquence des deux premiers modes augmente lorsque le niveau de force est plus important.

Pour déterminer si les arêtes issues des mesures des différentes données sont similaires ou non, nous avons représenté sur la figure 8.26, les arêtes du premier mode issues de tous les types de mesure.



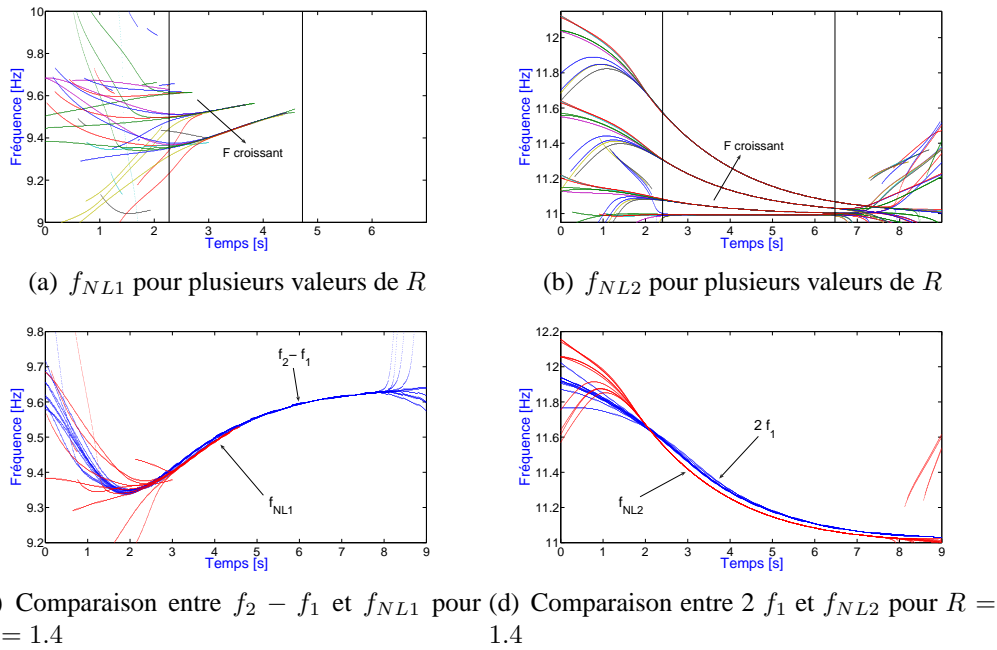
**FIGURE 8.26:** Comparaison des arêtes obtenues pour le premier mode de la poutre E-E à partir de la TOC des signaux numériques d'accélération, de vitesse de déplacement et d'ELB-CA pour  $R = 1$ .

Les arêtes sont confondues (résultats identiques obtenus pour les autres valeurs de  $R$ , ainsi que pour le deuxième mode), donc le traitement des modes de flexion transverse à l'aide de la TOC est le même quel que soit le type de données utilisées (déplacement, vitesse, accélération, ELB-CA).

Cependant, les pics supplémentaires importants ne sont présents que pour les TF des ELB-CA. Nous avons donc étudié les arêtes des deux premiers pics de fréquences supplémentaires (les fréquences sont notées  $f_{NL1}$  et  $f_{NL2}$ ). Les paramètres du traitement des mesures par la TOC sont répertoriés dans le tableau 8.6 et les résultats obtenus sont présentés sur la figure 8.27, ainsi que ceux obtenus pour la comparaison des arêtes des fréquences supplémentaires et des combinaisons d'arêtes des fréquences propres transverses correspondantes. Pour la comparaison, le temps d'arrêt  $t_f$  est égal à 9 s,  $N_{TOC}$  vaut 400 pts/Hz et  $Q = 30$ .

Modes	Plage de fréquence (Hz)	$N_{TOC}$	$Q$	$t_f$ (s)
$f_{NL1}$	[9 10.5]	600	30	7
$f_{NL2}$	[11 12.5]	600	35	9

**TABEAU 8.6:** Paramètres de la TOC pour le traitement local des deux premiers pics supplémentaires issus des signaux numériques d'ELB-CA.

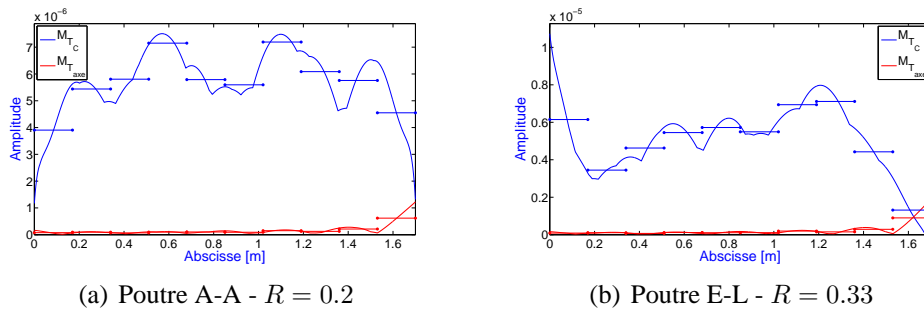


**FIGURE 8.27:** Comparaison des arêtes obtenues à partir de la TOC pour les deux premiers pics supplémentaires et les combinaisons de fréquences correspondantes ( $f_2 - f_1$  et  $2f_1$ ) avec les ELB-CA et différents rapports  $R = 1.4$ .

La comparaison des arêtes issues des pics supplémentaires et des combinaisons d'arêtes des fréquences propres correspondantes est satisfaisante. Les écarts importants au début et à la fin du signal sont dûs aux effets de bord. Comme dans le Chapitre précédent, l'analyse des signaux numériques des ELB-CA par la TOC permet de valider que les fréquences supplémentaires présentes dans le spectre sont bien des combinaisons linéaires particulières (doubles, sommes et différences) des fréquences propres transverses.

### 8.5.6 Autres cas de CL

Les mêmes études numériques, que celles effectuées pour la poutre E-E dans le paragraphe précédent, sont réalisées pour les autres cas de CL et présentées brièvement en annexe F en F.2, afin de mettre en évidence les principales différences observées, notamment au niveau de la sensibilité des ELB-CA vis-à-vis des non-linéarités géométriques (Fig. 8.28).



**FIGURE 8.28:** Comparaison des quantités  $\mathcal{M}_{T_{axe}}$  et  $\mathcal{M}_{T_C}$  pour la poutre A-A et E-L, respectivement pour un rapport flèche/épaisseur égal à 0.2 et 0.33.

Pour les autres cas de CL (A-A et E-L) comme pour la poutre E-E, l'apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF des ELB-CA est due à la déformation de l'axe neutre, qui est  $\varepsilon_{axe} = u' + v'^2/2$ , et les fréquences propres transverses proviennent du terme de courbure  $-yv''$ . Par contre, la zone sensible aux non-linéarités géométriques sera très locale et se situera au niveau de l'extrémité où les degrés de liberté sont libres (à droite dans notre cas). Il est également possible d'augmenter la sensibilité de l'ELB-CA aux non-linéarités géométriques en diminuant la hauteur par rapport à l'axe neutre  $y$ . Cependant, pour la poutre E-L, l'axe neutre se déforme si peu que, pour les capteurs situés hors de la zone sensible, les pics supplémentaires n'apparaissent pas au niveau de la TF même en se rapprochant de l'axe neutre de la poutre.

Pour la poutre E-L, les TF des mesures numériques de l'ELB-CA obtenues à partir des cas L et G et de l'expression de l'état de l'art sont également identiques pour de faibles niveaux de flèche et des zones de la poutre où l'ELB-CA est peu sensible aux non-linéarités géométriques. Pour la poutre A-A, par contre, le cas L est valide pour de très faibles niveaux de flèche de la poutre. Autrement, pour des niveaux de flèche plus élevés ou si les ELB-CA sont situés dans la zone sensible aux non-linéarités géométriques, le cas L et l'expression de l'état de l'art ne permettent plus de décrire correctement le comportement dynamique de l'ELB-CA pour une poutre soumise à des rotations modérées.

### 8.5.7 Confrontations théorie-expérience

Dans ce paragraphe, nous allons présenter les résultats obtenus à partir des deux dispositifs expérimentaux présentés au Chapitre 4 : une poutre E-E en acier de 1.7 m de longueur et 3 mm d'épaisseur, puis une poutre E-L en plexiglas de 1 m de longueur et 5 mm d'épaisseur.

#### Poutre E-E

La poutre E-E est instrumentée avec six accéléromètres PCB et trois ELB-CA SMARTape de 50 cm, dont les caractéristiques sont répertoriées respectivement dans le Chapitre 6 (Tab. 6.6) et dans le Chapitre 2 (Tab. 2.1). Le placement des accéléromètres et celui des ELB-CA sont rappelés respectivement dans les tableaux 8.7 et 8.8. L'analyse modale expérimentale de la poutre a été présentée au Chapitre 4 en 4.8, on s'y référera pour les valeurs des fréquences propres transverses de la poutre, répertoriées dans le tableau 4.15, et les paramètres d'acquisition des signaux (notamment la fréquence d'échantillonnage qui est  $f_{ech}=1000$  Hz).

Accéléromètre	Abscisse (m)
1	0.243
2	0.486
3	0.729
4	0.972
5	1.215
6	1.458

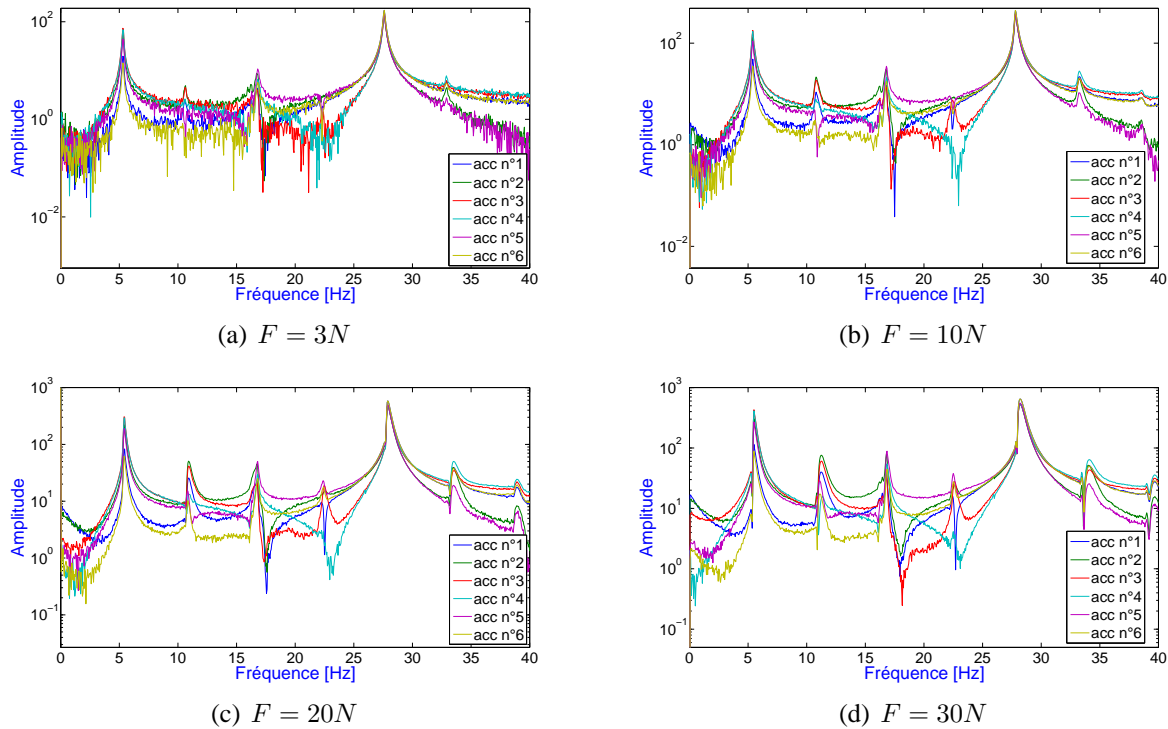
TABLEAU 8.7: Placement des accéléromètres sur la poutre E-E.

ELB-CA	Bornes d'intégration de l'ELB-CA	
	$a(m)$	$b(m)$
1	0.2	0.7
2	0.6	1.1
3	1	1.5

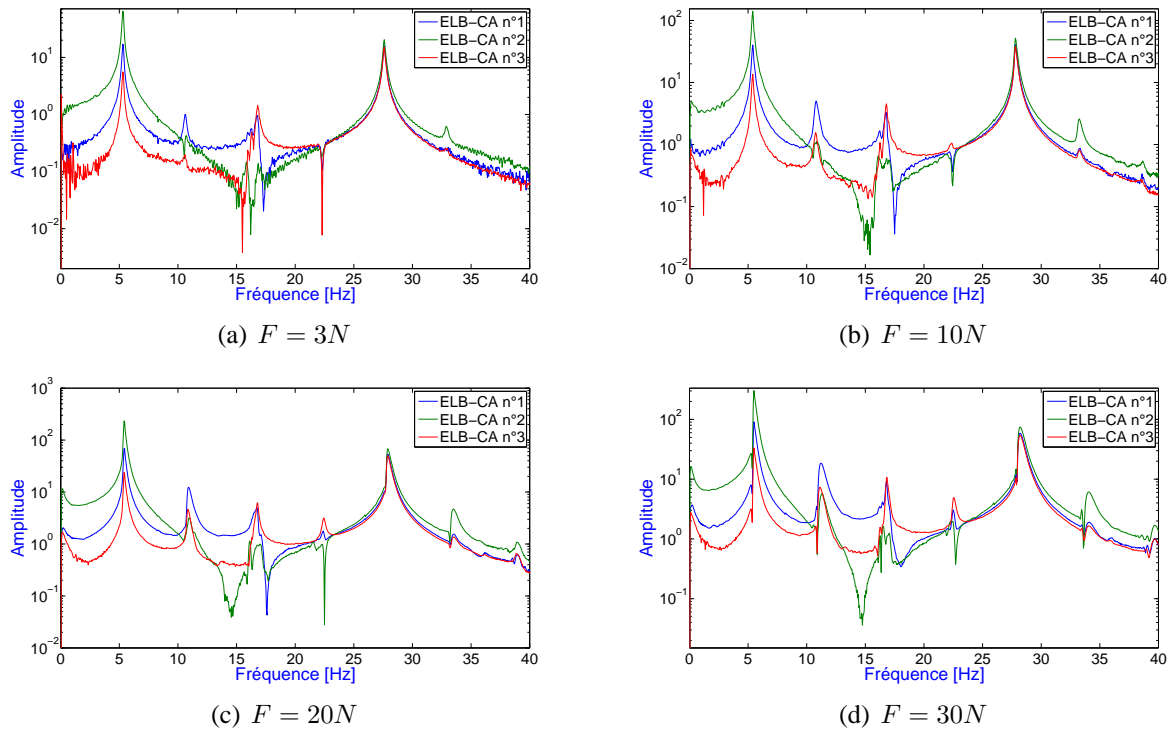
**TABEAU 8.8: Placement des ELB-CA SMARTape sur la poutre E-E.**

Plusieurs essais ont été réalisés avec une configuration ne comprenant qu'un seul ELB-CA (n°2) et les six accéléromètres. Avec cette configuration, nous avons étudié l'influence de la position du point d'excitation, afin de choisir celle permettant d'atteindre aisément des niveaux de flèche élevés pour la poutre. Le lieu d'excitation choisi pour illustrer les résultats expérimentaux est  $x_0=0.85\text{ m}$ , soit le milieu de la poutre. Une fois cette position d'excitation fixée, deux ELB-CA ont été ajoutés (n°1 et n°3) pour étudier l'influence du placement. L'étude de l'influence du niveau de force sur les TF obtenues à partir des signaux de mesure des accéléromètres et des ELB-CA a alors été réalisée.

Les figures 8.29 et 8.30 présentent les TF obtenues respectivement à partir des signaux de mesure des accéléromètres et des ELB-CA pour quatre niveaux de force : 3, 10, 20 et 30 N.



**FIGURE 8.29: TF obtenues à partir des signaux de mesure des accéléromètres pour la poutre E-E pour différents niveaux de force et pour une excitation à l'abscisse  $x_0=0.85\text{ m}$ .**



**FIGURE 8.30:** TF obtenues à partir des signaux de mesure des ELB-CA pour la poutre E-E pour différents niveaux de force et pour une excitation à l'abscisse  $x_0=0.85\text{ m}$ .

Il apparaît sur les figures 8.29 et 8.30 que des pics supplémentaires sont déjà présents sur les TF pour  $F=3\text{ N}$ , aussi bien pour les accéléromètres que pour les ELB-CA, et que leur amplitude augmente lorsque le niveau de force est plus important. L'allure des pics de fréquence change également avec le niveau de force : ils deviennent dissymétriques avec une forte pente à gauche, comme pour les résultats numériques énoncés au Chapitre précédent en 7.4.4. Si nous nous attendions à observer des pics supplémentaires pour les TF des ELB-CA (notamment entre les deux premiers pics de fréquences transverses, pour  $f = 2f_1$  et  $f = f_3 - f_1$ , le deuxième mode n'étant pas excité), ce n'est pas le cas des accéléromètres pour lesquels, a priori, nous ne devons pas observer de pics supplémentaires d'amplitude aussi importante d'après l'étude numérique réalisée en 8.5.2 (Fig. 8.23(b)). Dans la pratique, l'accéléromètre ne mesure pas exactement la quantité  $\ddot{v}$  (paramètre issu du calcul EF dont la TF est représentée sur la figure 8.23(b)), il est également sensible aux non-linéarités géométriques. Faute de temps, la mesure réalisée par un accéléromètre pour une poutre soumise à des rotations modérées n'a pas été complètement finalisée et ne sera donc pas présentée ici.

La figure 8.31 présente la comparaison entre les TF obtenues expérimentalement à partir des ELB-CA et numériquement à partir du code EF *Matlab*, recalé en amortissement (pas en fréquence) en prenant les valeurs déterminées à partir des six premiers modes expérimentaux. Les niveaux d'amplitude des TF expérimentales et numériques ne sont pas les mêmes, or nous nous intéressons à l'amplitude des pics de fréquence supplémentaires par rapport aux pics de fréquences propres de la poutre E-E, les TF ont donc été normées au maximum d'amplitude sur la plage de fréquence  $[0\ 40]\text{ Hz}$ . La comparaison n'a pas été réalisée pour les accéléromètres, l'étude théorique de la mesure d'un accéléromètre pour une poutre en rotations modérées n'étant pas finalisée.

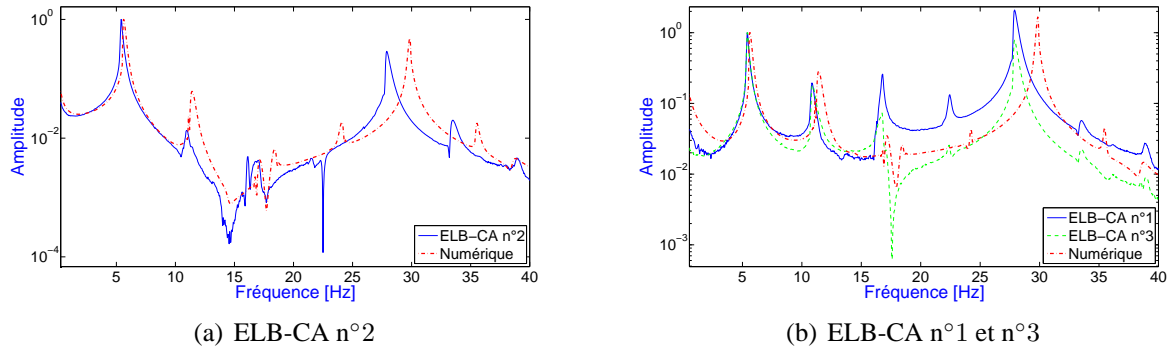


FIGURE 8.31: Comparaison des TF obtenues à partir des signaux de mesure expérimentaux et numériques des trois ELB-CA pour  $F = 20\text{ N}$ .

Comme le placement des ELB-CA n°1 et n°3 est symétrique par rapport au milieu de la poutre E-E et que l'excitation est également effectuée à cet endroit, les TF obtenues numériquement pour ces deux ELB-CA sont identiques. Ce n'est pas le cas expérimentalement puisque les déformées et courbures modales déterminées au Chapitre 4 en 4.8 ne sont pas symétriques. La troisième fréquence propre expérimentale est assez éloignée de la valeur théorique du fait de la mauvaise qualité des encastrements réalisés pour ce démonstrateur. Ceci explique le décalage de la majorité des fréquences supplémentaires entre les TFs expérimentales et numériques normées, étant donné qu'elles sont des combinaisons des fréquences propres de la poutre. Néanmoins, hormis ce décalage fréquentiel, la comparaison de l'amplitude des pics supplémentaires et de l'allure générale des TF est tout de même satisfaisante.

La figure 8.32 présente les TF obtenues à partir des signaux de mesure de l'ELB-CA et de l'accéléromètre n°1 pour les mêmes valeurs de force que précédemment. L'évolution des pics de fréquence est similaire aux résultats numériques du Chapitre précédent, à savoir que l'augmentation du niveau de force a pour effet d'élargir les pics de fréquence, qui deviennent fortement dissymétriques avec une forte pente à gauche du pic, et de les décaler. Pour la plage de fréquence étudiée, tous les pics de fréquences se décalent vers la droite, c'est-à-dire que les fréquences augmentent avec la force (comportement «*hardening*»).

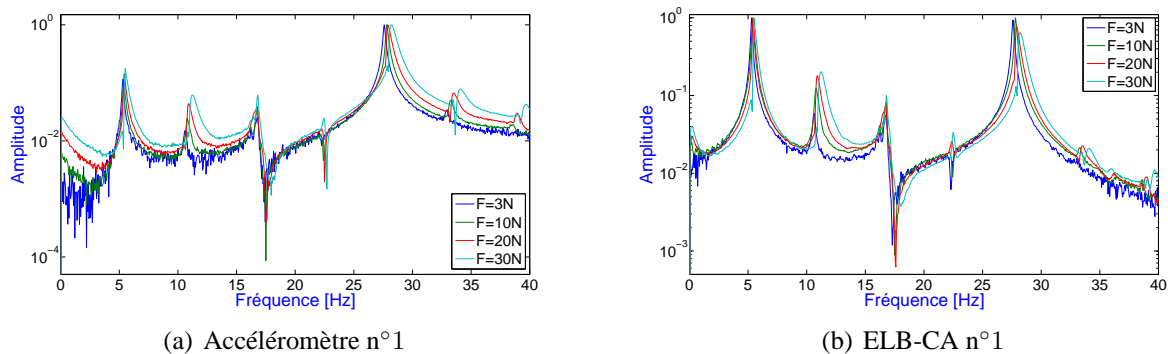
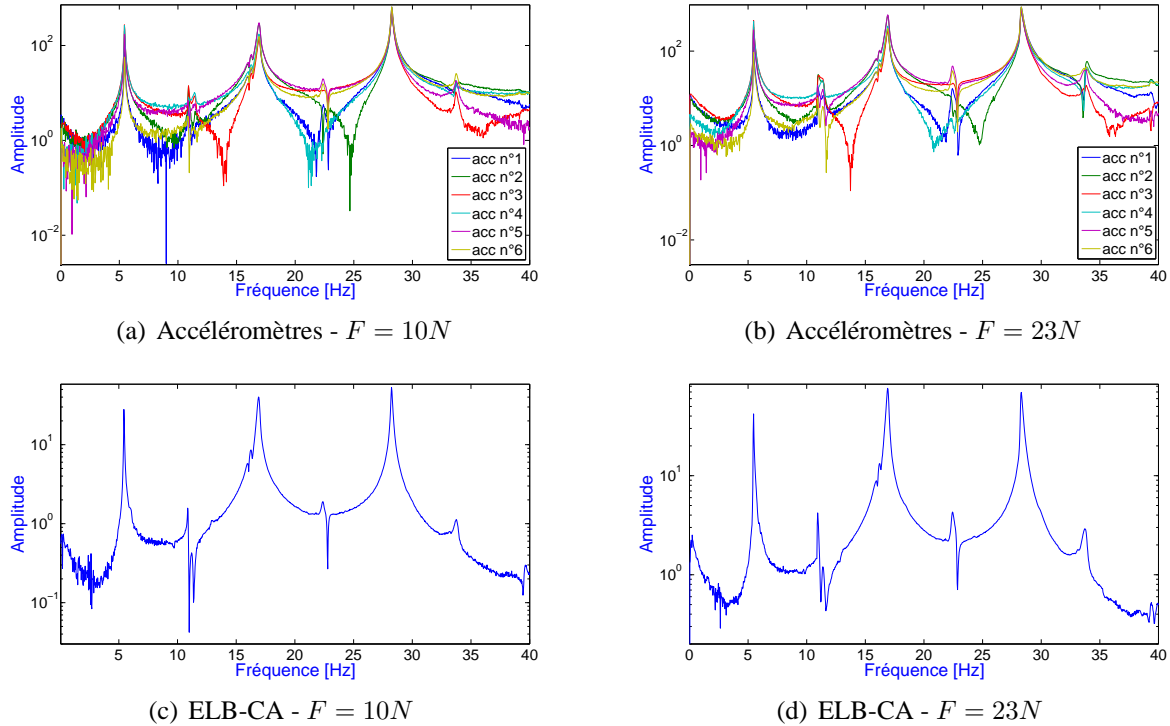


FIGURE 8.32: TF obtenues à partir des signaux de mesure de l'ELB-CA et de l'accéléromètre n°1 pour différents niveaux de force.

Le point d'excitation du choc étant situé à l'abscisse  $x_0=0.85\text{ m}$ , c'est-à-dire le milieu de la poutre,



le deuxième mode ne sera donc pas excité (Fig.4.1 au Chapitre 4). Or, d'après les figures 8.29 et 8.30, il semble que ce ne soit pas le cas puisque nous observons un voire plusieurs pics au niveau de la fréquence du deuxième mode, dont l'amplitude n'augmente pas avec le niveau de force. A priori, ces pics ne sont pas dus au phénomène de non-linéarités géométriques. Nous avons vérifié la présence de ces pics lorsque le deuxième mode est excité. La figure 8.33 présente les TF obtenues pour l'ELB-CA n°2 et les six accéléromètres avec le lieu d'excitation est situé à l'abscisse  $x_0=0.4\text{ m}$  et des amplitudes d'impact de 10 et 23 N.



**FIGURE 8.33:** TF obtenues à partir des signaux de mesure de l'ELB-CA n°2 et des six accéléromètres avec le choc appliqué à l'abscisse  $x_0=0.40\text{ m}$  de la poutre E-E et différents niveaux de force.

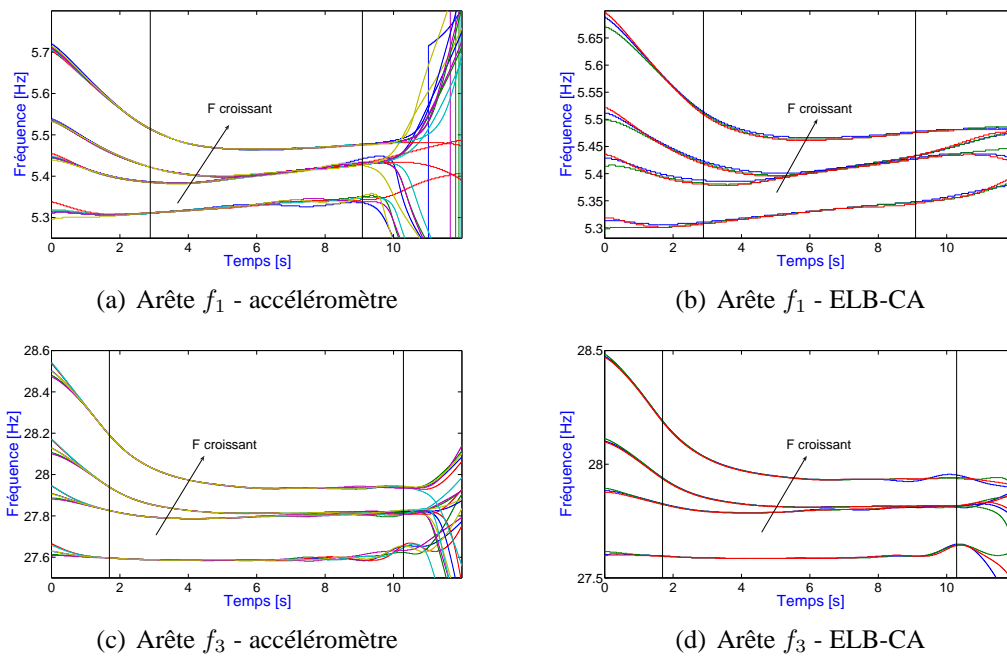
Plusieurs pics situés aux alentours de la deuxième fréquence de la poutre sont visibles sur la figure 8.33. Une hypothèse que nous avons émise, quant à la provenance de ces pics, est qu'ils peuvent provenir d'un phénomène de résonance interne. Nous occulterons donc ces pics pour le traitement des mesures par la TOC.

Une analyse par ondelettes a été réalisée à partir des signaux de mesure des ELB-CA et des accéléromètres afin de confirmer que l'évolution des arêtes est comparable à celle obtenue à partir du calcul numérique et que les pics de fréquences supplémentaires correspondent bien aux combinaisons de fréquences propres transverses auxquelles nous nous attendons. Etant donné que le deuxième mode n'est pas excité, nous allons nous intéresser aux pics de fréquence des premier et troisième modes situés autour de  $5.5\text{ Hz}$  et  $29\text{ Hz}$ , ainsi qu'aux pics supplémentaires situés autour de  $11\text{ Hz}$  et  $22\text{ Hz}$ . Le tableau 8.9 répertorie les paramètres du traitement des signaux avec la TOC. Les mêmes valeurs du paramètre  $Q$  ont été prises pour ces quatre fréquences afin de pouvoir ensuite comparer l'évolution des arêtes des fréquences supplémentaires avec celle des combinaisons d'arêtes des fréquences propres transverses correspondantes. La figure 8.34 présente les arêtes obtenues à partir des signaux de me-

sure des accéléromètres et des ELB-CA pour les premier et troisième modes et plusieurs niveaux de force. Les différents niveaux de force sont  $F=3, 10, 20$  et  $30\text{ N}$ .

Fréquences	Plage de fréquence (Hz)	$N_{TOC}$ (pts/Hz)	$Q$	$t_f$ (s)
$f_1$	[4.7 6.3]	400	25	12
$f_3$	[27.2 28.8]	400	25	12
$f_{NL1}$	[10.2 11.8]	400	25	5
$f_{NL2}$	[21.2 22.8]	400	25	5

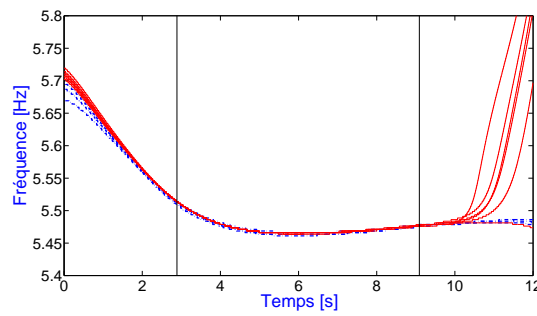
**TABEAU 8.9:** Paramètres de la TOC pour le traitement local des signaux de mesure expérimentaux des accéléromètres et des ELB-CA pour la poutre E-E.



**FIGURE 8.34:** Arêtes des premier et troisième modes obtenues à partir des signaux de mesure expérimentaux des accéléromètres et des ELB-CA en fonction de différents niveaux de force pour la poutre E-E.

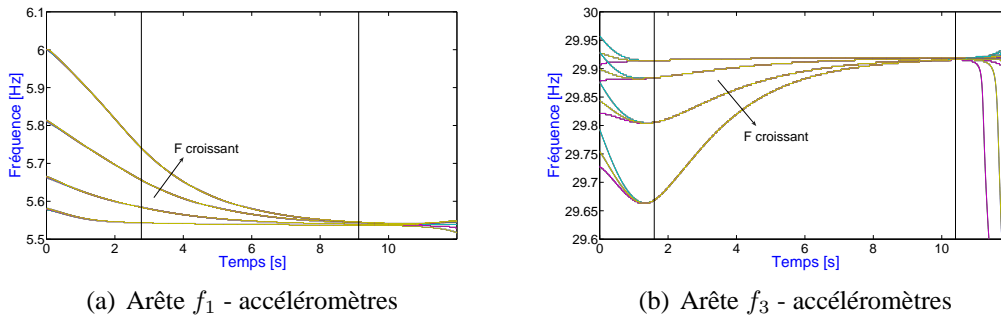
Les graphes de la figure 8.34 montrent que les fréquences instantanées (ou arêtes) augmentent avec le niveau de force, le comportement de la poutre E-E pour les premier et troisième modes est donc «hardening». Par ailleurs, l'évolution des arêtes pour le premier mode est similaire à celle obtenue numériquement (Fig. 8.24). Cependant, les arêtes ne reviennent pas vers les mêmes valeurs de fréquence lorsque que l'amplitude du signal diminue, c'est-à-dire lorsque l'effet des non-linéarités géométriques s'estompe. La fréquence vers laquelle les arêtes convergent, qui correspond à la fréquence propre linéaire, augmente avec le niveau de force appliqué au cours des essais, c'est-à-dire que la poutre se raidit. Il est possible que, pour une excitation importante, la poutre se déplace axialement de manière irréversible au niveau des encastremets. Les CL sont ainsi modifiées et la fréquence propre linéaire change. La variation de fréquence observée reste cependant minimale.

La figure 8.35 présente les arêtes obtenues à partir des signaux de mesure des accéléromètres et des ELB-CA pour le premier mode de la poutre E-E et pour  $F=30\text{ N}$ . Les arêtes obtenues sont presque confondues, les deux types de mesures donnent donc des résultats similaires.



**FIGURE 8.35:** Comparaison des arêtes obtenues pour le premier mode de la poutre E-E à partir de la TOC des signaux de mesure expérimentaux des accéléromètres et des ELB-CA pour  $F=30\text{ N}$ .

La figure 8.36 présente les arêtes obtenues pour les premiers et troisième modes à partir des signaux de mesure numériques des accéléromètres recalés avec les valeurs d'amortissement expérimentales.



**FIGURE 8.36:** Arêtes des premier et troisième modes déterminées à partir des signaux de mesure numériques des accéléromètres recalés avec les valeurs d'amortissements expérimentales, en fonction de différents niveaux de force pour la poutre E-E.

L'évolution des arêtes obtenues numériquement et expérimentalement est complètement différente pour le troisième mode de la poutre E-E (resp. Fig. 8.36(b) et 8.34(c)) : le comportement est «softening» pour les arêtes déterminées numériquement alors qu'il est «hardening» pour les arêtes obtenues à partir des signaux expérimentaux. Nous avons vu au Chapitre 4 que les déformées modales obtenues expérimentalement étaient différentes des déformées modales théoriques. La déformée du mode joue donc un rôle très important pour l'évolution des arêtes en fonction du niveau de force appliqué. Suivant la forme du mode, l'évolution des fréquences instantanées vis-à-vis des non-linéarités géométriques ne sera pas le même.

L'allure des arêtes du premier mode étant similaire pour la simulation numérique et l'expérience, la figure 8.37 présente la comparaison des arêtes obtenues numériquement et expérimentalement à partir des accéléromètres pour le premier mode et  $F=30\text{ N}$ .

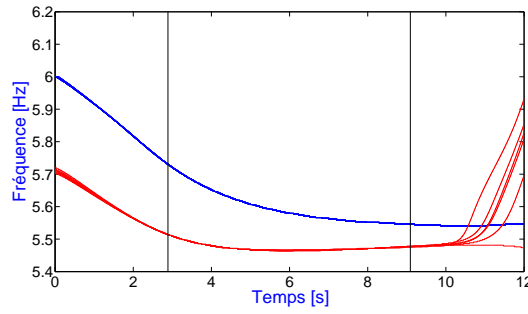
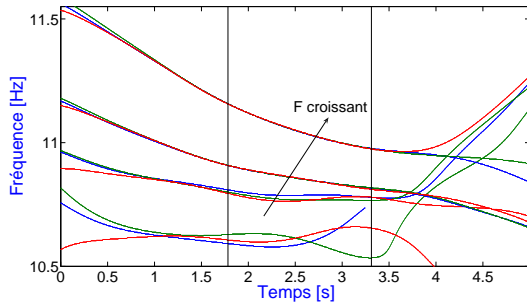


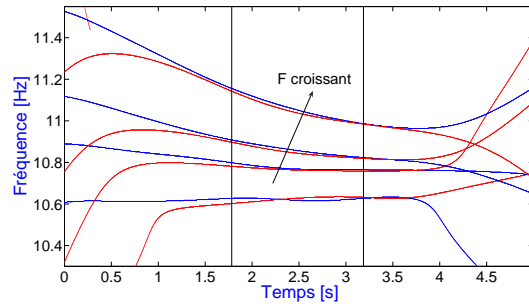
FIGURE 8.37: Arêtes du premier mode déterminées à partir des signaux numériques recalés et expérimentaux des accéléromètres pour la poutre E-E avec  $F=30\text{ N}$ .

La réalisation des encastremets étant loin d'être parfaite, un décalage fréquentiel est observé entre les arêtes obtenues numériquement et expérimentalement, cependant l'évolution des arêtes est similaire.

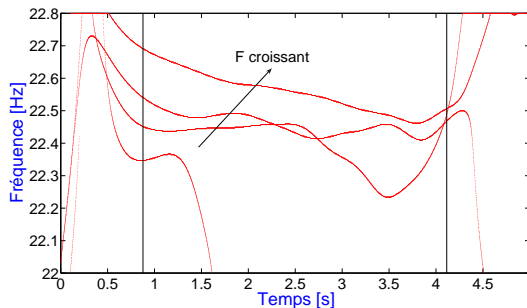
Nous allons maintenant nous intéresser à la TOC des fréquences supplémentaires présentes au niveau des TF des accéléromètres et des ELB-CA. La figure 8.38 présente les arêtes obtenues pour les deux fréquences supplémentaires étudiées avec les mêmes niveaux de force que précédemment. Les arêtes de la première fréquence supplémentaire sont obtenues à partir des accéléromètres n°1, n°2 et n°3 et des ELB-CA n°1 et n°3. Pour la deuxième fréquence, les mesures de l'accéléromètre n°3 ainsi que celles des ELB-CA n°1 et n°3 ont été utilisées.



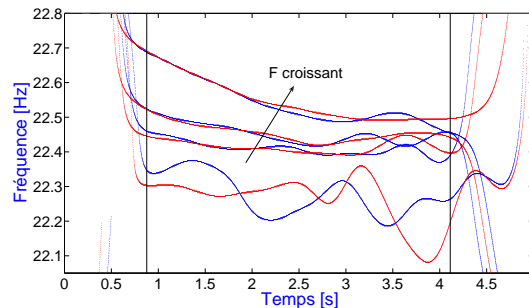
(a) Arête  $f_{NL1}$  - accéléromètre



(b) Arête  $f_{NL1}$  - ELB-CA



(c) Arête  $f_{NL2}$  - accéléromètre

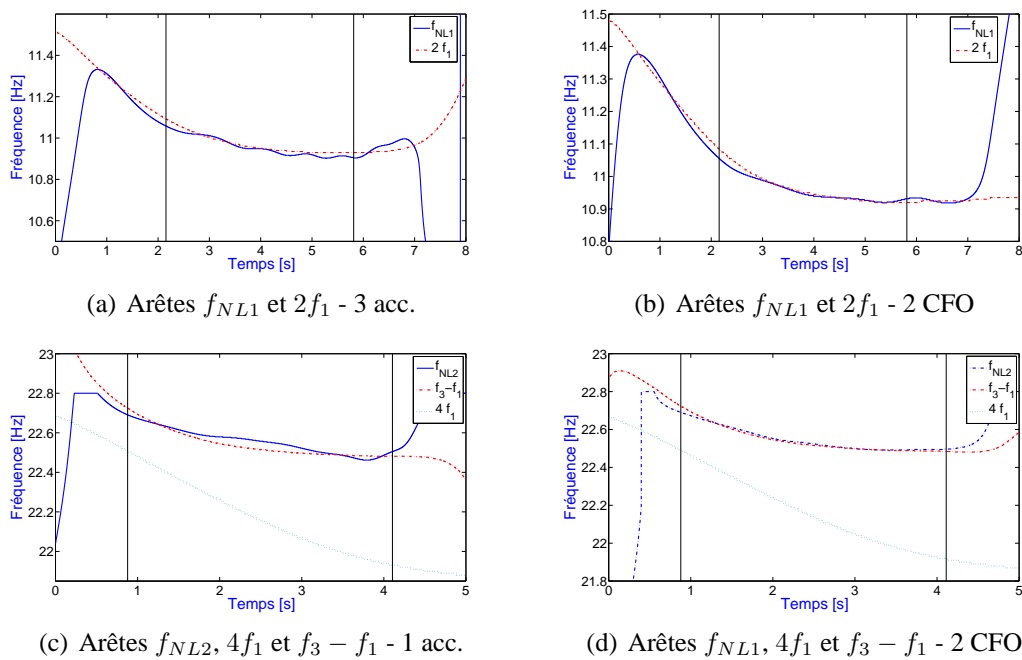


(d) Arête  $f_{NL2}$  - ELB-CA

FIGURE 8.38: Arêtes des deux fréquences supplémentaires déterminées à partir des signaux expérimentaux des accéléromètres et des ELB-CA en fonction de différents niveaux de force pour la poutre E-E.

Pour comparer les arêtes, le temps d'arrêt  $t_f$  et le paramètre  $Q$  (Tab. 8.9) sont les mêmes pour

tous les niveaux de force. Des ondulations apparaissent alors au niveau des arêtes lorsque le mode n'est pas très excité. Pour s'en affranchir, il faudrait prendre un temps d'arrêt plus court ou une valeur de  $Q$  plus élevée. Ainsi, pour de faibles niveaux de force, les ondulations sont plus prononcées et elles s'atténuent ou disparaissent lorsque le niveau de force augmente. Plus le niveau de force sera important et plus l'effet des non-linéarités géométriques durera dans le temps. La première fréquence supplémentaire, pour  $f = 2f_1$ , présente moins d'oscillations pour un faible niveau de force, elle est donc plus excitée que la deuxième fréquence supplémentaire. Si la combinaison de fréquences propres transverses correspondant à la première fréquence supplémentaire paraît évidente ( $f = 2f_1$ ), pour la seconde fréquence  $f_3 - f_1 = 22.3 \text{ Hz}$  et  $4f_1 = 21.3 \text{ Hz}$  sont envisageables. La figure 8.39 présente la comparaison entre les arêtes obtenues pour les fréquences  $f_{NL1}$  et  $2f_1$  ainsi que pour les fréquences  $f_{NL2}$ ,  $4f_1$  et  $f_3 - f_1$ .



**FIGURE 8.39: Identification des fréquences supplémentaires de la poutre E-E à l'aide de la TOC : comparaison d'arêtes.**

La figure 8.39 permet de déterminer les combinaisons de fréquences propres transverses correspondant aux deux fréquences supplémentaires étudiées :  $f_{NL1} = 2f_1$  et  $f_{NL2} = f_3 - f_1$ . Les résultats numériques obtenus précédemment sont donc concordants avec l'expérience.

Les accéléromètres que nous avons utilisés pour réaliser les essais ont une gamme de mesure pouvant aller jusqu'à  $3 \vec{g}$  or, pour les niveaux de force atteints, des niveaux d'accélération bien plus importants ont été obtenus : jusqu'à  $10 \vec{g}$  voire même jusqu'à saturation (Fig. 8.40(a) et 8.40(c)). Afin de s'assurer que les pics supplémentaires obtenus au niveau des TF ne proviennent pas du fait que l'accéléromètre fonctionne hors de sa gamme de mesure, les résultats issus d'un accéléromètre  $20 \vec{g}$ , situé à la même abscisse que l'un des accéléromètres  $3 \vec{g}$  utilisé, et cet accéléromètre  $3 \vec{g}$  ont été comparés. La figure 8.40 présente les signaux temporels de ces deux accéléromètres ( $3 \vec{g}$  et  $20 \vec{g}$ ) pour deux niveaux de force différents ( $3N$  et  $10N$ ) et la figure 8.41 les TF correspondantes.

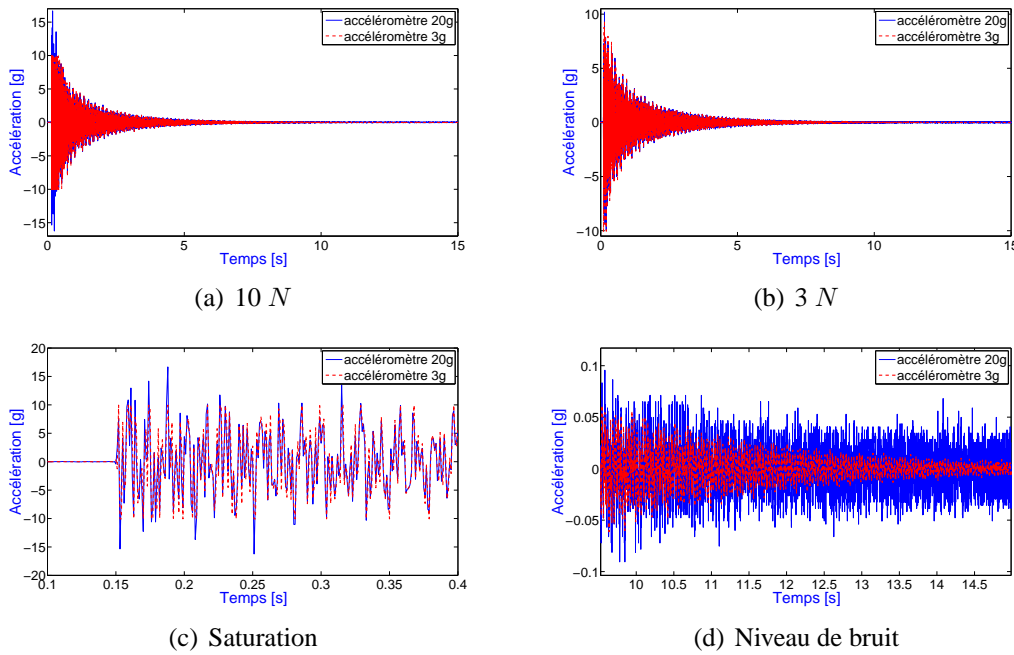


FIGURE 8.40: Signaux temporels obtenus à partir des accéléromètres 3g et 20g pour deux niveaux de force : 3 N et 10 N.

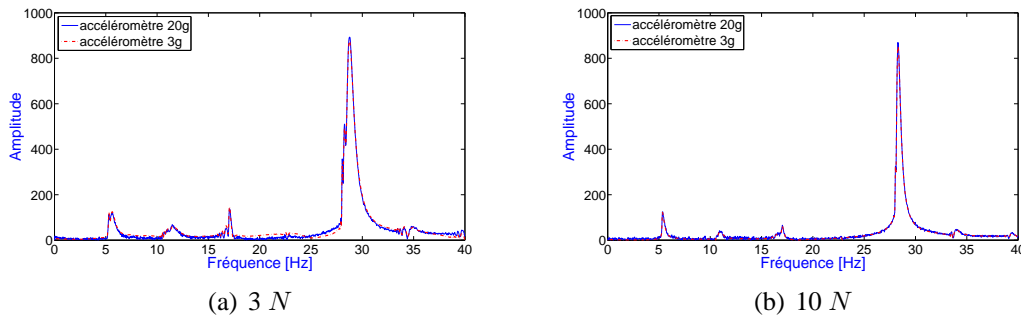


FIGURE 8.41: TF des signaux temporels obtenues à partir des accéléromètres 3g et 20g pour deux niveaux de force.

Au vu des TF de la figure 8.41, il apparaît que les pics supplémentaires au niveau de la TF des accéléromètres ne sont pas dûs à une mauvaise utilisation des accéléromètres, puisqu'ils sont également présents sur la TF de l'accéléromètre 20  $\vec{g}$ , les TF étant confondues. On note également que la TF obtenue avec l'accéléromètre 20  $\vec{g}$  est plus bruitée que celle obtenue à partir de l'accéléromètre 3  $\vec{g}$ , ce qui est normal étant donné que la sensibilité du capteur est moins importante du fait de sa gamme de mesure plus large (Fig. 8.40(d))

## Poutre E-L

Comme nous ne nous attendions pas obtenir des pics de fréquences supplémentaires au niveau des TF des accéléromètres, nous avons réalisé un second démonstrateur, dont la réalisation est détaillée au Chapitre 6. Ceci afin de voir si nous pouvions observer des pics supplémentaires au niveau de la TF d'un capteur de type extensométrique qui ne seraient pas présents sur la TF d'un accéléromètre. Ainsi,

cela permettrait de montrer que ce type de mesure est plus sensible aux non-linéarités géométriques que les mesures accélérométriques. Les caractéristiques de la poutre E-L sont présentées au Chapitre 6. Pour cette expérience, elle est instrumentée avec trois ELB-CA FOGALE de 20 *cm*, quatre jauges de déformation de 12 *cm* et un accéléromètre. Le placement des capteurs est le même qu'au Chapitre 4 en 4.8 (Tab. 4.19), l'accéléromètre étant situé à l'extrémité libre de la poutre.

D'après l'étude numérique réalisée pour la poutre E-L en annexe F.2, la zone sensible aux non-linéarités géométriques, permettant d'obtenir des pics supplémentaires au niveau de la TF, est très localisée : au niveau de l'extrémité libre de la poutre. Alors, les TF obtenues à partir des signaux de mesure des ELB-CA FOGALE et des jauges ne permettront pas d'observer des pics supplémentaires. Nous avons déjà montré auparavant que les jauges de déformation permettent d'obtenir une mesure similaire aux ELB-CA. Afin d'observer l'apparition de pics supplémentaires dûs aux non-linéarités géométriques, nous avons collé une jauge supplémentaire de base de mesure 2 *cm* à l'extrémité de la poutre E-L ( $x=[0.97\ 0.99]$  *m*).

La figure 8.42 présente les TF obtenues à partir de l'accéléromètre, des ELB-CA, des jauges de 12 *cm* et de la jauge de 2 *cm* pour trois niveaux de force :  $F=12, 14$  et  $22$  *N*.

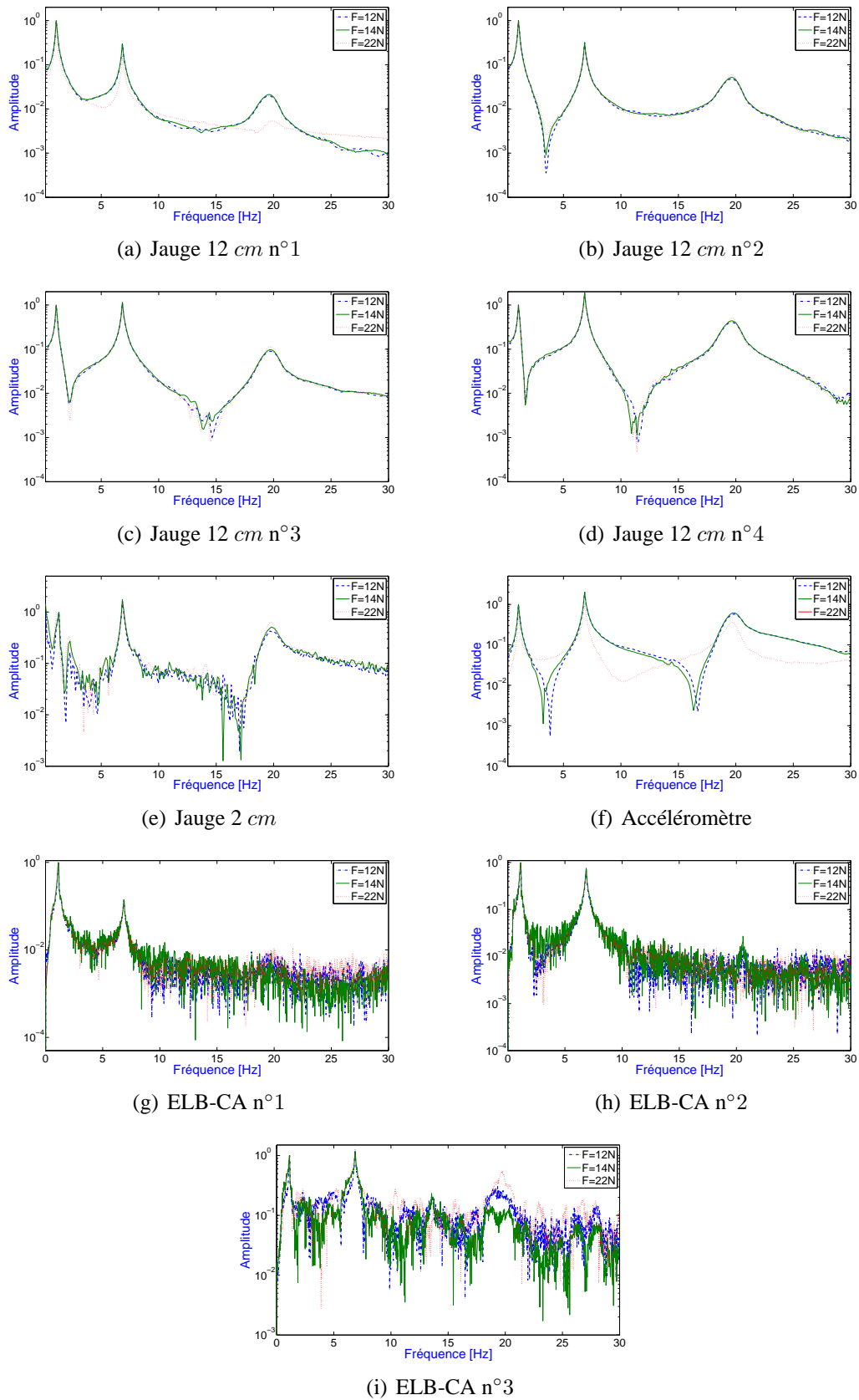


FIGURE 8.42: TF des signaux temporels obtenus à partir des différents capteurs pour la poutre E-L et pour plusieurs niveaux de force.



Comme prévu, à part la jauge de 2 cm pour laquelle un pic supplémentaire très net est observé pour  $f = 2f_1$ , aucun pic supplémentaire n'est présent au niveau des TF des autres capteurs, même pas pour l'accéléromètre situé au même niveau que la jauge de 2 cm sur la poutre E-L. Il est vrai que l'étude quant à la sensibilité des accéléromètres aux non-linéarités géométriques n'étant pas achevée, le placement de l'accéléromètre n'est peut-être pas optimal.

Le niveau de bruit observé au niveau de la jauge de 2 cm est assez important car elle est située à proximité d'un noeud de la courbure modale, c'est-à-dire dans une zone où la déformation est faible. Notons également l'important niveau de bruit observé au niveau des TF des ELB-CA FOGALE. L'allure des TF obtenues pour les trois niveaux de force à partir de l'ELB-CA n°3 est de plus mauvaise qualité car l'un des miroirs du capteur est endommagé, ce qui dégrade la mesure.

Pour mieux visualiser l'apparition des pics supplémentaires au niveau de la TF de la jauge de 2 cm, les TF obtenues pour différentes amplitudes d'excitation ont été représentées sur la figure 8.43.

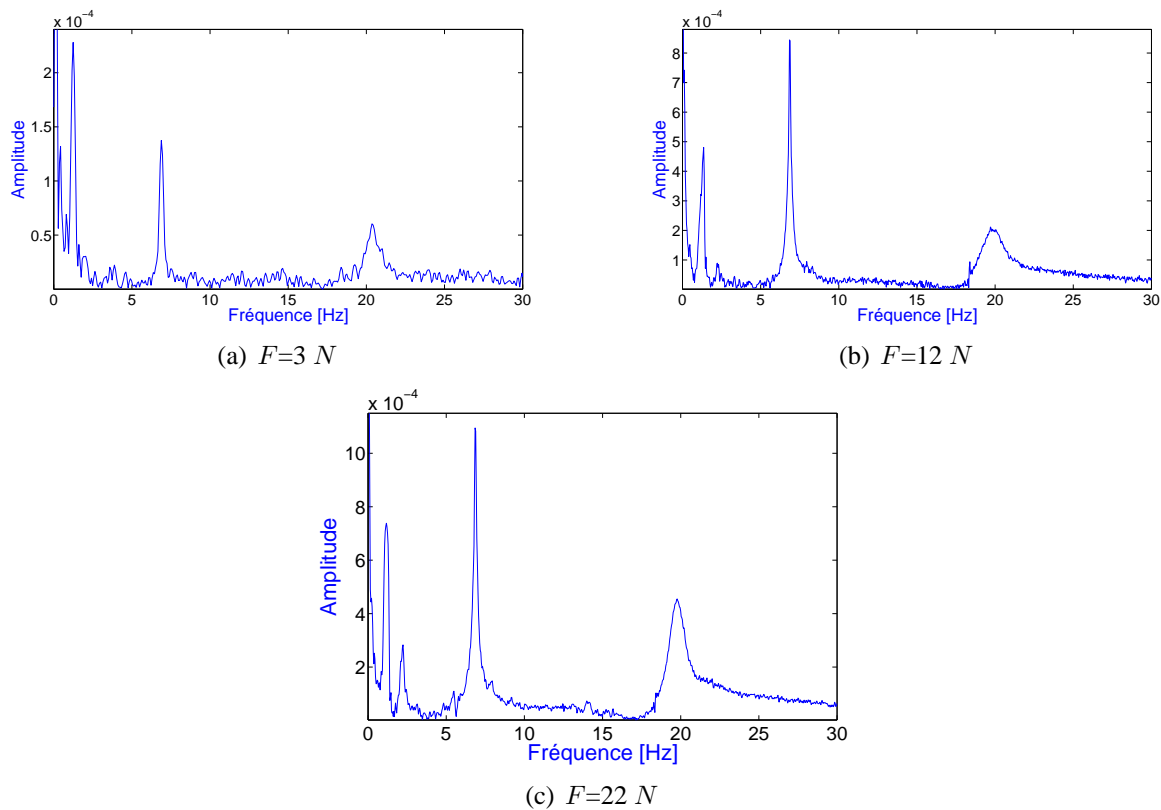
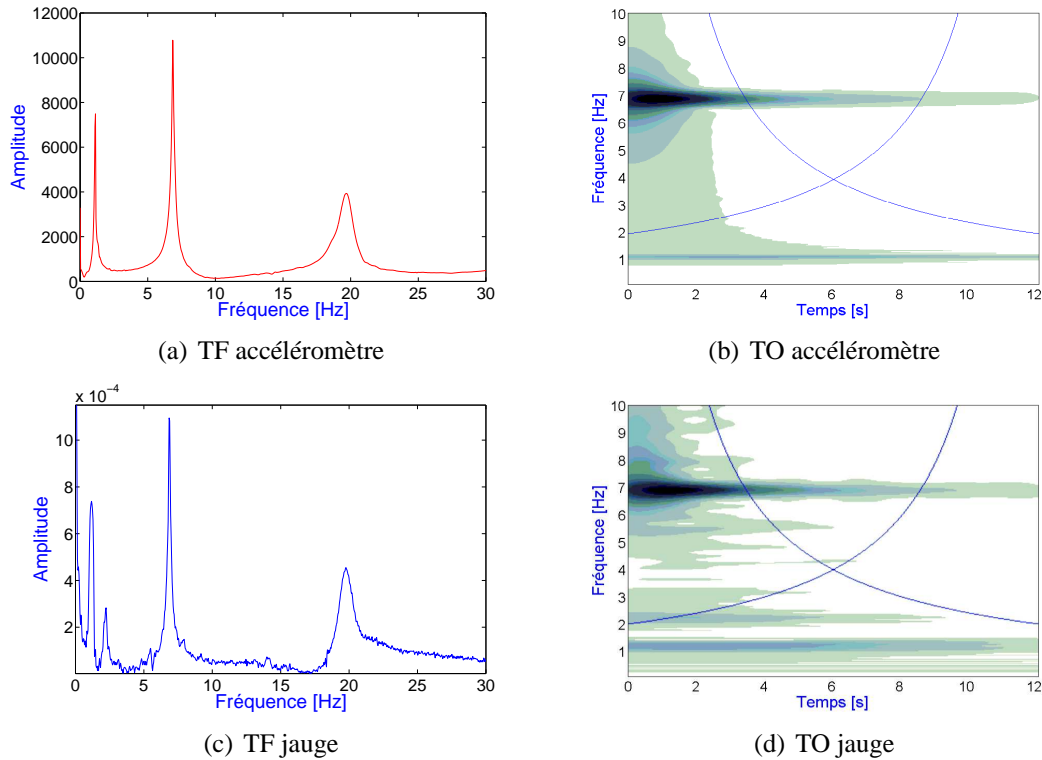


FIGURE 8.43: TF des signaux temporels obtenues à partir de la jauge de 2 cm pour la poutre E-L avec  $F=3, 12$  et  $22\text{ N}$ .

La figure 8.43 montre clairement l'apparition d'un pic supplémentaire situé à la fréquence  $f = 2f_1$ , dont l'amplitude augmente avec le niveau de force. D'autres pics supplémentaires semblent apparaître sur la figure 8.43(c) pour  $F = 22\text{ N}$ , notamment de part et d'autre du pic de la deuxième fréquence pour  $f = f_2 - f_1$  et  $f = f_2 + f_1$  ainsi que pour  $f = 2f_2$ . Cependant, étant donné le niveau de bruit important présent sur la TF de la jauge, il paraît difficile d'affirmer avec certitude que ces pics sont plutôt dus aux non-linéarités géométriques qu'au bruit.

Pour comparer la jauge de 2 cm et l'accéléromètre en vis-à-vis, les TF et les TO des signaux de mesure expérimentaux des deux capteurs sont présentées sur la figure 8.44. La TOC globale des

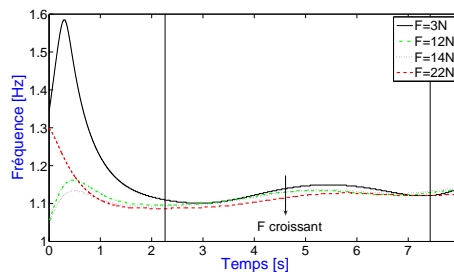
capteurs est calculée sur la plage de fréquences  $[0-10] \text{ Hz}$  avec  $N_{TOC} = 400 \text{ pts}$ ,  $t_f = 12 \text{ s}$  et  $Q = 20$ .



**FIGURE 8.44:** TF et TO des signaux temporels obtenus à partir de la jauge de  $2 \text{ cm}$  et de l'accéléromètre pour la poutre E-L et  $F=22 \text{ N}$ .

La figure 8.44 montre que la jauge est plus sensible aux non-linéarités géométriques que l'accéléromètre puisque ce dernier ne permet pas d'observer de pics supplémentaires aussi bien sur la TF que sur la TO.

La figure 8.45 présente les arêtes obtenues à partir des mesures de l'accéléromètre pour le premier mode et différents niveaux de force. L'évolution des arêtes est similaire à celle observée pour l'étude numérique et montre bien que le comportement de la poutre est non-linéaire. Les variations de fréquences sont beaucoup plus faibles que pour la poutre E-E.



**FIGURE 8.45:** Arêtes du premier mode obtenues à partir de l'accéléromètre pour plusieurs niveaux de force.

L'étude expérimentale de la poutre E-L permet de valider l'étude numérique réalisée dans ce Chapitre, en particulier la sensibilité des capteurs extensométriques aux non-linéarités géométriques.

## 8.6 Conclusion

Dans ce Chapitre, nous avons étudié la mesure réalisée par les ELB-CA pour une poutre soumise à des rotations modérées.

A partir des déplacements axial et transverse étudiés au Chapitre précédent, nous avons pu calculer les différents termes composant la mesure de déformation et donc de l'ELB-CA. Nous avons ainsi pu déterminer lesquels étaient prépondérants et proposer des expressions simplifiées de la mesure de l'ELB-CA en statique et en dynamique, suivant les différents cas de CL de la poutre. Par ailleurs, l'hypothèse des petites déformations réalisée au Chapitre 3 a bien été vérifiée.

Les études statique et dynamique ont permis de montrer que les deux termes de la mesure  $u'$  et  $v'^2/2$  se compensaient. En statique, pour les CL A-A et E-L, l'expression de l'état de l'art est alors équivalente au cas G. Ce n'est pas le cas pour la poutre E-E. En dynamique, les expressions de la mesure de l'ELB-CA défini dans le cas L et l'état de l'art ne sont pas applicables pour des rotations modérées de la poutre, il faut utiliser le cas G.

Nous avons également confirmé l'apparition de pics supplémentaires, observée au Chapitre 6, au niveau des TF des ELB-CA et avons déterminé leur provenance. L'apparition des pics, lorsque la flèche de la poutre augmente, est due à la déformation de l'axe neutre. Sachant cela, la sensibilité de l'ELB-CA aux non-linéarités géométriques en fonction de son placement a pu être définie.

Les confrontations théorie-expérience réalisées sur des poutres E-E et E-L ont permis de valider ces résultats. Il semblerait, au vu des résultats obtenus pour la poutre E-E, que des pics supplémentaires, dus aux non-linéarités géométriques (rotations des sections de la poutre), soient également présent au niveau des TF des signaux de mesure des accéléromètres. Une étude similaire à celle menée pour les ELB-CA pour définir la sensibilité de l'accéléromètre est en cours de finalisation.

## 8.7 Bibliographie

- [1] Valette, Cuesta, *Mécanique de la corde vibrante*, Hermès, 1993.
- [2] Ziaoui A., Pineau A., *Comportement mécanique des matériaux*, Hermès, 1995.



# Conclusion générale et perspectives

Le travail de thèse effectué s'inscrit dans une nouvelle thématique née de l'apparition d'un nouveau type de capteur : un extensomètre à fibre optique de longue base de mesure. L'autre particularité du CFO étudié réside dans son type d'accroche aux structures réalisé de manière continue et non tendu entre deux points comme les capteurs à cordes vibrantes. Le sujet étant novateur et quasiment vierge, l'objectif de la thèse était de dresser un premier panorama des capacités de ces nouveaux capteurs pour l'évaluation des structures notamment en dynamique. Diverses études numériques ont donc été réalisées et confrontées à l'expérience, afin d'évaluer les capacités et les potentialités des extensomètres de longue base de mesure en dynamique.

Dans ce but, la première étape a été de déterminer un modèle analytique complet de la mesure réalisée par un ELB-CA, sans effectuer d'hypothèses simplificatrices. Pour simuler numériquement la mesure, une poutre d'Euler-Bernoulli en flexion a été choisie comme cas d'application et le modèle complet de la mesure réalisée par un ELB-CA a alors été déterminé pour cet exemple. Ensuite, plusieurs hypothèses ont été effectuées suivant le niveau de flèche de la poutre afin de simplifier l'expression de la mesure de l'ELB-CA, aboutissant à deux modèles : le cas Linéaire (hypothèses des petites déformations et des petites rotations : équations de la poutre découplées et linéaires) et le cas Général (hypothèses des petites déformations et des rotations modérées : équations de la poutre couplées et non linéaires).

En linéaire, les capacités des ELB-CA pour effectuer une analyse modale ont été étudiées. Nous avons mis en avant le fait que les vecteurs propres obtenus à partir de la mesure des ELB-CA ne sont pas les mêmes que ceux obtenus avec des capteurs ponctuels classiques (déplacement, vitesse et accélération). En effet, ces derniers permettent d'obtenir les déformées modales  $\phi_k(x)$  tandis que les ELB-CA mesure l'intégrale de la courbure modale entre les bornes du capteur  $\int_a^b \phi_k''(x)dx$ . En ce qui concerne les caractéristiques fréquentielles, la mesure des ELB-CA possède les mêmes caractéristiques qu'une mesure de déplacement, à savoir qu'elle privilégie les basses fréquences. Par ailleurs, nous avons montré que la notion de FRF est également applicable aux ELB-CA, sous réserve de quelques précautions. En effet, plusieurs propriétés des FRF définies habituellement pour des capteurs ponctuels ne peuvent pas être appliquées : la réciprocité, la co-localisation et la normalisation des vecteurs propres par rapport à la masse.

Comme les méthodes de dérivation et d'intégration numériques amplifient la dispersion, présente respectivement au niveau des déformées modales et des courbures modales, il est préférable d'utiliser un capteur permettant d'obtenir directement l'information désirée plutôt que d'utiliser un autre type de mesure nécessitant des calculs numériques supplémentaires, sources d'erreurs, pour parvenir à une information équivalente. Les ELB-CA sont donc plus adaptés pour déterminer la courbure ou courbure moyenne modale et les capteurs ponctuels pour obtenir les déformées modales. Ainsi, les ELB-CA présentent un intérêt fort pour toutes les méthodes de détection d'endommagements utilisant

la courbure modale.

Des simulations numériques ont permis de comparer les résultats obtenus pour la méthode de la courbure modale à partir de capteurs ponctuels et d'ELB-CA pour une poutre E-L. Pour un nombre de capteurs peu élevé, les ELB-CA donnent de meilleurs résultats d'autant plus que, pour les capteurs ponctuels, la détermination de la courbure modale n'est pas directe (double dérivation numérique) comme pour les ELB-CA, ce qui entraîne la perte de points de mesure aux extrémités. Un des avantages des ELB-CA par rapport aux capteurs ponctuels est donc la capacité à détecter des endommagements à proximité des extrémités. Pour un nombre de capteurs plus élevé, les résultats numériques obtenus pour les deux types de capteurs sont similaires. Par ailleurs, il s'avère que la détection de différents niveaux d'endommagement est plus précise, pour des configurations d'ELB-CA continues, lorsque la base de mesure est petite. Cependant, expérimentalement, le bruit de mesure sera plus important pour des ELB-CA de petite taille étant donné que la précision de la mesure est la même quelle que soit la base de mesure. Pour obtenir une configuration optimale, il faudra alors faire un compromis entre le bruit de mesure et la finesse de la détection des différents niveaux d'endommagements.

Pour le cas L, nous avons réalisé des simulations numériques mettant en évidence l'apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF de la mesure des ELB-CA pour des niveaux de flèche de la poutre importants. L'étude a mis en évidence les limites du cas L et l'influence du couplage entre les déplacements axial et transverse de la poutre. En effet, lorsque le niveau de flèche de la poutre est trop important, le déplacement axial et les termes qui en découlent ne sont plus négligeables. En conséquence, pour des niveaux de flèche importants, nous avons étudié la mesure de l'ELB-CA obtenue à partir du système d'équations couplées et non-linéaires (cas G). Pour cela, le comportement d'une poutre soumise à des rotations modérées a été étudié en statique et en dynamique. Cette étude a permis de montrer les limites des logiciels commerciaux utilisés (Adams et COMSOL), de valider la modélisation Eléments Finis proposée pour représenter le phénomène des non-linéarités géométriques et de montrer que, pour la flexion d'une poutre en dynamique, le spectre du déplacement axial comprend des combinaisons des fréquences propres transverses de la poutre. Ensuite, les déplacements axial et transverse obtenus à partir de la modélisation EF ont été utilisés afin de calculer la mesure réalisée par les ELB-CA pour une poutre en rotations modérées. Nous avons ainsi pu déterminer les termes prépondérants de la mesure et proposer des expressions simplifiées, en statique et en dynamique, suivant les différents cas de CL de la poutre. L'apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF des ELB-CA obtenue avec le cas L pour des niveaux de flèche importants a ainsi pu être confirmée. Ces pics proviennent de la déformation de l'axe neutre et la sensibilité des ELB-CA aux non-linéarités géométriques, quant à leur placement au niveau de la poutre, a été défini pour les différents cas de CL. Par ailleurs, nous avons comparé nos résultats à l'expression de la mesure de l'ELB-CA habituellement utilisée dans l'état de l'art. Pour de petites rotations, les modèles de la mesure sont équivalents par contre, pour des rotations modérées, l'expression de l'état de l'art n'est plus valide. Le cas G doit nécessairement être utilisé.

En parallèle de ces études numériques, deux systèmes de mesure optique permettant de réaliser des mesures dynamiques à partir d'ELB-CA ont été comparés afin de dégager leurs principaux avantages et inconvénients. Le premier système de mesure, un prototype de la société FOGALE nanotech, permet, de part sa plage de mesure assez importante ( $\pm 2 \text{ mm}$ ), d'acquérir plusieurs ELB-CA en les multiplexant en série et/ou en parallèle. Les inconvénients majeurs résident dans le niveau de bruit important ( $\approx 1 \text{ }\mu\text{m}$ ) et la fréquence d'échantillonnage fixe et peu élevée du système ( $100 \text{ Hz}$ ), qui limite le champ d'application au domaine des basses fréquences et soumet la mesure au repliement

spectral. Beaucoup de temps a été consacré à la mise au point et à la compréhension de ce prototype afin d'améliorer la qualité de la mesure réalisée par l'appareil. Le deuxième appareil de la société SMARTEC, la référence sur le marché actuellement, est plus abouti avec notamment huit voies de mesure, une fréquence d'échantillonnage variable pouvant aller jusqu'à  $10\text{ kHz}$ , une précision de l'ordre de  $0.01\text{ }\mu\text{m}$  et une plage de mesure importante de  $\pm 5\text{ mm}$ .

Ces appareils ont permis de réaliser des confrontations théorie-expérience sur différents cas de poutre : E-E avec l'appareil SMARTEC et E-L avec l'appareil FOGALE. Les études réalisées sur ces deux cas de poutre ont permis de valider que les vecteurs propres obtenus à partir des ELB-CA sont bien l'intégrale de la courbure modale. L'étude effectuée sur la poutre E-E a également permis de valider l'apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF des ELB-CA pour d'importants niveaux de flèche de la poutre.

Outre les avantages bien connus des fibres optiques tels l'insensibilité électromagnétique, les faibles pertes au  $\text{km}$  et son caractère peu intrusif, les diverses études menées au cours de la thèse ont permis de dégager de nombreuses caractéristiques des ELB-CA. Certaines sont spécifiques à la base de mesure du capteur : filtrage de modes pour le contrôle des structures et détection d'endommagements à partir de la courbure modale. D'autres, comme la détection de non-linéarités géométriques ou l'obtention de vecteurs propres différents, sont plutôt liées au type de mesure réalisée à savoir une mesure extensométrique. Elles peuvent donc s'appliquer à d'autres capteurs sensibles à ce paramètre tel que les jauges de déformation ou les CFO à réseaux de Bragg par exemple. Par ailleurs, le phénomène des non-linéarités géométriques étant local, la possibilité d'avoir une base de mesure importante avec un ELB-CA n'apporte rien, au contraire cela atténue le phénomène.

La thèse a permis de dégager un certain nombre d'aspects pour l'utilisation des ELB-CA et de nombreuses perspectives sont envisageables. Elles sont de plusieurs natures : matérielles, calculatoires (analytique et numérique) et expérimentales.

Au niveau **matériel**, la faible maturité technologique de l'appareil FOGALE n'a pas permis de finaliser toutes les démonstrations expérimentales. Nous avons proposé plusieurs pistes d'amélioration pour l'appareil, notamment au niveau de la détection du maximum d'interférence (partie software de l'appareil de mesure : LabVIEW) et de la perte d'intensité lumineuse (partie capteur : miroir semi-réfléchissant), qui laissent envisager des perspectives prometteuses. Il reste à reprendre la détection d'endommagement, le contrôle des structures (filtrage de modes), l'étude de la sensibilité transverse, les comparaisons de capteurs (avec des réseaux de Bragg) et, éventuellement, des mesures sur sites ou sur des structures se rapprochant du génie civil.

Du point de vue des **calculs analytiques et numériques**, l'étude de cas d'application classiques en mécanique et plus complexe que les poutres d'Euler-Bernoulli, étudiées au cours de la thèse, pourraient permettre de mettre en avant d'autres spécificités des ELB-CA. Notamment, le cas des plaques serait intéressant à étudier car il fait intervenir une deuxième dimension, l'influence du placement de l'ELB-CA serait alors totalement différente.

Dans notre étude, nous nous sommes uniquement intéressés à la flexion transverse d'une poutre cependant, la géométrie d'un ELB-CA étant à symétrie de révolution, le capteur possède une sensibilité transverse. Il ne possède aucun axe privilégié contrairement aux accéléromètres. L'étude de la mesure de l'ELB-CA dans le cas de flexions combinées de la poutre serait intéressante à mener afin de regarder les contributions de chacune des deux flexions dans la mesure et comment les dissocier.

Au Chapitre 5 de la thèse, des simulations numériques ont été réalisées pour la détection d'endommagements. Elles ont été faites sans ajout de bruit numérique : celui-ci serait amplifié par la double dérivation numérique nécessaire à l'obtention des courbures modales à partir de capteurs ponctuels. Une étude prenant en compte le bruit de mesure ainsi que la dispersion des vecteurs propres obtenus avec des capteurs ponctuels et des ELB-CA permettrait d'affiner les conclusions quant à l'apport des ELB-CA pour cette méthode de détection de défauts. Ensuite, les perspectives de calcul et de simulation sont nombreuses et variées : autres méthodes de détection de défauts (énergie de déformation, courbure de flexibilité,...), configurations d'ELB-CA mixtes (association de longueurs différentes), placement optimal pour la détection de défauts, détection d'endommagements pour des plaques...

En linéaire, les notions de noeuds et de ventres des vecteurs propres obtenus avec les ELB-CA sont différentes de celles définies classiquement pour des capteurs ponctuels. Elles permettent d'envisager des perspectives intéressantes pour le filtrage des modes dont l'application est le contrôle de structures. Nous avons notamment montré qu'en donnant au capteur une forme proportionnelle à celle de la courbure modale d'un mode, seul ce dernier était présent dans la réponse. Dans la perspective d'une application expérimentale, une étude sur l'incertitude du placement imposé serait intéressante à mener tout comme l'intégration des résultats obtenus pour la mesure des ELB-CA dans les algorithmes de contrôle (pour la comparaison avec les capteurs utilisés classiquement). Étant donné les vecteurs propres déterminés par les ELB-CA, les algorithmes de contrôle ne sont peut-être pas applicables directement, ce point serait également à traiter.

La thèse s'est focalisée sur un type d'ELB pouvant être continûment attaché aux structures. Or, des calculs préliminaires, présentés en annexe C, montrent qu'un ELB tendu entre deux points donne les mêmes résultats qu'un ELB-CA. Ce point serait très intéressant à poursuivre car, d'un point de vue pratique, tendre un ELB de plusieurs mètres est plus simple à réaliser que de le coller continûment à la structure. De plus, d'autres types de mesure optique, tel que la mesure en espace libre, peuvent alors être également envisagés.

Par ailleurs, au delà des ELB-CA, il semblerait, au vu des résultats expérimentaux obtenus pour la poutre E-E au Chapitre 8, que les accéléromètres soient également sensibles aux non-linéarités géométriques. Pour finaliser la comparaison entre les ELB-CA et les accéléromètres, et déterminer si les ELB-CA sont plus sensibles que les accéléromètres aux rotations des sections de la poutre, il serait intéressant de parvenir à déterminer un modèle de la mesure réalisée par un accéléromètre dans ce cas et de définir la sensibilité de l'accéléromètre vis-à-vis des non-linéarités géométriques comme nous l'avons fait pour les ELB-CA au Chapitre 8.

Cette thèse constitue donc une première étape de l'étude des capteurs à fibre optique de longue base de mesure pour l'évaluation dynamique des structures et le champ de recherche est encore vaste et très prometteur.



## **Quatrième partie**

### **Annexes**



## Annexe A

# Mesure obtenue à partir d'un interféromètre de Michelson double étage

Dans cette annexe, nous avons effectué le calcul détaillé de la mesure obtenue à partir d'un interféromètre de Michelson double étage. Ensuite, nous nous sommes intéressés au calcul de la mesure lorsque plusieurs ELB-CA sont multiplexés soit en série, soit en parallèle.

### A.1 Calcul de la mesure fournie par un Michelson double étage

L'interféromètre de Michelson double étage, dont la configuration est représentée sur la figure A.1, permet de mesurer le chemin optique entre les miroirs partiels inscrits dans la FO de mesure (d'une certaine longueur arbitraire) désignée sous le nom «capteur».

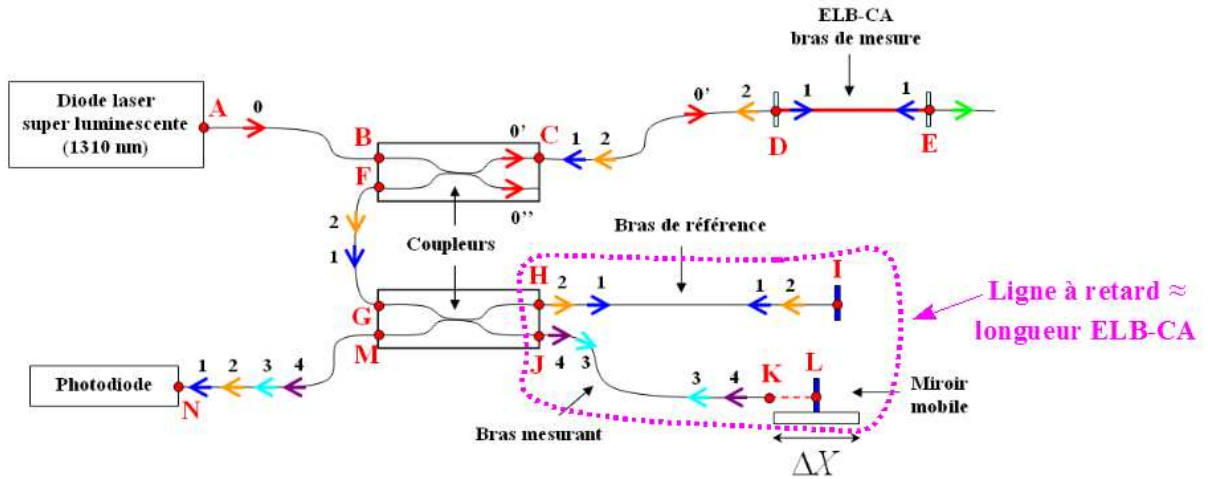


FIGURE A.1: Principe de fonctionnement d'un Michelson double étage.

Supposons, pour simplifier le calcul, que l'onde provenant de la source lumineuse est monochromatique :

$$\vec{E}_0 = b_0 \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_i \quad (\text{A.1})$$

avec  $b_0 = a_0 \cdot e^{\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$ , la phase à l'origine étant supposée nulle.

Détaillons le calcul des ondes lumineuses qui interfèrent et qui permettent de remonter à l'information désirée : la variation de longueur de l'ELB-CA.

Pour un coupleur  $2 \times 2$ , la relation qui lie les amplitudes complexes des entrées,  $u_1$  et  $u_2$ , à celles des sorties,  $s_1$  et  $s_2$ , est définie par la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_c & r_c \\ r_c & t_c \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

où  $t_c$  et  $r_c$  sont deux réels compris entre 0 et 1 tels que  $t_c^2 + r_c^2 = 1$ ,  $t_c$  étant la constante de couplage.

Après passage de l'onde dans le premier coupleur ( $r_{c1}$  et  $t_{c1}$ ), il vient :

$$\vec{E}_{0'} = t_{c1} b_0 \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_{i'}$$
(A.3)

Au niveau du premier miroir semi-réfléchissant du CFO, deux ondes sont créées, l'une est réfléchie (facteur de réflexion  $r_1$  et déphasage de  $-\pi$ , c'est-à-dire multiplication par -1) et l'autre transmise (facteur de transmission  $t_1$ ) :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= t_1 t_{c1} b_0 \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_1 \\ \vec{E}_2 &= -r_1 t_{c1} b_0 \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

L'onde transmise provenant du premier miroir va être réfléchie au niveau du deuxième miroir semi-réfléchissant du CFO (facteur de réflexion  $r_2$  et déphasage de  $-\pi$ ). Cette onde réfléchie va être transmise au niveau du premier miroir (facteur de transmission  $t_1$ ). Nous avons donc en sortie du premier miroir semi-réfléchissant deux ondes qui reviennent vers le coupleur et après passage par ce dernier, nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{r_{c1} t_{c1}}{2r_{c1}^2 - 1} \cdot r_2 t_1^2 b_0 \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_1 \\ \vec{E}_2 &= -\frac{r_{c1} t_{c1}}{2r_{c1}^2 - 1} \cdot r_1 b_0 \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Ces deux ondes vont être séparées au niveau du second coupleur et donner naissance à quatre ondes : deux ondes, d'indices 1 et 2, vont se propager dans le bras de référence et les deux autres, d'indices 3 et 4, dans le bras mesurant (miroir mobile). En sortie du deuxième coupleur et donc au niveau de la photodiode, nous récupérerons les quatre ondes suivantes, suite à la réflexion totale sur les miroirs ( $r=1$ ) de la ligne à retard :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= -\frac{t_{c2} r_{c2}}{2r_{c2}^2 - 1} \cdot \frac{r_{c1} t_{c1}}{2r_{c1}^2 - 1} \cdot r_2 t_1^2 b_0 \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_1 = \vartheta_1 \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_1 \\ \vec{E}_2 &= \frac{t_{c2} r_{c2}}{2r_{c2}^2 - 1} \cdot \frac{r_{c1} t_{c1}}{2r_{c1}^2 - 1} \cdot r_1 b_0 \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_2 = \vartheta_2 \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_2 \\ \vec{E}_3 &= \frac{t_{c2} r_{c2}}{2r_{c2}^2 - 1} \cdot \frac{r_{c1} t_{c1}}{2r_{c1}^2 - 1} \cdot r_2 t_1^2 b_0 \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_3 = \vartheta_3 \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_3 \\ \vec{E}_4 &= -\frac{t_{c2} r_{c2}}{2r_{c2}^2 - 1} \cdot \frac{r_{c1} t_{c1}}{2r_{c1}^2 - 1} \cdot r_1 b_0 \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_4 = \vartheta_4 \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_4 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

La photodiode est un détecteur qui permet de mesurer l'intensité du signal lumineux, l'information obtenue est alors :

$$I_D = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4|^2 \quad (\text{A.7})$$

L'intensité lumineuse pour des interférences à deux ondes vaut :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$$

Après calcul, l'intensité  $I_D$  s'écrit alors :

$$I_D = 3 \sum_{i=1}^4 I_i + 2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^3 \sqrt{I_i I_j} \cdot \cos\left[\frac{2\pi\delta_{ij}}{\lambda}\right] \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (\text{A.8})$$

où  $I_i = \vartheta_i \overline{\vartheta_i}$ ,  $\delta_{ij}$  est la différence de marche entre les différents rayons, c'est-à-dire la différence des chemins optiques de deux rayons égale à  $n \cdot (c_j - c_i) = c'_j - c'_i$ ,  $n$  étant l'indice de réfraction.

Pour simplifier, nous supposons dans la suite que les états de polarisation des ondes dans la FO sont les mêmes, ce qui n'est pas le cas en réalité, ainsi  $\forall i, j \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 1$ .

Le dernier terme de l'expression (A.8) en cosinus est le terme d'interférence. Calculons les différentes différences de marche  $\delta_{ij}$  pour déterminer les signaux qui vont permettre d'observer des interférences. Définissons tout d'abord les longueurs suivantes à partir des points de la figure A.1 :

$$\begin{aligned} L + \Delta L &= DE \\ X + \Delta X &= KL \\ l_1 &= AB \\ l_2 &= CD \\ l_2 &= FG \\ l_4 &= HI \\ l_5 &= JK \\ l_6 &= MN \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Les différents chemins optiques sont alors définis par :

$$\begin{aligned} c'_1 &= n_v l_1 + 2n_v l_2 + 2n_{ELB}(L + \Delta L) + n_v l_3 + 2n_v l_4 + n_v l_6 \\ c'_2 &= n_v l_1 + 2n_v l_2 + n_v l_3 + 2n_v l_4 + n_v l_6 \\ c'_3 &= n_v l_1 + 2n_v l_2 + 2n_{ELB}(L + \Delta L) + n_v l_3 + 2[n_v l_5 + n_a(X + \Delta X)] + n_v l_6 \\ c'_4 &= n_v l_1 + 2n_v l_2 + n_v l_3 + 2[n_v l_5 + n_a(X + \Delta X)] + n_v l_6 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

où  $n_v$  est l'indice de réfraction de la FO égal à 1.46,  $n_a$  l'indice de l'air égal à 1 et  $n_{ELB} = n_v + n_\varepsilon$  l'indice de la zone subissant les déformations, c'est-à-dire le capteur. Le terme de dépendance de l'indice de la fibre avec la déformation,  $n_\varepsilon$ , est explicité au Chapitre 3.

Les différentes différences de marche sont donc égales à :

$$\begin{aligned}
\delta_{12} &= 2n_{ELB}(L + \Delta L) \\
\delta_{13} &= 2n_v l_4 - 2[n_v l_5 + n_a(X + \Delta X)] \\
\delta_{14} &= 2n_v l_4 - 2[n_v l_5 + n_a(X + \Delta X)] + 2n_{ELB}(L + \Delta L) \\
\delta_{23} &= 2n_v l_4 - 2[n_v l_5 + n_a(X + \Delta X)] - 2n_{ELB}(L + \Delta L) \\
\delta_{24} &= 2n_v l_4 - 2[n_v l_5 + n_a(X + \Delta X)] = \delta_{13} \\
\delta_{34} &= 2n_{ELB}(L + \Delta L) = \delta_{12}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Les paramètres variables au cours du temps sont  $\Delta L$  et  $\Delta X$ . Supposons que le miroir mobile et que la structure sur laquelle est collée le capteur ne vibrent pas, c'est-à-dire que  $\Delta L = \Delta X = 0$  et que  $n_{ELB} = n_v$  ( $n_\varepsilon = 0$ ). Les seules différences de marche contenant l'information de longueur de l'ELB-CA, pouvant s'annuler et permettre alors l'obtention des interférences, sont  $\delta_{14}$  et  $\delta_{23}$ . Il faut donc régler les longueurs  $l_4$ ,  $l_5$  et  $X$  pour pouvoir annuler l'une de ces deux différences de marche et vérifier l'une des deux équations suivantes :

$$n_v l_4 - n_v l_5 - n_a X + n_v L = 0 \tag{A.12}$$

$$n_v l_4 - n_v l_5 - n_a X - n_v L = 0 \tag{A.13}$$

Ces deux équations n'étant pas compatibles entre elles, il faut choisir l'une des deux possibilités de réglage. Choisissons par exemple de fixer les longueurs  $l_4$ ,  $l_5$  et  $X$  pour vérifier la première équation (A.12). Alors, la seconde équation n'est pas vérifiée, c'est-à-dire que la différence de marche  $\delta_{23}$  ne permettra pas d'obtenir d'interférences. Notons par ailleurs que la longueur de fibre allant de l'appareil à l'ELB-CA ( $l_2$ ) n'est pas prise en compte dans le phénomène d'interférence. On peut donc la choisir librement, ce qui n'est pas le cas pour un simple interféromètre de Michelson.

Une fois le réglage effectué, lorsque la structure est en mouvement et que le miroir mobile vibre, si l'élongation de l'ELB-CA,  $\Delta L$ , reste dans la plage de mesure de l'appareil,  $\Delta X$ , alors d'après (A.12) et la différence de marche  $\delta_{14}$  (A.11), nous obtiendrons l'égalité suivante au maximum d'interférences :

$$n_v l_4 - n_v l_5 - n_a(X + \Delta X) + n_{ELB}(L + \Delta L) = 0 \tag{A.14}$$

or d'après (A.12), il vient

$$\Delta X = n_{ELB} \Delta L + n_\varepsilon L \tag{A.15}$$

Comme  $n_{ELB} = n_v + n_\varepsilon$  et  $\Delta L = \varepsilon L$  où  $\varepsilon$  est la déformation subit par le capteur, dont le calcul est détaillé au Chapitre 3, l'équation (A.15) devient

$$\boxed{\Delta X(t) = (n_\varepsilon(t) + n_v(t)\varepsilon(t) + n_v\varepsilon(t)) \cdot L} \tag{A.16}$$

C'est la mesure qui est obtenue à partir d'un Michelson double étage.

## A.2 Multiplexage en série

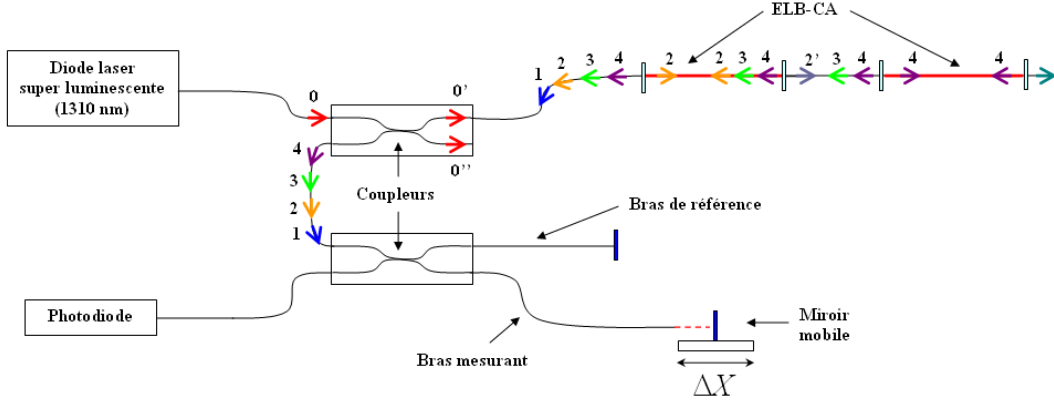


FIGURE A.2: Multiplexage en série d'ELB-CA.

L'onde électromagnétique issue de la source lumineuse est définie en (A.1). En sortie du premier coupleur, au lieu de deux ondes comme c'était le cas précédemment, nous avons quatre ondes (deux pour chaque capteur, Fig. A.2). Ensuite, après passage dans la ligne à retard (bras de référence + bras mesurant), nous obtenons donc huit ondes au niveau de la photodiode. D'après (A.8), l'intensité lumineuse obtenue au niveau du détecteur sera

$$I_D = 7 \sum_{i=1}^8 I_i + 2 \sum_{i=1}^8 \sum_{j=i+1}^7 \sqrt{I_i I_j} \cdot \cos \left[ \frac{2\pi \delta_{ij}}{\lambda} \right] \quad (\text{A.17})$$

Les longueurs sont les mêmes que celles définies en (A.9), avec cependant  $L_1 + \Delta L_1 = DE$ . Définissons la longueur du deuxième ELB-CA par  $L_2 + \Delta L_2$  et la distance entre les deux capteurs par  $l_7$ . Les différents chemins optiques  $c'_i$  sont alors :

$$\begin{aligned} c'_1 &= n_v l_1 + 2n_v l_2 + 2n_{ELB_1}(L_1 + \Delta L_1) + n_v l_3 + 2n_v l_4 + n_v l_6 \\ c'_2 &= n_v l_1 + 2n_v l_2 + n_v l_3 + 2n_v l_4 + n_v l_6 \\ r'_3 &= n_v l_1 + 2n_v l_2 + 2n_{ELB_1}(L_1 + \Delta L_1) + n_v l_3 + 2[n_v l_5 + n_a(X + \Delta X)] + n_v l_6 \\ c'_4 &= n_v l_1 + 2n_v l_2 + n_v l_3 + 2[n_v l_5 + n_a(X + \Delta X)] + n_v l_6 \\ c'_5 &= n_v l_1 + 2n_v l_2 + 2n_{ELB_1}(L_1 + \Delta L_1) + 2n_v l_7 + 2n_{ELB_2}(L_2 + \Delta L_2) + n_v l_3 \\ &\quad + 2n_v l_4 + n_v l_6 \\ c'_6 &= n_v l_1 + 2n_v l_2 + 2n_{ELB_1}(L_1 + \Delta L_1) + 2n_v l_7 + n_v l_3 + 2n_v l_4 + n_v l_6 \\ c'_7 &= n_v l_1 + 2n_v l_2 + 2n_{ELB_1}(L_1 + \Delta L_1) + 2n_v l_7 + 2n_{ELB_2}(L_2 + \Delta L_2) + n_v l_3 \\ &\quad + 2[n_v l_5 + n_a(X + \Delta X)] + n_v l_6 \\ c'_8 &= n_v l_1 + 2n_v l_2 + 2n_{ELB_1}(L_1 + \Delta L_1) + 2n_v l_7 + n_v l_3 + 2[n_v l_5 + n_a(X + \Delta X)] \\ &\quad + n_v l_6 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Les seules différences de marche qui peuvent s'annuler et donc produire des interférences, avec

le réglage des longueurs  $l_4$ ,  $l_5$  et  $X$  vérifiant l'équation (A.12) (en remplaçant  $L$  par  $L_1$ ), sont :

$$\delta_{14} = n_v l_4 - n_v l_5 - n_a(X + \Delta X) + n_{ELB_1}(L_1 + \Delta L_1) \quad (\text{A.19})$$

$$\delta_{58} = n_v l_4 - n_v l_5 - n_a(X + \Delta X) + n_{ELB_2}(L_2 + \Delta L_2) \quad (\text{A.20})$$

$$\delta_{36} = -n_v l_4 + n_v l_5 + n_a(X + \Delta X) - l_7 \quad (\text{A.21})$$

Pour que l'équation (A.20) puisse s'annuler, le réglage de l'appareil étant effectué pour le premier ELB-CA de longueur  $L_1$ , la longueur du deuxième ELB-CA doit être comprise dans la plage  $[L_1 - d/n_v, L_1 + d/n_v]$  où  $[-d, +d]$  est la plage de déplacement du miroir mobile. En effet, le réglage choisi permet d'obtenir le pic d'interférences du premier capteur pour  $\Delta X = 0$  donc la longueur du deuxième capteur ne doit pas être supérieure à  $L_1 + d/n_v$  et inférieure à  $L_1 - d/n_v$  pour être «vu».

Par ailleurs, l'équation (A.21) montre que si la longueur de fibre reliant les deux capteurs se situe également dans la plage  $[L_1 - d/n_v, L_1 + d/n_v]$  alors des interférences pourront également avoir lieu. Pour éviter cela, on prendra une longueur  $l_7$  bien supérieure à la longueur  $L_1$ . Cependant, cela permet également de montrer qu'il est possible de mettre les capteurs bout à bout, la fibre de longueur  $l_7$  devenant alors un capteur qu'il faudrait coller à la structure. Trois pics d'interférences seraient alors obtenus.

### A.3 Intensité réfléchie pour des ELB multiplexés en série

Posons  $r_i$  et  $t_i$ , les coefficients de réflexion et de transmission du miroir semi-réfléchissant  $n^\circ i$ . L'ELB-CA  $n^\circ i$  est situé entre les miroirs d'indices  $i$  et  $i + 1$ . Les passages des ondes lumineuses par les deux coupleurs seront représentés par les constantes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Alors, pour trois ELB-CA multiplexés en série, les intensités  $I_i$  des maxima des figures d'interférence correspondant à chaque ELB-CA seront définies par :

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha_1 \alpha_2 r_1 r_2 t_1^2 \\ I_2 &= \alpha_1 \alpha_2 r_3 r_4 t_1^4 t_2^4 t_3^2 \\ I_3 &= \alpha_1 \alpha_2 r_5 r_6 t_1^4 t_2^4 t_3^4 t_4^2 t_5^2 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

En généralisant à  $N$  capteurs, il vient pour l'ELB-CA d'indice  $i$  :

$$I_i = \alpha_1 \alpha_2 r_{2i} r_{2i-1} t_{2i-1}^2 \cdot \prod_{j=1}^{2i-1} t_j^4 \quad (\text{A.23})$$

Or, nous avons la relation suivante entre les coefficients de réflexion et de transmission d'un miroir [9]

$$r_i^2 + t_i^2 = 1 \quad (\text{A.24})$$

d'où

$$I_i = \alpha_1 \alpha_2 r_{2i} r_{2i-1} (1 - r_{2i-1}^2) \cdot \prod_{j=1}^{2i-1} (1 - r_j^2)^2 \quad (\text{A.25})$$

Si de plus on fait l'hypothèse que les coefficients de réflexion des miroirs sont identiques, c'est-à-dire  $r_i = R$ , alors l'intensité du maximum de la figure d'interférence correspondant à l'ELB-CA  $n^\circ i$  vaut

$$I_i = \alpha_1 \alpha_2 R^2 (1 - R^2)^{4i-3} \quad (\text{A.26})$$



## A.4 Multiplexage en parallèle

Une autre façon d'acquérir la mesure de plusieurs ELB-CA est d'augmenter le nombre de voies de mesure, c'est-à-dire d'effectuer une mise en parallèle des capteurs plutôt que de les placer en série. Prenons, par exemple, deux voies de mesure avec un ELB-CA sur chaque voie (Fig. A.3) et regardons l'intensité lumineuse  $I$  obtenue.

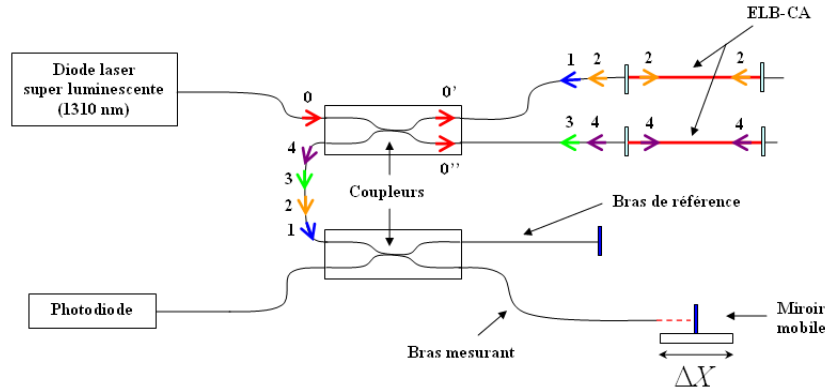


FIGURE A.3: Multiplexage en parallèle d'ELB-CA.

Comme pour le multiplexage en série des ELB-CA, nous avons quatre ondes à la sortie du premier coupleur et huit ondes au niveau du détecteur (photodiode). Le calcul des chemins optiques est identique pour les quatre ondes issues du premier capteur et celles issues du deuxième capteur. Ainsi, les seules différences de marche qui peuvent s'annuler et donc produire des interférences, avec le réglage des longueurs  $l_4$ ,  $l_5$  et  $X$  vérifiant l'équation (A.12) (en remplaçant  $L$  par  $L_1$ ), sont :

$$\delta_{ij} = n_v l_4 - n_v l_5 - n_a (X + \Delta X) + n_{ELB_i} (L_k + \Delta L_k) \quad k = 1, 2 \quad (\text{A.27})$$

et les maxima des pics d'interférences seront déterminés pour les positions du miroir :

$$\Delta X_k = \phi_k + n_{ELB_k} \Delta L_k + n_e L_k \quad i = 1, 2 \quad (\text{A.28})$$

En combinant les deux moyens d'acquérir plusieurs ELB-CA, multiplexages en série et en parallèle, il est possible de réaliser l'acquisition d'un grand nombre d'ELB-CA (Fig. A.4).

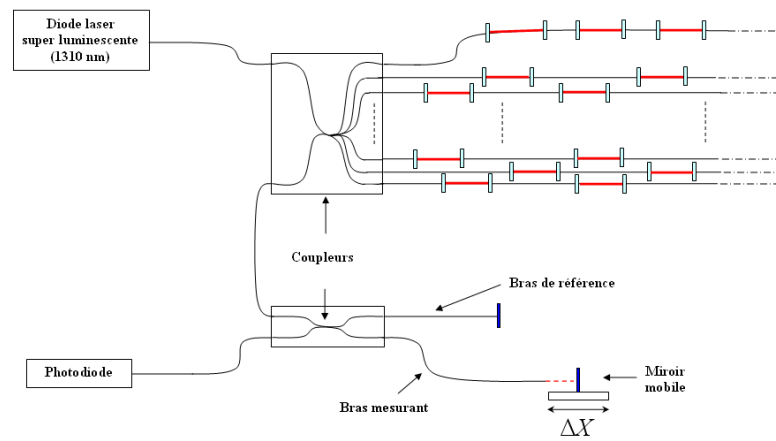


FIGURE A.4: Interrogation simultanée d'un grand nombre de capteurs : multiplexage en série et en parallèle.

## Annexe B

# Différents calculs de la déformation pour une poutre d'Euler-Bernoulli

On s'intéresse à la flexion transverse d'une poutre dans le plan  $(O, x, y)$  avec les hypothèses cinématiques d'Euler-Bernoulli : une section droite de la poutre reste plane et perpendiculaire à l'axe neutre.

Pour calculer la déformation  $\varepsilon$  subie par un ELB-CA, sous différentes configurations, au niveau d'une poutre de type Euler-Bernoulli, plusieurs formules peuvent être utilisées :

- Méthode dites du « $ds$ »

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dM'}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dM}{ds} \right)^2 \right] \quad (\text{B.1})$$

- Calcul à partir du tenseur des déformations

$$\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{B.2})$$

où  $U$  et  $V$  sont les composantes du vecteur déplacement  $\vec{\xi}$  entre les points considérés, par exemple :

$$\vec{\xi} = \overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Déformation d'un fil

$$\varepsilon = \vec{t} \cdot \frac{d\vec{\xi}}{ds} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\vec{\xi}}{ds} \right)^2 \quad (\text{B.3})$$

où  $\vec{t}$  est le vecteur tangent à l'origine ( $t = 0$ ) au point considéré et  $\vec{\xi}$  le vecteur déplacement entre les points considérés.

Les liens entre les différentes méthodes de calcul de la déformation peuvent paraître évidents de prime abord, ils sont cependant moins triviaux lorsque les calculs se compliquent.

Dans cette annexe, les calculs de la déformations vont être détaillés pour différents cas :

- Poutre droite et distance de l'ELB-CA à l'axe neutre constante

- Poutre droite et distance de l'ELB-CA à l'axe neutre variable
- Poutre courbe et distance de l'ELB-CA à l'axe neutre constante

## B.1 Poutre droite - distance de l'ELB-CA à l'axe neutre constante

La figure B.1 présente les configurations initiale et déformée d'une section droite d'une poutre droite, où l'ELB-CA est positionné parallèlement à l'axe neutre ( $y = cst$ ).

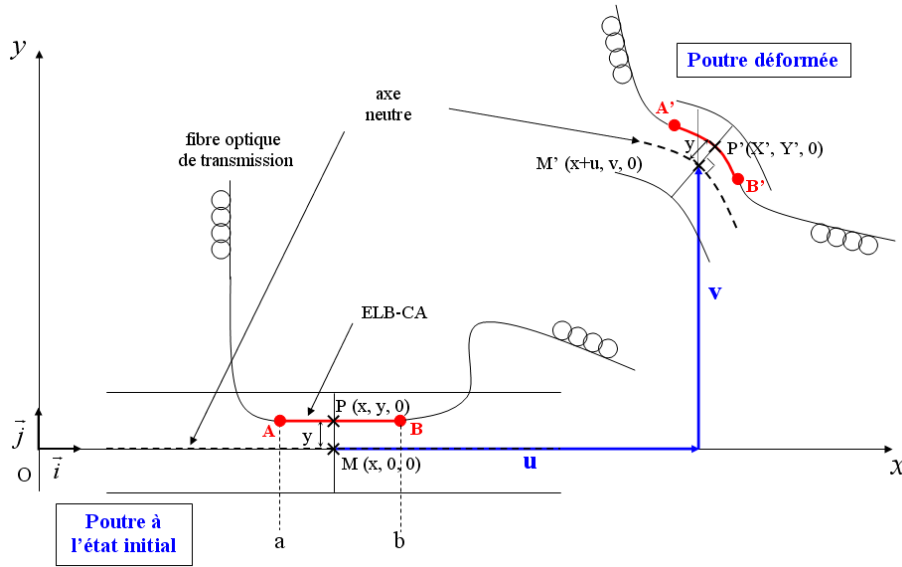


FIGURE B.1: Déformation d'une section droite transverse d'une poutre droite avec l'ELB-CA parallèle à l'axe neutre.

Les vecteurs position des points  $M$  et  $P$ , les vecteurs tangents à l'axe neutre et à la ligne définie par l'ELB-CA, ainsi que l'abscisse curviligne sont à l'**état d'origine**,

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\overrightarrow{t_{m_0}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{t_{p_0}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

d'où

$$ds_{M_0} = ds_{P_0} = dx \quad (\text{B.6})$$

et à l'**état déformé**,

$$\overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} x + u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x + u + y \cdot n_x \\ v + y \cdot n_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

avec

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{k} \wedge \vec{t}|} \vec{k} \wedge \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \begin{pmatrix} -v' \\ 1+u' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$\vec{t}_m = \begin{pmatrix} 1+u' \\ v' \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{t}_p = \begin{pmatrix} 1+u' + y \cdot n'_x \\ v' + y \cdot n'_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

d'où

$$ds_M = \sqrt{(1+u')^2 + v'^2} dx \quad (\text{B.10})$$

$$ds_P = \sqrt{(1+u' + y \cdot n'_x)^2 + (v' + y \cdot n'_y)^2} dx \quad (\text{B.11})$$

### B.1.1 Méthode dite du « $ds$ »

#### Déformation de l'axe neutre

Les expressions de  $dM$  et  $dM'$  sont :

$$\vec{dM} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{dM'} = \begin{pmatrix} (1+u')dx \\ v'dx \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

d'où

$$\frac{\vec{dM}}{ds} = \frac{\vec{dM}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\vec{dM'}}{ds} = \frac{\vec{dM'}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \begin{pmatrix} 1+u' \\ v' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

La déformation est alors définie par

$$\begin{aligned} \varepsilon_M &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dM'}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dM}{ds} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} [(1+u')^2 + v'^2 - 1] \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

soit

$$\boxed{\varepsilon_M = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2}} \quad (\text{B.15})$$

#### Déformation d'une ligne de la poutre

Les expressions de  $dP$  et  $dP'$  sont :

$$\vec{dP} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{dP'} = \begin{pmatrix} (1+u' + y \cdot n'_x)dx \\ (v' + y \cdot n'_y)dx \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

d'où

$$\frac{d\vec{P}}{ds} = \frac{d\vec{P}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \frac{d\vec{P}'}{ds} = \frac{d\vec{P}'}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \begin{vmatrix} 1 + u' + y \cdot n'_x \\ v' + y \cdot n'_y \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{B.17})$$

La déformation au point  $P$  est donc

$$\begin{aligned} \varepsilon_P &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dP'}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dP}{ds} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (1 + u' + y \cdot n'_x)^2 + (v' + y \cdot n'_y)^2 - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

soit

$$\varepsilon_P = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y[(1 + u')n'_x + v'n'_y] + \frac{y^2}{2}(n'^2_x + n'^2_y) \quad (\text{B.19})$$

### B.1.2 Calcul à partir du tenseur des déformations

#### Déformation de l'axe neutre

Le vecteur déplacement  $\overrightarrow{MM'}$  est défini par :

$$\overrightarrow{MM'} = \begin{vmatrix} u \\ v \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{B.20})$$

d'où

$$\varepsilon_M = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{B.21})$$

soit

$$\varepsilon_M = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} \quad (\text{B.22})$$

#### Déformation d'une ligne de la poutre

Le vecteur déplacement  $\overrightarrow{PP'}$  est défini par :

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{vmatrix} u + y \cdot n_x \\ v + y \cdot (n_y - 1) \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{B.23})$$

d'où

$$\begin{aligned} \varepsilon_P &= \frac{\partial(u+y \cdot n_x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(u+y \cdot n_x)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial[v+y \cdot (n_y-1)]}{\partial x} \right)^2 \\ &= u' + y \cdot n'_x + \frac{1}{2}(u' + y \cdot n'_x)^2 + \frac{1}{2}(v' + y \cdot n'_y)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

soit

$$\varepsilon_P = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y[(1 + u')n'_x + v'n'_y] + \frac{y^2}{2}(n'^2_x + n'^2_y) \quad (\text{B.25})$$

### B.1.3 Déformation d'un fil

#### Déformation de l'axe neutre

Le vecteur déplacement  $\overrightarrow{MM'}$  est défini en (B.20), le vecteur tangent à l'axe neutre en (B.5) et la variation d'abscisse curviligne à l'état d'origine en (B.6). Il vient alors

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \vec{t} \cdot \frac{d\vec{\xi}}{ds} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\vec{\xi}}{ds} \right)^2 \\ &= \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} u \\ v \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} u \\ v \\ 0 \end{vmatrix} \right)^2\end{aligned}\quad (\text{B.26})$$

soit

$$\varepsilon_M = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} \quad (\text{B.27})$$

#### Déformation d'une ligne de la poutre

Le vecteur déplacement  $\overrightarrow{PP'}$  est défini en (B.23), le vecteur tangent à l'ELB-CA en (B.5) et la variation d'abscisse curviligne en (B.6). Nous avons donc

$$\varepsilon_P = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} u + y \cdot n_x \\ v + y \cdot (n_y - 1) \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} u + y \cdot n_x \\ v + y \cdot (n_y - 1) \\ 0 \end{vmatrix} \right)^2 \quad (\text{B.28})$$

soit après calcul

$$\varepsilon_P = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y[(1 + u')n'_x + v'n'_y] + \frac{y^2}{2}(n'^2_x + n'^2_y) \quad (\text{B.29})$$

## B.2 Poutre droite - distance de l'ELB-CA à l'axe neutre variable

La figure B.2 présente les configurations initiale et déformée d'une section droite d'une poutre droite, où l'ELB-CA a une forme quelconque à l'origine :  $y$  devient une variable qui dépend de  $x$ .

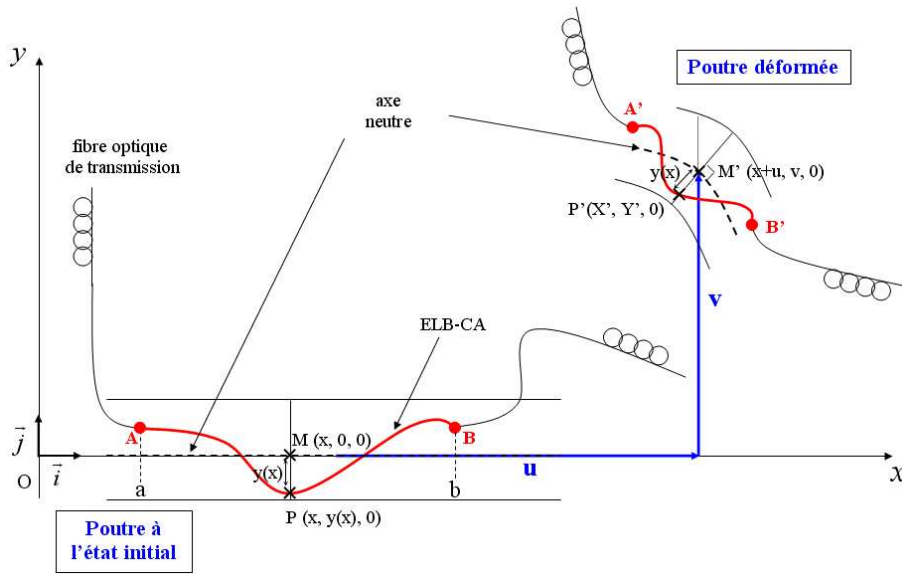


FIGURE B.2: Déformation d'une section droite transverse d'une poutre droite avec l'ELB-CA possédant une forme quelconque à l'état initial.

Les vecteurs position des points  $M$  et  $P$ , les vecteurs tangents à l'axe neutre et à la ligne définie par l'ELB-CA ainsi que l'abscisse curviligne sont à l'état d'origine,

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.30})$$

$$\vec{t}_{m0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{t}_{p0} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

d'où

$$ds_{M_0} = dx \quad (\text{B.32})$$

$$ds_{P_0} = \sqrt{1+y'^2}dx \quad (\text{B.33})$$

et à l'état déformé,

$$\overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} x+u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x+u+y \cdot n_x \\ v+y \cdot n_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.34})$$

avec

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{k} \wedge \vec{t}|} \vec{k} \wedge \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \begin{pmatrix} -v' \\ 1+u' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.35})$$

$$\vec{t}_m = \begin{pmatrix} 1+u' \\ v' \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{t}_p = \begin{pmatrix} 1+u'+y \cdot n'_x + y' \cdot n_x \\ v'+y \cdot n'_y + y' \cdot n_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.36})$$



d'où

$$ds_M = \sqrt{(1 + u')^2 + v'^2} dx \quad (\text{B.37})$$

$$ds_P = \sqrt{(1 + u' + y \cdot n'_x + y' \cdot n_y)^2 + (v' + y \cdot n'_y + y' \cdot n_x)^2} dx \quad (\text{B.38})$$

### B.2.1 Méthode dite du « $ds$ »

#### Déformation de l'axe neutre

La déformation de l'axe neutre est la même que celle définie pour le cas précédent, à savoir

$$\varepsilon_M = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} \quad (\text{B.39})$$

#### Déformation d'une ligne de la poutre

Les expressions de  $dP$  et  $dP'$  sont :

$$\overrightarrow{dP} = \begin{pmatrix} dx \\ y' dx \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{dP'} = \begin{pmatrix} (1 + u' + y \cdot n'_x + y' \cdot n_x) dx \\ (v' + y \cdot n'_y + y' \cdot n_y) dx \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.40})$$

d'où

$$\frac{\overrightarrow{dP}}{ds} = \frac{\overrightarrow{dP}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\overrightarrow{dP'}}{ds} = \frac{\overrightarrow{dP'}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \begin{pmatrix} 1 + u' + y \cdot n'_x + y' \cdot n_x \\ v' + y \cdot n'_y + y' \cdot n_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.41})$$

La déformation au point  $P$  est alors

$$\begin{aligned} \varepsilon_P &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dP'}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dP}{ds} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2(1+y'^2)} \left[ (1 + u' + y \cdot n'_x + y' \cdot n_x)^2 + (v' + y \cdot n'_y + y' \cdot n_y)^2 - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

soit

$$\varepsilon_P = \frac{1}{1 + y'^2} \left( u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y[(1 + u')n'_x + v'n'_y] + y'[(1 + u')n_x + v'n_y] + yy'[n_x n'_x + n_y n'_y] + \frac{y'^2}{2}[n_x^2 + n_y^2 - 1] + \frac{y^2}{2}[n'^2_x + n'^2_y] \right) \quad (\text{B.43})$$

### B.2.2 Calcul à partir du tenseur des déformations

#### Déformation de l'axe neutre

Le vecteur déplacement  $\overrightarrow{MM'}$  est le même que pour le cas précédent, d'où

$$\varepsilon_M = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} \quad (\text{B.44})$$

### Déformation d'une ligne de la poutre

Le vecteur déplacement  $\overrightarrow{PP'}$  est également le même que pour le cas précédent, cependant cette fois-ci  $y$  est une variable de  $x$ . Il vient alors

$$\begin{aligned}\varepsilon_P &= \frac{\partial(u+y \cdot n_x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(u+y \cdot n_x)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial[v+y \cdot (n_y-1)]}{\partial x} \right)^2 \\ &= u' + y \cdot n'_x + y' \cdot n_x + \frac{1}{2}(u' + y \cdot n'_x + y' \cdot n_x)^2 + \frac{1}{2}[v' + y \cdot n'_y + y' \cdot (n_y - 1)]^2\end{aligned}\quad (\text{B.45})$$

soit

$$\begin{aligned}\varepsilon_P &= u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y[(1+u')n'_x + v'n'_y] + y'[(1+u')n_x + v'(n_y - 1)] \\ &\quad + yy'[n_x n'_x + n_y n'_y - n'_y] + \frac{y'^2}{2}[n_x^2 + n_y^2 + 1 - 2n_y] + \frac{y^2}{2}[n'^2_x + n'^2_y]\end{aligned}\quad (\text{B.46})$$

L'expression de  $\varepsilon_P$  trouvée ici est différente de celle déterminée en (B.43). En effet, il manque le facteur  $\frac{1}{1+y'^2}$  et des termes supplémentaires apparaissent dans l'expression :  $-y'v' - yy'n'_y + y'^2(1 - n_y)$ .

En fait, l'utilisation de la formule (B.2) n'est pas tout à fait exacte car simplifiée. Il faut en effet utiliser :

$$\varepsilon_P = \vec{t}_p \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \vec{t}_p \quad (\text{B.47})$$

où  $\underline{\varepsilon}$  représente le tenseur des déformations

Pour le cas présent, l'application de cette expression donne

$$\varepsilon_P = \frac{1}{1+y'^2} \begin{vmatrix} 1 \\ y' \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ y' \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{B.48})$$

soit

$$\begin{aligned}\varepsilon_P &= \frac{1}{1+y'^2} [\varepsilon_{xx} + y'(\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx})] \\ &= \frac{1}{1+y'^2} (\varepsilon_{xx} + 2y'\varepsilon_{xy})\end{aligned}\quad (\text{B.49})$$

avec

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{B.50})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{B.51})$$

Le terme  $\varepsilon_{xx}$  a déjà été calculé en (B.46) et  $\varepsilon_{xy}$  vaut :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{\partial[v+y(n_y-1)]}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2}[v' + yn'_y + y'(n_y - 1)]\end{aligned}\quad (\text{B.52})$$

d'où

$$2y'\varepsilon_{xy} = y'v' + y'yn'_y + y'(n_y - 1) \quad (\text{B.53})$$

On retrouve alors les termes supplémentaires de l'expression définie en (B.46). La déformation au point  $P$  est donc égale à

$$\varepsilon_P = \frac{1}{1+y'^2} \left( \begin{array}{l} u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y[(1+u')n'_x + v'n'_y] + y'[(1+u')n_x + v'n_y] \\ + yy'[n_x n'_x + n_y n'_y] + \frac{y'^2}{2}[n_x^2 + n_y^2 - 1] + \frac{y^2}{2}[n'^2_x + n'^2_y] \end{array} \right) \quad (\text{B.54})$$

On retrouve bien la même expression que celle obtenue en (B.43) avec la méthode du «ds».

### B.2.3 Déformation d'un fil

#### Déformation de l'axe neutre

Le vecteur déplacement  $\overrightarrow{MM'}$  est identique au cas précédent.

$$\varepsilon_M = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} \quad (\text{B.55})$$

#### Déformation d'une ligne de la poutre

Le vecteur déplacement  $\overrightarrow{PP'}$  est défini en (B.23), le vecteur tangent à l'ELB-CA en (B.31) et la variation d'abscisse curviligne en (B.33). Alors,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \vec{t} \cdot \frac{d\vec{\xi}}{ds} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\vec{\xi}}{ds} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \left| \begin{array}{c} 1 \\ y' \\ 0 \end{array} \right| \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d}{dx} \left| \begin{array}{c} u + y \cdot n_x \\ v + y \cdot (n_y - 1) \\ 0 \end{array} \right| + \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d}{dx} \left| \begin{array}{c} u + y \cdot n_x \\ v + y \cdot (n_y - 1) \\ 0 \end{array} \right| \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

soit après calcul

$$\varepsilon_P = \frac{1}{1+y'^2} \left( \begin{array}{l} u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y[(1+u')n'_x + v'n'_y] + y'[(1+u')n_x + v'n_y] \\ + yy'[n_x n'_x + n_y n'_y] + \frac{y'^2}{2}[n_x^2 + n_y^2 - 1] + \frac{y^2}{2}[n'^2_x + n'^2_y] \end{array} \right) \quad (\text{B.57})$$

## B.3 Poutre courbe - distance de l'ELB-CA à l'axe neutre constante

La figure B.3 présente les configurations initiale et déformée d'une section droite d'une poutre courbe (axe neutre suivant la courbe  $y(x)$ ), où l'ELB-CA est situé parallèlement à une distance  $d$  constante de l'axe neutre.

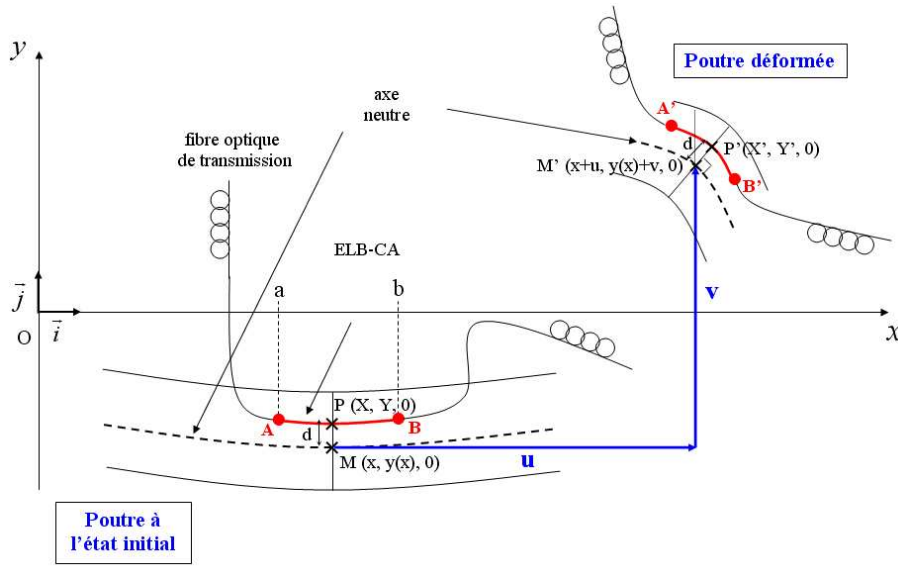


FIGURE B.3: Déformation d'une section droite transverse d'une poutre courbe avec l'ELB-CA parallèle à l'axe neutre.

Les vecteurs position des points  $M$  et  $P$ , les vecteurs tangents à l'axe neutre et à la ligne définie par l'ELB-CA et l'abscisse curviligne sont à l'état d'origine,

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x + d \cdot n_{x_0} \\ y(x) + d \cdot n_{y_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.58})$$

avec

$$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} n_{x_0} \\ n_{y_0} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{k} \wedge \vec{t}_{m_0}|} \vec{k} \wedge \vec{t}_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \begin{pmatrix} y' \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.59})$$

$$\vec{t}_{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{t}_{p_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 + dn'_{x_0})^2 + (y' + dn'_{y_0})^2}} \begin{pmatrix} 1 + dn'_{x_0} \\ y' + dn'_{y_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.60})$$

d'où

$$ds_{M_0} = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (\text{B.61})$$

$$ds_{P_0} = \sqrt{(1 + dn'_{x_0})^2 + (y' + dn'_{y_0})^2} dx \quad (\text{B.62})$$

et à l'état déformé,

$$\overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x + u + d \cdot n_x \\ y + v + d \cdot n_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.63})$$

avec

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{k} \wedge \vec{t}|} \vec{k} \wedge \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{(1 + u')^2 + (y' + v')^2}} \begin{pmatrix} -y' - v' \\ 1 + u' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.64})$$

$$\vec{t}_m = \begin{vmatrix} 1 + u' \\ y' + v' \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{t}_p = \begin{vmatrix} 1 + u' + d \cdot n'_x \\ y' + v' + d \cdot n'_y \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{B.65})$$

d'où

$$ds_M = \sqrt{(1 + u')^2 + (y' + v')^2} dx \quad (\text{B.66})$$

$$ds_P = \sqrt{(1 + u' + d \cdot n'_x)^2 + (y' + v' + d \cdot n'_y)^2} dx \quad (\text{B.67})$$

### B.3.1 Méthode dite du « $ds$ »

#### Déformation de l'axe neutre

Les expressions de  $dM$  et  $dM'$  sont :

$$\vec{dM} = \begin{vmatrix} dx \\ y' dx \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{dM'} = \begin{vmatrix} (1 + u') dx \\ (y' + v') dx \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{B.68})$$

d'où

$$\frac{\vec{dM}}{ds} = \frac{\vec{dM}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \begin{vmatrix} 1 \\ y' \\ 0 \end{vmatrix} \quad \frac{\vec{dM'}}{ds} = \frac{\vec{dM'}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \begin{vmatrix} 1 + u' \\ y' + v' \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{B.69})$$

La déformation d'un point de l'axe neutre vaut alors

$$\begin{aligned} \varepsilon_M &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dM'}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dM}{ds} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2(1+y'^2)} [(1 + u')^2 + (y' + v')^2 - (1 + y')^2] \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

soit

$$\boxed{\varepsilon_M = \frac{1}{1 + y'^2} \left( u' + y'v' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} \right)} \quad (\text{B.71})$$

#### Déformation d'une ligne de la poutre

Les expressions de  $dP$  et  $dP'$  sont :

$$\vec{dP} = \begin{vmatrix} (1 + d \cdot n'_{x_0}) dx \\ (y' + d \cdot n'_{y_0}) dx \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{dP'} = \begin{vmatrix} (1 + u' + d \cdot n'_x) dx \\ (y' + v' + d \cdot n'_y) dx \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{B.72})$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\vec{dP}}{ds} &= \frac{\vec{dP}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(1+d \cdot n'_{x_0})^2 + (y' + d \cdot n'_{y_0})^2}} \begin{vmatrix} 1 + d \cdot n'_{x_0} \\ y' + d \cdot n'_{y_0} \\ 0 \end{vmatrix} \\ \frac{\vec{dP'}}{ds} &= \frac{\vec{dP'}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(1+d \cdot n'_{x_0})^2 + (y' + d \cdot n'_{y_0})^2}} \begin{vmatrix} 1 + u' + d \cdot n'_x \\ y' + v' + d \cdot n'_y \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

La déformation vaut

$$\begin{aligned}\varepsilon_P &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dP'}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dP}{ds} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2[(1+dn'_{x_0})^2 + (y' + dn'_{y_0})^2]} \left[ (1 + u' + dn'_x)^2 + (y' + v' + dn'_y)^2 - (1 + dn'_{x_0})^2 - (y' + dn'_{y_0})^2 \right]\end{aligned}\quad (\text{B.74})$$

soit

$$\varepsilon_P = \frac{1}{(1 + dn'_{x_0})^2 + (y' + dn'_{y_0})^2} \left( \begin{array}{cc} u' & y'v' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + d[(1 + u')n'_x + v'n'_y - n'_{x_0} - y'n'_{y_0}] \\ & + \frac{d^2}{2}[n'^2_x + n'^2_y - n'^2_{x_0} - n'^2_{y_0}] \end{array} \right) \quad (\text{B.75})$$

### B.3.2 Calcul à partir du tenseur des déformations

#### Déformation de l'axe neutre

Le vecteur déplacement  $\overrightarrow{MM'}$  est défini par :

$$\overrightarrow{MM'} = \begin{vmatrix} u \\ v \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{B.76})$$

L'application de l'expression (B.47) donne pour la déformation de l'axe neutre d'une poutre courbe :

$$\varepsilon_M = \frac{1}{1+y'^2} \begin{vmatrix} 1 \\ y' \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ y' \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{B.77})$$

soit

$$\begin{aligned}\varepsilon_M &= \frac{1}{1+y'^2} [\varepsilon_{xx} + y'(\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx})] \\ &= \frac{1}{1+y'^2} (\varepsilon_{xx} + 2y'\varepsilon_{xy})\end{aligned}\quad (\text{B.78})$$

avec

$$\varepsilon_{xx} = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} \quad (\text{B.79})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{v'}{2} \quad (\text{B.80})$$

Finalement, la déformation de l'axe neutre est

$$\varepsilon_M = \frac{1}{1 + y'^2} \left( u' + y'v' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} \right) \quad (\text{B.81})$$

### Déformation d'une ligne de la poutre

Le vecteur déplacement  $\overrightarrow{PP'}$  est défini par :

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} u + d(n_x - n_{x_0}) \\ v + d(n_y - n_{y_0}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.82})$$

L'application de l'expression (B.47) donne pour la déformation au point  $P$  :

$$\varepsilon_P = \frac{1}{(1+d \cdot n'_{x_0})^2 + (y' + d \cdot n'_{y_0})^2} \begin{pmatrix} 1 + d \cdot n'_{x_0} \\ y' + d \cdot n'_{y_0} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + d \cdot n'_{x_0} \\ y' + d \cdot n'_{y_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.83})$$

soit

$$\varepsilon_P = \frac{1}{(1 + d \cdot n'_{x_0})^2 + (y' + d \cdot n'_{y_0})^2} [(1 + d \cdot n'_{x_0})^2 \varepsilon_{xx} + 2(1 + d \cdot n'_{x_0})(y' + d \cdot n'_{y_0}) \varepsilon_{xy}] \quad (\text{B.84})$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial[u+d(n_x-n_{x_0})]}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial[u+d(n_x-n_{x_0})]}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial[v+d(n_y-n_{y_0})]}{\partial x} \right)^2 \\ &= u' + d(n'_x - n'_{x_0}) + \frac{1}{2}[u' + d(n'_x - n'_{x_0})]^2 + \frac{1}{2}[v' + d(n'_y - n'_{y_0})]^2 \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{\partial[v+d(n_y-n_{y_0})]}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2}[v' + d(n'_y - n'_{y_0})] \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

Finalement après calcul, la déformation d'une ligne de la poutre est

$$\varepsilon_P = \frac{1}{(1 + d n'_{x_0})^2 + (y' + d n'_{y_0})^2} \left( \begin{aligned} &u' + y'v' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + d[(1 + u')n'_x + v'n'_y - n'_{x_0} - y'n'_{y_0}] \\ &+ \frac{d^2}{2}[n'^2_x + n'^2_y - n'^2_{x_0} - n'^2_{y_0}] \end{aligned} \right) \quad (\text{B.86})$$

### B.3.3 Déformation d'un fil

#### Déformation de l'axe neutre

Le vecteur déplacement  $\overrightarrow{MM'}$  est défini en (B.76), le vecteur tangent à l'axe neutre en (B.60) et la variation d'abscisse curviligne en (B.61). Nous avons alors

$$\begin{aligned} \varepsilon_M &= \vec{t} \cdot \frac{d\vec{\xi}}{ds} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\vec{\xi}}{ds} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.87})$$

soit

$$\varepsilon_M = \frac{1}{1 + y'^2} \left( u' + y'v' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} \right) \quad (\text{B.88})$$

### Déformation d'une ligne de la poutre

Le vecteur déplacement  $\overrightarrow{PP'}$  est défini en (B.82), le vecteur tangent à l'ELB-CA en (B.60) et la variation d'abscisse curviligne en (B.61). Il vient alors

$$\begin{aligned} \varepsilon_P &= \vec{t} \cdot \frac{d\vec{\xi}}{ds} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\vec{\xi}}{ds} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+dn'_{x_0})^2 + (y' + dn'_{y_0})^2}} \begin{vmatrix} 1 + dn'_{x_0} \\ y' + dn'_{y_0} \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} u + d(n_x - n_{x_0}) \\ v + d(n_y - n_{y_0}) \\ 0 \end{vmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{(1+dn'_{x_0})^2 + (y' + dn'_{y_0})^2}} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} u + d(n_x - n_{x_0}) \\ v + d(n_y - n_{y_0}) \\ 0 \end{vmatrix} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.89})$$

soit après calcul

$$\varepsilon_P = \frac{1}{(1 + dn'_{x_0})^2 + (y' + dn'_{y_0})^2} \left( \begin{array}{l} u' + y'v' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + d[(1 + u')n'_x + v'n'_y - n'_{x_0} - y'n'_{y_0}] \\ + \frac{d^2}{2}[n'^2_x + n'^2_y - n'^2_{x_0} - n'^2_{y_0}] \end{array} \right) \quad (\text{B.90})$$

Sur ce dernier cas de calcul plus fastidieux, il apparaît que la méthode du « $ds$ » permet de parvenir au résultat beaucoup plus rapidement et simplement que les deux autres méthodes. Au travers des différents cas, on s'aperçoit que la variation d'abscisse curviligne  $ds$  nécessaire au calcul de la mesure réalisée par l'ELB-CA se calcule simplement, à partir de la norme du vecteur tangent à la fibre où le capteur est situé. Cependant, cette mesure seule ne suffit pas pour déterminer complètement la mesure de l'ELB-CA. Il faut en effet calculer la déformation pour prendre en compte l'effet photoélastique (variation de l'indice de réfraction avec la déformation subie par le capteur).



## Annexe C

### Autres applications des ELB

Dans cette annexe, nous nous sommes intéressés à des cas particuliers de la mesure réalisée par un ELB-CA. Dans le premier paragraphe, nous allons étudier la mesure d'un ELB-CA ayant une forme particulière et ensuite nous regarderons les résultats obtenus lorsque celui-ci est tendu entre deux points. Ces utilisations d'un ELB-CA permettent d'envisager des perspectives intéressantes notamment pour le contrôle actif des structures et l'instrumentation des ouvrages.

#### C.1 Capteur modal

La figure C.1 illustre la configuration de l'étude, à savoir une poutre droite sur laquelle est instrumenté un ELB-CA possédant une forme quelconque à l'origine ( $y$  devient alors une variable qui dépend de l'abscisse  $x$  de la poutre).

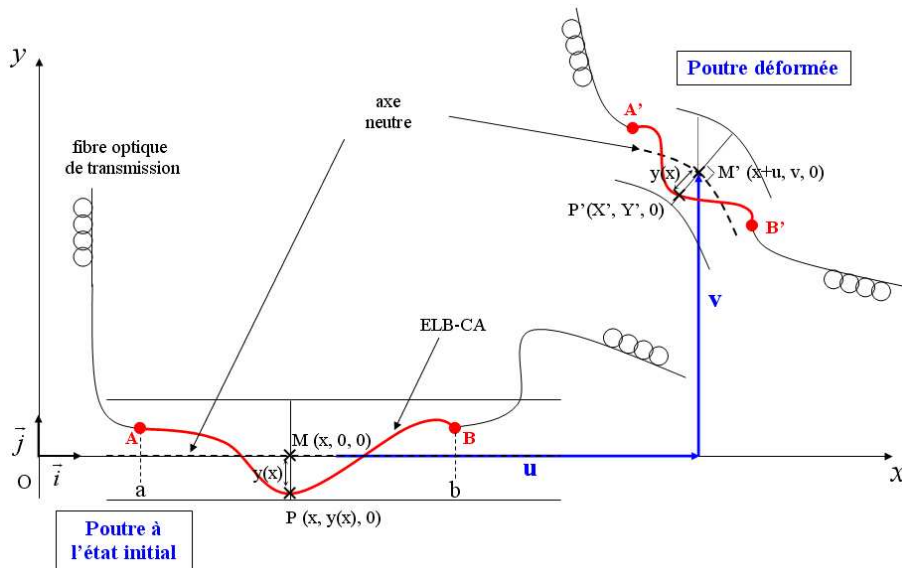


FIGURE C.1: Déformation d'une section droite transverse d'une poutre droite avec l'ELB-CA possédant une forme quelconque à l'état initial.

D'après les calculs réalisés en annexe B en B.2, la mesure de déformation pour un ELB-CA, fixé sur une poutre droite de type Euler-Bernoulli en flexion et auquel une forme particulière aurait été

imposée à l'état initial, est

$$\varepsilon_P = \frac{1}{1+y'^2} \left( \begin{array}{l} u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y[(1+u')n'_x + v'n'_y] + y'[(1+u')n_x + v'n_y] \\ + yy'[n_x n'_x + n_y n'_y] + \frac{y'^2}{2}[n_x^2 + n_y^2 - 1] + \frac{y^2}{2}[n'^2_x + n'^2_y] \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } n_x &= \frac{-v'}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \\ n_y &= \frac{1+u'}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \\ n'_x &= \frac{(1+u')[u''v' - v''(1+u')]}{[(1+u')^2 + v'^2]^{3/2}} \\ n'_y &= \frac{v'[v''(1+u') - v'u'']}{[(1+u')^2 + v'^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

Il vient alors :  $(1+u')n_x + v'n_y = n'_x n_x + n'_y n_y = n_x^2 + n_y^2 - 1 = 0$  et

$$\begin{aligned} (1+u')n'_x + v'n'_y &= \frac{u''v' - (1+u')v''}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \\ n'^2_x + n'^2_y &= \frac{[u''v' - (1+u')v'']^2}{[(1+u')^2 + v'^2]^2} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

La mesure physique obtenue à partir de l'ELB-CA est donc

$$D_{AB}(t) = \int_a^b \sqrt{(1+u')^2 + v'^2 + y'^2 + 2y \frac{u''v' - (1+u')v''}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} + y^2 \frac{[u''v' - (1+u')v'']^2}{[(1+u')^2 + v'^2]^2}} dx \quad (\text{C.2})$$

L'expression obtenue est presque identique à celle définie en (3.71) au Chapitre 3. Il n'y qu'un terme supplémentaire,  $y'^2$ , et la dépendance de  $y$  vis-à-vis de  $x$  l'abscisse de la poutre.

Si l'hypothèse des petites déformations (développement limité de la racine carré) et des petites rotations ( $u' \ll 1$  et  $v' \ll 1$ ) est appliquée (cas linéaire) alors l'expression (C.2) donne :

$$\Delta D_{AB}(t) \approx - \int_a^b y(x) v'' dx \quad (\text{C.3})$$

avec  $\Delta D_{AB}(t) = D_{AB}(t) - D_{AB}(0)$  et  $D_{AB}(0) = \int_a^b (1 + y'^2/2) dx$ .

On s'intéresse au domaine de la dynamique. L'expression (C.3) étant déterminée pour le cas linéaire, nous pouvons également appliquer la décomposition modale classique pour le déplacement transverse. Il vient alors pour la courbure  $v''(x, t)$

$$v''(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \phi''_k(x) \quad (\text{C.4})$$

et pour l'ELB-CA

$$\Delta D_{AB}(t) \approx - \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \left( \int_a^b y(x) \phi''_k(x) dx \right) \quad (\text{C.5})$$

En donnant une forme appropriée à l'ELB-CA, notamment en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes, il est possible de réaliser un capteur modal, c'est-à-dire un capteur qui ne sera

sensible qu'à un seul mode de la poutre. Pour cela, il faut que le CFO recouvre la totalité de la poutre de longueur  $L$  et que la forme choisie soit proportionnelle à la courbure modale du mode que l'on souhaite observer :

$$y(x) = \alpha \phi_i''(x) \quad (C.6)$$

où  $\alpha$  est une constante multiplicative.

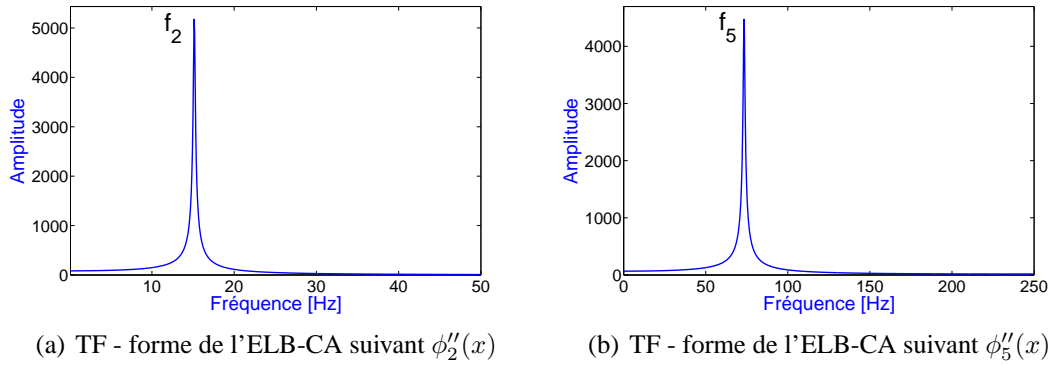
La mesure déterminée par le capteur est alors

$$\Delta D_{AB}(t) \approx -\alpha \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \left( \int_0^L \phi_i''(x) \phi_k''(x) dx \right) \quad (C.7)$$

soit, d'après les propriétés d'orthogonalité des modes,

$$\Delta D_{AB}(t) \approx -\alpha \cdot b_i(t) \int_0^L \phi_i''^2(x) dx \quad (C.8)$$

La figure C.2 présente les résultats numériques obtenus pour des ELB-CA placés entre les deux extrémités d'une poutre E-E ( $x=[0 L]$ ) et qui auraient une forme proportionnelle aux deuxième et cinquième courbures modales de la poutre.



**FIGURE C.2: Filtrage des modes de la poutre E-E avec un CFO modal.**

Un système mécanique donné est dépendant de son environnement au moment de son fonctionnement. Cet environnement est caractérisé par l'ensemble des sources d'excitations, les liaisons et les effets indésirables tels que les bruits et les vibrations que produit la structure. Un tel système évolue selon des lois naturelles positives et globales. Le contrôle actif a pour objectif d'agir sur ces lois et permet de conférer au système un comportement avec de meilleures performances dynamiques. Pour ce faire on intègre à la structure de base un jeu de capteurs pour mesurer son état vibratoire et un jeu d'actionneurs pour appliquer une commande générée par un contrôleur afin d'amener la structure à un état fixé auparavant. Un problème fondamental se pose lors du contrôle actif de structures légères et flexibles, abondamment utilisés en construction aéronautique : c'est le phénomène de la contamination modale ou effet de Spillover qui se manifeste sous forme d'instabilités.

L'utilisation des ELB-CA comme capteurs modaux serait donc très utile pour le contrôle des structures afin de réduire l'effet de Spillover. Il faudra tout de même faire attention au fait que ce sont les déformées modales  $\phi_k(x)$  qui sont généralement utilisés dans les algorithmes de contrôle et non  $\Phi_k(x) = \int_a^b \phi_k''(x) dx$  déterminés par les ELB-CA.

Cette application paraît cependant difficile à mettre en oeuvre expérimentalement, notamment pour fixer correctement le capteur à la structure suivant la forme des courbures modales de celle-ci. Des investigations supplémentaires seraient à mener pour étudier les influences du collage et d'une modification de la forme du mode sur la qualité du filtrage.

## C.2 ELB tendu entre deux points

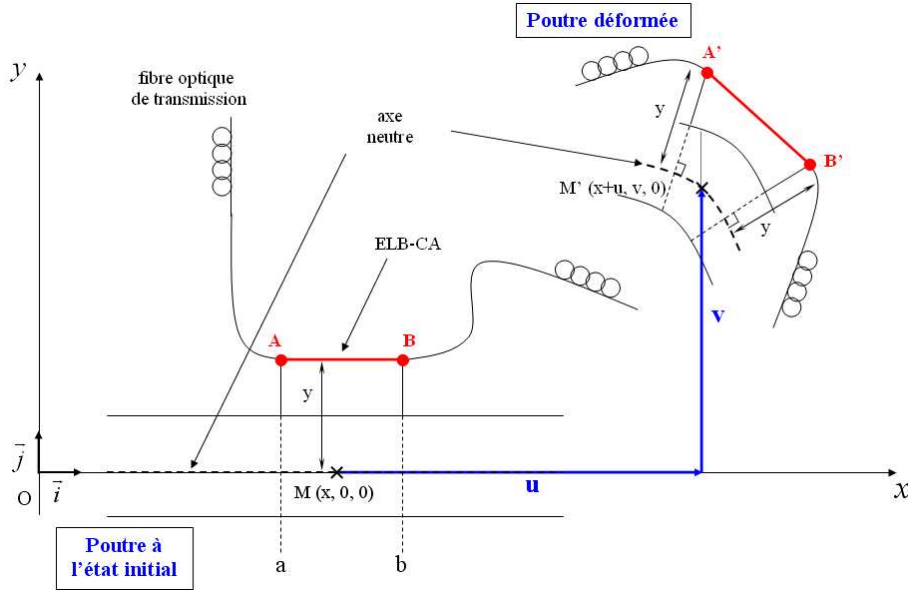


FIGURE C.3: Déformation d'une section droite transverse de la poutre avec un ELB tendu.

La configuration de la poutre est celle présentée sur la figure C.3. On s'intéresse aux vibrations de flexion transverse d'une poutre droite dans le plan  $(O, x, y)$  avec les hypothèses cinématiques d'Euler-Bernoulli : une section droite de la poutre reste plane et perpendiculaire à l'axe neutre.

Le champ de déplacement de l'axe neutre est défini dans le repère galiléen  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  par :

$$\overrightarrow{OM}(x, 0, 0) \rightarrow \overrightarrow{OM}'(x + u(x, t), v(x, t), 0) \quad (C.9)$$

où  $u$  et  $v$  sont respectivement les déplacements axial et transverse de la poutre.

Nous allons calculer le déplacement des points  $A$  et  $B$  où sont insérés les miroirs semi-réfléchissants constituant l'ELB. Les points  $A$  et  $B$ , situés à une distance  $y$  de l'axe neutre supposée constante, se déplaceront respectivement en  $A'$  et  $B'$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA}(a, y, 0) &\rightarrow \overrightarrow{OA}'(X'_a, Y'_a, 0) \\ \overrightarrow{OB}(b, y, 0) &\rightarrow \overrightarrow{OB}'(X'_b, Y'_b, 0) \end{aligned} \quad (C.10)$$

avec

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA}'(a, t) &= \overrightarrow{OM}(a, t) + \overrightarrow{MM}'(a, t) + \overrightarrow{M'A}'(a, t) \\ &= \begin{pmatrix} X'_a \\ Y'_a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + u(a, t) + y \cdot n_x(a, t) \\ v(a, t) + y \cdot n_y(a, t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (C.11)$$

et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB'}(a, t) &= \overrightarrow{OM}(b, t) + \overrightarrow{MM'}(b, t) + \overrightarrow{M'B'}(b, t) \\ &= \begin{pmatrix} X'_b \\ Y'_b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + u(b, t) + y \cdot n_x(b, t) \\ v(b, t) + y \cdot n_y(b, t) \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (C.12)$$

où  $n_x$  et  $n_y$  sont respectivement les composantes axiale et transverse du vecteur normal à l'axe neutre  $\vec{n}$  défini par :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{k} \wedge \vec{t}|} \vec{k} \wedge \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \begin{pmatrix} -v' \\ 1+u' \\ 0 \end{pmatrix}\quad (C.13)$$

avec  $\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \begin{pmatrix} 1+u' \\ v' \\ 0 \end{pmatrix}$ , le vecteur tangent à l'axe neutre.

Pour des soucis de clarté dans les expressions, nous avons omis la variable temporelle  $t$ . Elle ne sera plus mentionnée et nous aurons alors  $u(a, t) = u_a$ ,  $v(a, t) = v_a$ ,  $\frac{du}{dx}(x, t) = u'_a$  et  $\frac{dv}{dx}(x, t) = v'_a$ , il en sera de même pour le point  $B$ .

Nous nous intéressons à la mesure de la distance euclidienne entre  $A'$  et  $B'$  qui sera tout simplement la norme du vecteur  $\overrightarrow{A'B'}$  au cours du temps :

$$D_{AB}(t) = \|\overrightarrow{A'B'}(t)\| \quad (C.14)$$

Ce qui donne, à partir des vecteurs  $OA'$  et  $OB'$ ,

$$\overrightarrow{A'B'}(t) = \begin{pmatrix} b - a + u_b - u_a + y(n_{x_b} - n_{x_a}) \\ v_b - v_a + y(n_{y_b} - n_{y_a}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (C.15)$$

d'où

$$\begin{aligned}D_{AB}(t) &= \sqrt{[b - a + u_b - u_a + y(n_{x_b} - n_{x_a})]^2 + [v_b - v_a + y(n_{y_b} - n_{y_a})]^2} \\ &= \sqrt{(b - a)^2 + (u_b - u_a)^2 + (v_b - v_a)^2 + y^2[(n_{x_b} - n_{x_a})^2 + (n_{y_b} - n_{y_a})^2] + 2(v_b - v_a) \\ &\quad + 2(b - a)(u_b - u_a) + 2y[(n_{x_b} - n_{x_a})(b - a + u_b - u_a) + (n_{y_b} - n_{y_a})(v_b - v_a)]}\end{aligned}\quad (C.16)$$

Posons  $b - a = D_{AB}(0) = D_{AB_0}$  la longueur de l'ELB à l'instant initial, alors

$$D_{AB}(t) = D_{AB_0} \sqrt{1 + \frac{1}{D_{AB_0}^2} [(u_b - u_a)^2 + (v_b - v_a)^2 + y^2[(n_{x_b} - n_{x_a})^2 + (n_{y_b} - n_{y_a})^2] + 2(v_b - v_a) + 2D_{AB_0}(u_b - u_a) + 2y[(n_{x_b} - n_{x_a})(D_{AB_0} + u_b - u_a) + (n_{y_b} - n_{y_a})(v_b - v_a)]]}\quad (C.17)$$

En supposant que la variation de longueur de l'ELB est petite devant l'unité, il est alors possible d'effectuer un développement limité :

$$\begin{aligned}\Delta D_{AB}(t) &\simeq \frac{1}{2D_{AB_0}} [(u_b - u_a)^2 + (v_b - v_a)^2 + y^2[(n_{x_b} - n_{x_a})^2 + (n_{y_b} - n_{y_a})^2] + 2(v_b - v_a) \\ &\quad + 2D_{AB_0}(u_b - u_a) + 2y[(n_{x_b} - n_{x_a})(D_{AB_0} + u_b - u_a) + (n_{y_b} - n_{y_a})(v_b - v_a)]]\end{aligned}\quad (C.18)$$

où  $\Delta D_{AB}(t) = D_{AB}(t) - D_{AB}(0)$

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned} \sqrt{(1+u'_a)^2 + v'^2_a} &\simeq 1 \\ \sqrt{(1+u'_b)^2 + v'^2_b} &\simeq 1 \end{aligned} \quad (C.19)$$

alors

$$\begin{aligned} n_{xa} &\simeq -v'_a \\ n_{ya} &\simeq 1 + u'_a \\ n_{xb} &\simeq -v'_b \\ n_{yb} &\simeq 1 + u'_b \end{aligned} \quad (C.20)$$

Finalement, la mesure euclidienne entre les deux points  $A$  et  $B$  s'écrit

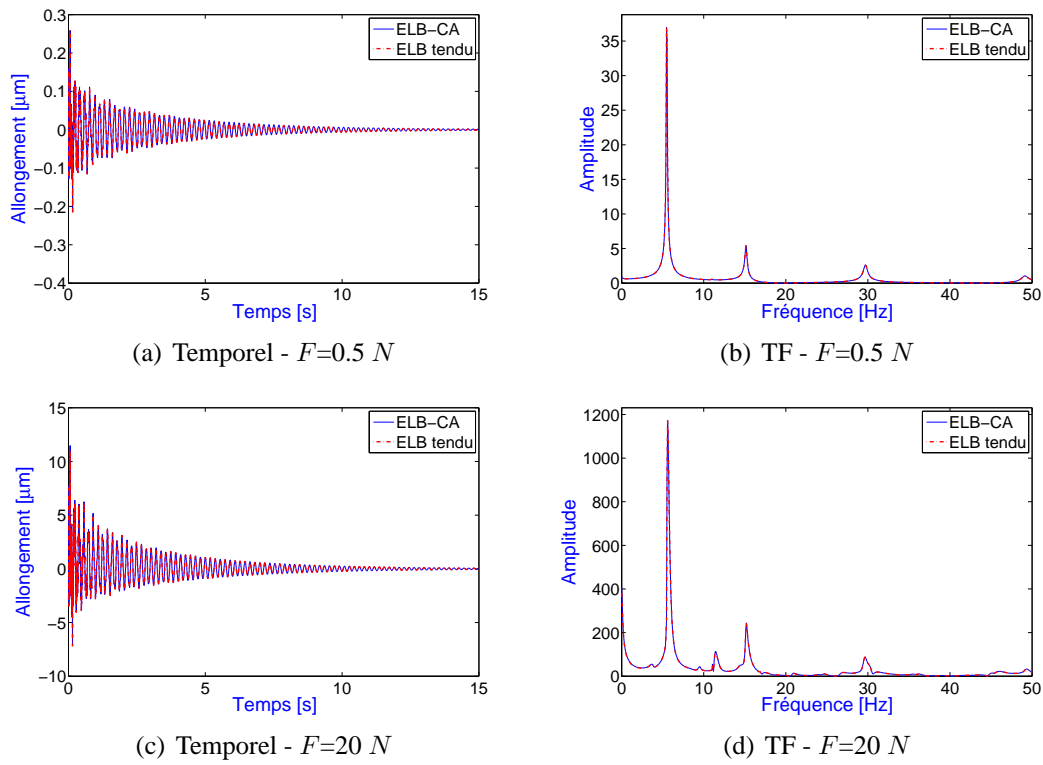
$$\begin{aligned} \Delta D_{AB}(t) &\simeq \frac{1}{2D_{AB0}} [(u_b - u_a)(u_b - u_a + 2D_{AB0}) + (v_b - v_a)(v_b - v_a + 2) \\ &\quad + y(v'_b - v'_a)[d(v'_b - v'_a) + 2(D_{AB0} + u_b - u_a)] + y(u'_b - u'_a)[y(u'_b - u'_a) + 2(v_b - v_a)]] \end{aligned} \quad (C.21)$$

Cette expression est comparée à celle obtenue pour l'ELB-CA en (3.72) au Chapitre 3 :

$$\Delta D_{AB}(t) = \int_a^b \left[ u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + y \frac{u''v' - (1+u')v''}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} + \frac{y^2 [u''v' - (1+u')v'']^2}{2 [(1+u')^2 + v'^2]^2} \right] dx$$

La figure C.4 présente la comparaison des signaux temporels numériques et de leurs TF obtenus, à partir de l'expression d'un ELB tendu définie en (C.21) et de l'expression de l'ELB-CA précédente, pour une poutre mince E-E soumise à différents impacts : 0.5  $N$  (linéaire) et 20  $N$  (non-linéaire).

Au vu des graphes de la figure C.4, il apparaît que les résultats obtenus à partir des deux expressions coïncident parfaitement aussi bien en linéaire (choc faible) qu'en non-linéaire (choc plus important). Ceci tendrait à prouver que le type d'accroche n'a pas d'influence sur la mesure et que seuls les points d'emplacements des miroirs semi-réfléchissants, délimitant la base de mesure du capteur, sont importants. Ce point serait très intéressant à développer car, d'un point de vue pratique, tendre un ELB de plusieurs mètres est plus simple à réaliser que de le coller continûment. Une étude plus précise serait alors à mener sur l'influence de la tension et sur le couplage possible entre l'ELB tendu (assimilable à une corde) et la structure étudiée. Par ailleurs, la mesure réalisée étant alors la distance euclidienne entre deux points, d'autres types de mesure optique permettant de déterminer cette distance peuvent également être envisagés (mesure en espace libre notamment).



**FIGURE C.4:** Signal temporel et TF obtenus à partir d'un ELB tendu et d'un ELB-CA pour une poutre E-E soumise à différents impacts :  $0.5\text{ N}$  (linéaire) et  $20\text{ N}$  (non-linéaire).





# Annexe D

## Transformées en Ondelettes Continues

Dans cette annexe, nous présentons la méthode d'analyse modale en output-only utilisant la Transformation en Ondelettes Continues (TOC) présentée dans [1]. Elle permet d'effectuer l'analyse dans le plan temps-fréquence de réponses linéaires ou non-linéaires de signaux de mesure, qui peuvent être des déplacements, des vitesses ou des accélérations.

### D.1 Application aux signaux modulés en fréquence

#### D.1.1 Base théorique

Soit une fonction  $\psi(t)$  bien localisée en temps et en fréquence.  $\psi(\cdot)$  est la fonction analysante de carré intégrable et continue par morceaux, appelée ondelette «mère». On lui associe une famille d'ondelettes  $\psi_{(b,a)}(t)$  engendrée par des dilatations et translations de  $\psi(t)$  :

$$\psi_{(b,a)}(t) = \frac{1}{a} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) \quad (\text{D.1})$$

où  $a$  et  $b$  sont des paramètres relatifs respectivement à l'échelle (inverse de fréquence) et au temps.

Les ondelettes sont donc de forme constante mais de taille variable proportionnelle au paramètre de dilatation  $a$ . Soit le signal  $u(t)$  d'énergie finie et continu par morceaux, la transformation en ondelettes de ce signal est donné par le produit de convolution

$$T_\psi[u](b, a) = \langle u, \psi_{(b,a)}(t) \rangle = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{\psi} \left( \frac{t-b}{a} \right) dt \quad (\text{D.2})$$

Si le théorème de Parseval est appliqué à cette équation, l'expression de la transformation en ondelettes du signal  $u(t)$  dans le domaine fréquentiel est alors

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)} e^{i\omega b} d\omega \quad (\text{D.3})$$

La fonction  $\psi(t)$  est une ondelette «mère» admissible si le coefficient  $C_\psi$  défini par

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{a} \quad (\text{D.4})$$

est fini, non nul et indépendant de  $\omega$  réel. Cette condition implique que  $\hat{\psi}(\omega)$  définie par  $\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt$  est égale à zéro à l'origine. Cela signifie que  $\psi(t)$  doit nécessairement posséder certaines oscillations.

Une fois cette condition d'admissibilité vérifiée, le signal  $u(t)$  peut être reconstruit par

$$u(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} T_\psi[u](b, a) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da}{a} db \quad (D.5)$$

La résolution locale de la TOC en temps et en fréquence autour du point du plan temps-fréquence défini par

$$\begin{cases} t &= b + at_\psi \\ \omega &= \frac{\omega_\psi}{a} \end{cases} \quad (D.6)$$

dépend du paramètre de dilatation  $a$  et est déterminée, respectivement par la durée  $\Delta t_\psi$  et la largeur de bande  $\Delta\omega_\psi$  de l'ondelette mère :

$$\begin{cases} \Delta t &= a\Delta t_\psi \\ \Delta\omega &= \frac{\Delta\omega_\psi}{a} \end{cases} \quad (D.7)$$

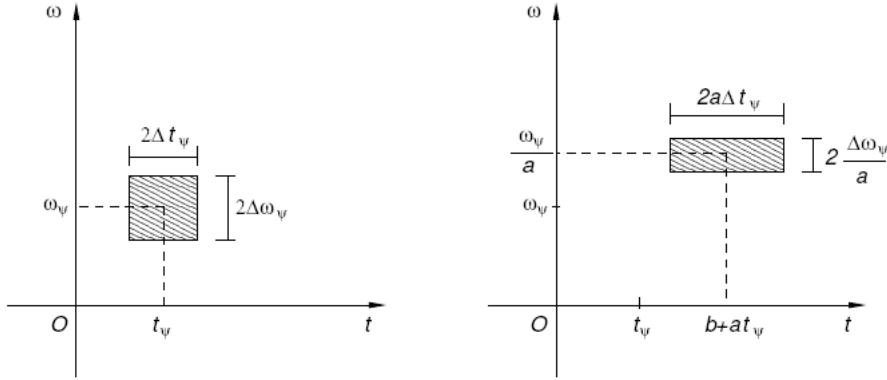


FIGURE D.1: Localisation dans le plan temps-fréquence de : l'ondelette mère (à gauche) et la transformée en ondelettes (à droite), d'après [2].

L'incertitude est donc

$$\mu_{\psi(b,a)} = \Delta t \Delta\omega = \Delta t_\psi \Delta\omega_\psi = \mu_\psi \quad (D.8)$$

( $\mu_\psi \geq \frac{1}{2}$  d'après le principe d'incertitude d'Heisenberg)

Ainsi, le domaine de localisation de la transformée en ondelettes sur le plan temps-fréquence au point  $(b + at_\psi, \omega = \frac{\omega_\psi}{a})$  (Fig. D.1) sera

$$[b + at_\psi - a\Delta t_\psi, b + at_\psi + a\Delta t_\psi] \times \left[ \frac{\omega_\psi}{a} - \frac{\Delta\omega_\psi}{a}, \frac{\omega_\psi}{a} + \frac{\Delta\omega_\psi}{a} \right] \quad (D.9)$$

En se référant à l'analyse fréquentielle, l'analyse en ondelettes peut être comparée à un filtre avec un facteur de qualité  $Q$ , défini comme le rapport entre le centre de fréquence et la bande de fréquence

$$Q = \frac{\omega_\psi/a}{2(\Delta\omega_\psi/a)} = \frac{\omega_\psi}{2\Delta\omega_\psi} \quad (D.10)$$

Les réponses libres enregistrées sont soit des déplacements, soit des vitesses, soit des accélérations. Ces signaux de mesure sont amortis et bornés. Il est alors utile de déterminer la relation entre leurs transformées en ondelettes. Si  $\psi(t)$  et  $u(t)$  sont continues et différentiables par morceaux, l'intégrale par partie de la définition de la transformation en ondelettes (D.2) nous donne

$$T_\psi[\dot{u}](b, a) = \frac{1}{a} \left[ u(t) \bar{\psi} \left( \frac{t-b}{a} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \dot{\bar{\psi}} \left( \frac{t-b}{a} \right) dt \right] \quad (\text{D.11})$$

De plus, si  $\dot{\psi} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  et  $\dot{u} \in L^2(\mathbb{R})$ , la transformation en ondelettes de  $\dot{u}(t)$  avec l'ondelette mère  $\psi$  est reliée à la transformation en ondelettes de  $u(t)$  avec  $\dot{\psi}$  par

$$T_\psi[\dot{u}](b, a) = -\frac{1}{a} T_{\dot{\psi}}[u](b, a) \quad (\text{D.12})$$

Cette relation peut facilement être étendue aux signaux d'énergie finie  $\ddot{u}$  quand  $\ddot{\psi} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

$$T_\psi[\ddot{u}](b, a) = -\frac{1}{a} T_{\dot{\psi}}[\dot{u}](b, a) = \frac{1}{a^2} T_{\ddot{\psi}}[u](b, a) \quad (\text{D.13})$$

Cela signifie que les transformées en ondelettes de déplacement, de vitesse, d'accélération sont reliées au moyen des ondelettes mères et de leurs dérivées au premier et au second ordre.

### D.1.2 TOC de signaux modulés en fréquence et caractérisation d'arêtes

Un signal réel  $u(t)$  d'énergie finie peut toujours être associé à un signal analytique  $Z_u(t)$  en utilisant la transformée de Hilbert

$$Z_u(t) = [I + iH]u(t) \quad (\text{D.14})$$

où  $I$  et  $H$  sont respectivement l'identité et l'opérateur de transformation de Hilbert.

Dans le domaine fréquentiel, cela donne

$$\begin{aligned} \hat{Z}_u(\omega) &= 2\Theta(\omega)\hat{u}(\omega) \\ u(t) &= \text{Re}[Z_u(t)] \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

où  $\Theta$  est la fonction de Heaviside.

On définit le couple canonique  $(A_u(t), \phi_u(t))$  du signal  $u(t)$  avec  $A_u(t) = |Z_u(t)|$  ( $A_u(t) \geq 0$ ) le module et  $\phi_u(t) = \arg(Z_u(t))$  ( $\phi_u(t) \in [0, 2\pi]$ ) la phase et on a, par conséquent,  $u(t) = A_u(t)\cos(\phi_u(t))$ . La pulsation instantanée  $\omega_u(t)$  est alors donnée par

$$\omega_u(t) = \frac{d\phi_u(t)}{dt} = \dot{\phi}_u(t) \quad (\text{D.16})$$

Cette représentation canonique s'est avérée utile dans beaucoup d'applications. Cependant, lorsque des signaux étudiés ont plusieurs composantes, un filtre passe-bande est nécessaire pour séparer chaque composante. Quand le signal  $u(t)$  est donné sous la forme d'une unique composante

$$u(t) = A(t)\cos(\phi(t)) \quad (\text{D.17})$$

Son signal analytique  $Z_u(t)$  n'est en général pas très différent du signal complexe associé  $A(t)e^{i\phi(t)}$  (asymptoticité).  $Z_u(t)$  peut donc être approximé par  $A(t)e^{i\phi(t)}$  :

$$Z_u(t) \approx A(t)e^{i\phi(t)} \quad (\text{D.18})$$

et  $u(t)$  est maintenant appelé signal asymptotique s'il oscille suffisamment.

Quand l'ondelette mère admissible  $\psi(t)$  est progressive (i.e sa transformée de fourier  $\hat{\psi}(\omega)$  est nulle pour  $\omega \leq 0$ ), la TOC d'un signal  $u$  à valeurs réelles est liée à la transformée en ondelettes de son signal analytique  $Z_u(t)$

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{2} T_\psi[Z_u](b, a) \quad (\text{D.19})$$

La caractéristique principale de la TOC appliquée aux signaux asymptotiques est qu'elle est concentrée le long de courbes du plan temps-fréquence appelées arêtes. La restriction de la transformée en ondelettes à chaque arête, appelée squelette de la transformée, contient un maximum d'information : elle est très proche de la composante même du signal. Une définition de l'arête et une approximation du squelette sont donnés par [3]

$$a_r(b) = \frac{K}{\dot{\phi}_u(b)} \quad (\text{D.20})$$

$$T_\psi[u](b, a) \approx \text{Corr}(b) Z_u(b) \quad (\text{D.21})$$

où  $K$  est une constante dépendant de l'ondelette mère et  $\text{Corr}(b)$  une fonction de correction entièrement caractérisée par l'ondelette mère et par l'arête  $a_r(b)$ .

Une fois que l'arête est déterminée, le signal analytique  $Z_u(t)$  peut être déduit. Ses parties réelle et imaginaire donnent respectivement le signal et sa transformée de Hilbert. L'extraction d'arête est obtenue à l'aide de méthodes non-paramétriques, pour lesquelles plusieurs algorithmes sont disponibles dans [4][5][6]

## D.2 Identification modale des systèmes mécaniques linéaires

### D.2.1 Réponses libres des systèmes amortis à plusieurs degrés de liberté

Considérons un système mécanique à plusieurs degrés de liberté (m.d.d.l) avec un amortissement visqueux proportionnel. Les réponses libres au point  $k$  d'un tel système à  $N$  degrés de liberté, en termes de déplacement  $u_k(t)$ , de vitesse  $\dot{u}_k(t)$  et d'accélération  $\ddot{u}_k(t)$ , sont exprimées selon la base modale

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^N u_{kj}(t) = \sum_{j=1}^N \Phi_{kj} \rho_j e^{-\xi_j \omega_j t} \cos(\tilde{\omega}_j t - \varphi_j) \quad (\text{D.22})$$

$$\dot{u}_k(t) = \sum_{j=1}^N \dot{u}_{kj}(t) = - \sum_{j=1}^N \Phi_{kj} \rho_j \omega_j e^{-\xi_j \omega_j t} \cos(\tilde{\omega}_j t - \varphi_j - \delta_j) \quad (\text{D.23})$$

$$\ddot{u}_k(t) = \sum_{j=1}^N \ddot{u}_{kj}(t) = - \sum_{j=1}^N \Phi_{kj} \rho_j \omega_j^2 e^{-\xi_j \omega_j t} \cos(\tilde{\omega}_j t - \varphi_j + \theta_j) \quad (\text{D.24})$$

où  $j$  est l'indice du mode.  $\Phi_{kj}$  est le terme  $(k, j)$  de la matrice modale composée des vecteurs propres  $\Phi_j = [\Phi_{1j}, \Phi_{2j}, \dots, \Phi_{Nj}]^T$ .

Chacun de ces vecteurs peut être normalisé au maximum de déplacement pour lequel  $\Phi_{mj} = 1$ . Pour le mode  $j$ ,  $\tilde{\omega}_j$  et  $\omega_j$  sont respectivement les pulsations propres amorties et non amorties,  $\xi_j$  le taux d'amortissement et  $\rho_j$  est défini par

$$\rho_j = \left\{ \left[ \frac{\dot{Y}_j(0) + \xi_j \omega_j Y_j(0)}{\tilde{\omega}_j} \right]^2 + [Y_j(0)]^2 \right\}^{1/2} \quad (D.25)$$

avec  $Y_j(0)$  le déplacement modal initial et  $\dot{Y}_j(0)$  la vitesse modale initiale du mode  $j$ .

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \arctan \left\{ (c_{j0} + \xi_j) / \sqrt{1 - \xi_j^2} \right\} \\ \delta_j &= \arctan \left\{ \sqrt{1 - \xi_j^2} / \xi_j \right\} \\ \theta_j &= \arctan \left\{ 2\xi_j \sqrt{1 - \xi_j^2} / (1 - 2\xi_j^2) \right\} \end{aligned} \quad (D.26)$$

avec  $c_{j0} = \dot{Y}_j(0) / (\omega_j Y_j(0))$ .

Alors, les relations (D.22), (D.23) et (D.24) peuvent être réécrites sous la forme générale :

$$\sum_{j=1}^N A_{kj}(t) \cos(\alpha_{kj}(t))$$

où

$$\begin{cases} \alpha_{u_{kj}}(t) &= \tilde{\omega}_j t - \varphi_j + \frac{\pi}{2}(1 - \text{sgn}(\Phi_{kj})) \\ A_{u_{kj}}(t) &= |\Phi_{kj}| \rho_j e^{-\xi_j \omega_j t} \quad \text{pour } u_k(t) \end{cases} \quad (D.27)$$

$$\begin{cases} \alpha_{\dot{u}_{kj}}(t) &= \tilde{\omega}_j t - \varphi_j - \delta_j + \frac{\pi}{2}(1 + \text{sgn}(\Phi_{kj})) \\ A_{\dot{u}_{kj}}(t) &= |\Phi_{kj}| \rho_j \omega_j e^{-\xi_j \omega_j t} \quad \text{pour } \dot{u}_k(t) \end{cases} \quad (D.28)$$

$$\begin{cases} \alpha_{\ddot{u}_{kj}}(t) &= \tilde{\omega}_j t - \varphi_j + \theta_j + \frac{\pi}{2}(1 + \text{sgn}(\Phi_{kj})) \\ A_{\ddot{u}_{kj}}(t) &= |\Phi_{kj}| \rho_j \omega_j^2 e^{-\xi_j \omega_j t} \quad \text{pour } \ddot{u}_k(t) \end{cases} \quad (D.29)$$

Si l'on fait l'hypothèse d'un faible amortissement, le signal analytique est alors approché par le signal complexe associé :  $Z_{kj}(t) \approx A_{kj}(t) e^{\alpha_{kj}(t)}$ .

## D.2.2 Relation entre les données mesurées et les paramètres modaux

Les données pour l'identification modale viennent sous forme de fonctions instantanées : l'amplitude  $A_{u_{kj}}(t)$  (ou  $A_{\dot{u}_{kj}}(t)$  ou  $A_{\ddot{u}_{kj}}(t)$ ) et la phase  $\alpha_{u_{kj}}(t)$  (ou  $\alpha_{\dot{u}_{kj}}(t)$  ou  $\alpha_{\ddot{u}_{kj}}(t)$ ) de chaque composante, extraites des transformées en ondelettes des mesures des réponses libres  $u_k(t)$  (ou  $\dot{u}_k(t)$  ou  $\ddot{u}_k(t)$ ) au point  $k$ . Des relations instantanées simples  $R(t)$  entre les données et les paramètres modaux se déduisent des équations (D.27), (D.28) et (D.29). L'estimation des paramètres modaux est alors effectuée à l'aide d'une technique d'identification paramétrique basée sur la minimisation, par

la méthode des moindres carrés, d'un critère d'erreur défini comme la différence entre les fonctions instantanées provenant de la mesure  $R^{mesure}(t)$  et celles obtenues avec le modèle  $R^{modele}(t)$ .

1) Utilisation de la phase : L'évolution temporelle de la phase  $\alpha_{u_{kj}}(t)$  (ou  $\alpha_{\dot{u}_{kj}}(t)$  ou  $\alpha_{\ddot{u}_{kj}}(t)$ ) donnée par l'équation (D.27) (ou (D.28) ou (D.29)) est une droite de pente  $\tilde{\omega}_j$  ; l'estimation de  $\tilde{\omega}_j$  mène alors à un problème de régression linéaire. L'évolution temporelle de l'arête  $a_{r_{u_{kj}}}(t)$  obtenue par l'équation (D.20), donne :

$$\tilde{\omega}_j = \dot{\alpha}_{u_{kj}} = \frac{K}{a_{r_{u_{kj}}}(t)} \quad (D.30)$$

ou

$$\tilde{\omega}_j = \dot{\alpha}_{\dot{u}_{kj}} = \frac{K}{a_{r_{\dot{u}_{kj}}}(t)} \quad (D.31)$$

ou

$$\tilde{\omega}_j = \dot{\alpha}_{\ddot{u}_{kj}} = \frac{K}{a_{r_{\ddot{u}_{kj}}}(t)} \quad (D.32)$$

Deux autres relations basées sur la phase donnent directement le taux d'amortissement

$$\xi_j = |\cos(\delta_j - \pi \operatorname{sgn}(\Phi_{kj}))| = |\cos(\alpha_{u_{kj}}(t) - \alpha_{\dot{u}_{kj}}(t))| \quad (D.33)$$

ou

$$\xi_j = \left| \cos \left( \frac{\theta_j + \pi \operatorname{sgn}(\Phi_{kj})}{2} \right) \right| = \left| \cos \left( \frac{\alpha_{\ddot{u}_{kj}}(t) - \alpha_{u_{kj}}(t)}{2} \right) \right| \quad (D.34)$$

La différence de phase  $d_j^{kl}(t)$  du mode  $j$  entre les points  $k$  et  $l$

$$d_j^{kl}(t) = \alpha_{u_{kj}}(t) - \alpha_{u_{lj}}(t) = -(\alpha_{\dot{u}_{kj}}(t) - \alpha_{\dot{u}_{lj}}(t)) = -(\alpha_{\ddot{u}_{kj}}(t) - \alpha_{\ddot{u}_{lj}}(t)) \quad (D.35)$$

est soit nulle, soit égale à  $\pm\pi$

$$d_j^{kl}(t) = \frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn}(\Phi_{lj}) - \operatorname{sgn}(\Phi_{kj})) \quad (D.36)$$

Par conséquent,  $\Phi_{kj}$  et  $\Phi_{lj}$  sont de mêmes signes si  $d_j^{kl}(t) = 0$  et de signes opposés si  $d_j^{kl}(t) = \pm\pi$ .

2) Utilisation des amplitudes :  $\omega_j$  peut être exprimé par

$$\omega_j = \frac{A_{\dot{u}_{kj}}(t)}{A_{u_{kj}}(t)} \quad \text{ou} \quad \omega_j = \frac{A_{\ddot{u}_{kj}}(t)}{A_{\dot{u}_{kj}}(t)} \quad (D.37)$$

L'évolution temporelle du logarithme de l'amplitude  $\log(A_{u_{kj}}(t))$  (ou  $\log(A_{\dot{u}_{kj}}(t))$  ou  $\log(A_{\ddot{u}_{kj}}(t))$ ) est une droite de pente  $-\xi_j\omega_j$  comme on peut le voir ci-dessous

$$\begin{aligned} \log(A_{u_{kj}}(t)) &= \log(|\Phi_{kj}|\rho_j) - \xi_j\omega_j t \\ \log(A_{\dot{u}_{kj}}(t)) &= \log(|\Phi_{kj}|\rho_j\omega_j) - \xi_j\omega_j t \\ \log(A_{\ddot{u}_{kj}}(t)) &= \log(|\Phi_{kj}|\rho_j\omega_j^2) - \xi_j\omega_j t \end{aligned} \quad (D.38)$$

Là encore, le problème d'identification est un problème de régression linéaire. Le rapport  $A_{u_{kj}}(t)/A_{u_{mj}}(t)$  de l'amplitude de la  $j^{\text{ème}}$  composante de la réponse au point  $k$  sur celle au point  $m$  est une constante temporelle, qui est égale à la valeur absolue de la  $k^{\text{ème}}$  composante du mode  $j$ , d'où

$$\frac{|\Phi_{kj}|}{|\Phi_{mj}|} = |\Phi_{kj}| = \frac{A_{u_{kj}}(t)}{A_{u_{mj}}(t)} \quad (D.39)$$

## D.3 Aspects pratiques de la TOC

### D.3.1 Ondelette mère

L'ondelette mère de Cauchy est l'ondelette mère que nous avons utilisé dans le code de calcul. Les principales caractéristiques de ce type d'ondelette mère sont répertoriées dans le tableau D.1

	Ondelette de Cauchy
$\psi(t)$	$\left(\frac{i}{t+i}\right)^{n+1}$
$\hat{\psi}(\omega)$	$\frac{2\pi\omega^n e^{-\omega}}{n!} \Theta(\omega)$
$C_\psi$	$4\pi^2 \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!}{(n!)^2}$
$t_\psi$	0
$\omega_\psi$	$n + \frac{1}{2}$
$\Delta\omega_\psi$	$\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$
$\Delta t_\psi$	$\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$
$\mu_\psi$	$\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{2n-1}}$
$Q = \frac{\omega_\psi}{2\Delta\omega_\psi}$	$\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{2n+1}}$

TABLEAU D.1: Caractéristiques de l'ondelette mère de Cauchy.

Par ailleurs, avec ce type d'ondelette mère, les dérivées au premier et au second ordre de  $\psi_n$  sont aussi des ondelettes de Cauchy puisque

$$\dot{\psi}_n(t) = i(n+1)\psi_{n+1}(t) \quad (\text{D.40})$$

et

$$\ddot{\psi}_n(t) = -(n+1)(n+2)\psi_{n+2}(t) \quad (\text{D.41})$$

Alors la procédure d'identification avec  $\dot{u}$  et  $\ddot{u}$  peut être simplifiée à l'aide de l'équation (D.13).

La localisation de l'ondelette mère de Cauchy et de sa version dilatée-translatée avec  $a > 1$  (effet de dilatation en temps et de compression en fréquence) et  $a < 1$  (effet de compression en temps et de dilatation en fréquence) sont illustrées sur la figure D.2.

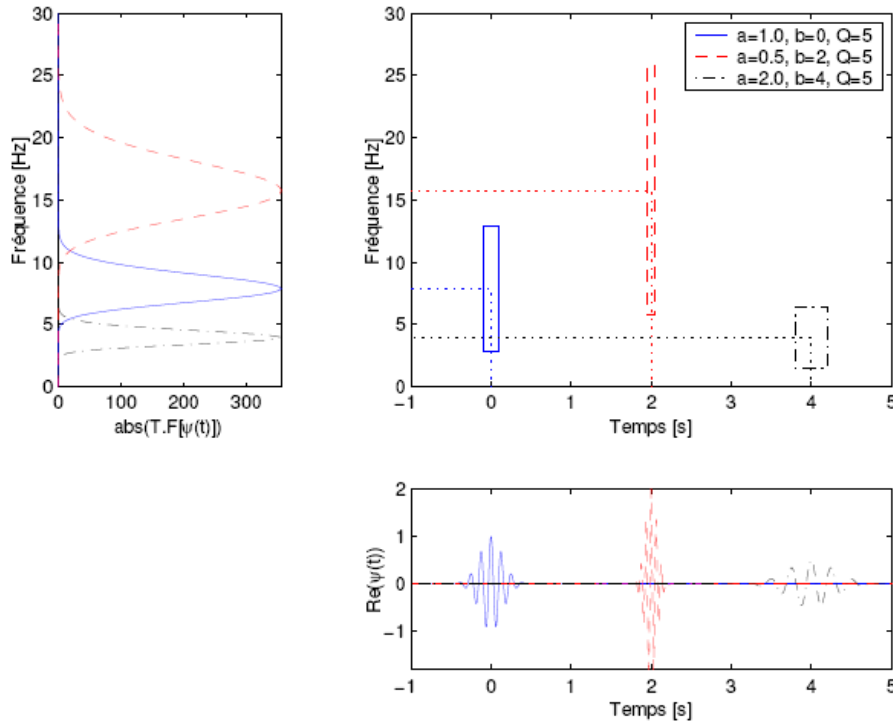


FIGURE D.2: Localisation dans le plan temps-fréquence de l'ondelette mère de Cauchy (trait continu (-)) et de sa version dilatée-translatée avec  $a>1$  (traits pointillés (-.)) et  $a<1$  (traits discontinus (- -)), d'après [2].

### D.3.2 Effet de bords

Le signal mesuré  $u(t)$  est, en général, échantillonné sur une durée finie  $L$ . Chaque point de mesure est espacé d'une valeur  $T$ , la période d'échantillonnage. Le contenu fréquentiel de cette version discrète est limité par la fréquence de Nyquist  $f_{Nyquist} = \frac{1}{2T}$ . Puisque le signal est de durée finie et échantillonné avec une période d'échantillonnage non nulle, il existe une anomalie aux bords appelée : l'effet de bords (Fig. D.3).

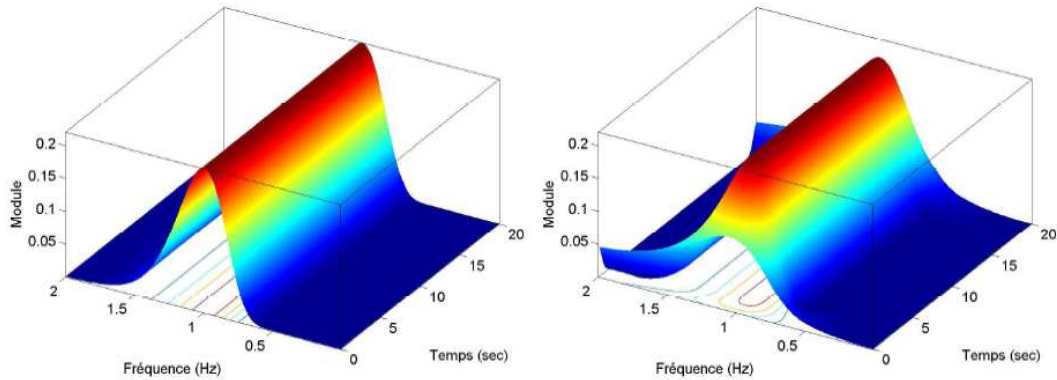


FIGURE D.3: Modules de la TO (avec l'ondelette de Cauchy) d'un signal avec une longueur infinie (à gauche) et finie (à droite), d'après [2].

Il est donc important d'essayer de déterminer un domaine  $D$  sur le plan temps-fréquence  $(t, \omega)$  où l'effet de bords peut être négligeable. On introduit alors deux coefficients réels  $c_t$  et  $c_f$  supérieurs ou



égaux à 1 tel que :  $t \notin I_{c_t} = [t_\psi - c_t \Delta t_\psi, t_\psi + c_t \Delta t_\psi]$  et  $\omega \notin I_{c_f} = [\omega_\psi - c_f \Delta \omega_\psi, \omega_\psi + c_f \Delta \omega_\psi]$ ,  $\psi(t)$  et  $\hat{\psi}(\omega)$  ont de bonnes propriétés de décroissance. Cela signifie que  $\psi(t)$  et  $\hat{\psi}(\omega)$  sont nulles ou très «petites». Le choix de  $c_t$  et  $c_f$  est expliqué en détail dans [1].

On définit ensuite le domaine  $D$  comme un domaine de localisation «étendu» sur le plan temps-fréquence pour la transformation en ondelettes autour du point  $(b_j, \omega_j)$ . C'est la version «étendue» de la formule (D.9). En combinant les coefficients  $c_t$  et  $c_f$  avec la propriété progressive de l'ondelette mère de Cauchy,  $D$  devient :

$$\begin{aligned} & [b_j + \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi - \frac{\omega_\psi}{\omega_j} c_t \Delta t_\psi, \quad b_j + \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi + \frac{\omega_\psi}{\omega_j} c_t \Delta t_\psi] \\ & \times \left[ \max \left( 0, \omega_j \left( 1 - c_f \frac{\Delta \omega_\psi}{\omega_\psi} \right) \right), \quad \omega_j \left( 1 + c_f \frac{\Delta \omega_\psi}{\omega_\psi} \right) \right] \end{aligned} \quad (D.42)$$

Le domaine  $D$  doit être inclus dans  $[0, L] \times [0, 2\pi f_{Nyquist}]$ , on arrive alors au système d'inégalités suivant

$$\begin{cases} \frac{\omega_\psi}{\omega_j} c_t \Delta t_\psi - \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi \leq b_j \leq L - \frac{\omega_\psi}{\omega_j} c_t \Delta t_\psi - \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi \\ 0 < \omega_j \leq \frac{2\pi f_{Nyquist}}{1 + c_f (\Delta \omega_\psi / \omega_\psi)} \end{cases} \quad (D.43)$$

Finalement, en introduisant  $Q$  et  $\mu_\psi$ , en tenant compte que  $t_\psi = 0$ , ce qui est vrai pour les ondelettes de Cauchy, le système (D.43) devient

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_j} c_t 2Q \mu_\psi \leq b_j \leq L - \frac{1}{\omega_j} c_t 2Q \mu_\psi t_\psi - \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi \\ 0 < \omega_j \leq \frac{2\pi f_{Nyquist}}{1 + c_f (1/(2Q))} \end{cases} \quad (D.44)$$

Comme le montrent les inégalités du système (D.44),  $D$  est limité par deux hyperboles définies par :  $\omega = \frac{2}{b} c_t Q \mu_\psi$  et  $\omega = \frac{2}{L-b} c_t Q \mu_\psi$  et deux lignes horizontales dont les équations sont :  $\omega = 0$  et  $\omega = \frac{2\pi f_{Nyquist}}{1 + c_f (1/(2Q))}$ . Puisque les deux coefficients  $c_t$  et  $c_f$  sont supérieurs à 1, en général de l'ordre de 4–5, l'intervalle de temps utile est plus petit que la durée du signal  $L$  et l'intervalle de fréquence utile est plus petit que  $f_{Nyquist}$ . Ce domaine  $D$ , illustré sur la figure D.4, dont l'effet de bord est négligeable sera utilisé dans la procédure d'identification modale.

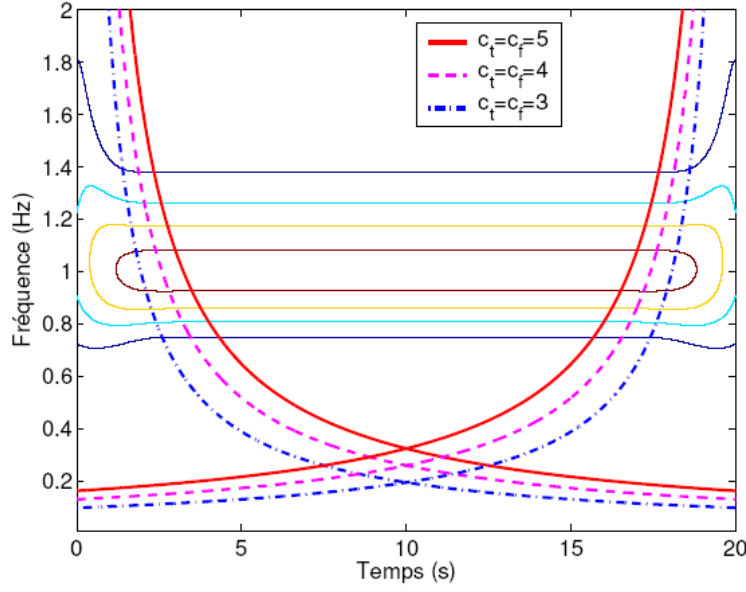


FIGURE D.4: Modules de la TO d'un signal sur le plan temps-fréquence. Les différents domaines  $D$ , où l'effet de bord est négligé, sont représentés pour plusieurs valeurs de  $c_t$  et  $c_f$ , d'après [2].

### D.3.3 Découplage des modes : choix du paramètre de l'ondelette mère

Il est très important de choisir de bonnes valeurs pour les paramètres des ondelettes mères afin d'isoler les composantes d'un signal multi-composantes. Supposons que l'on s'intéresse à une composante  $j$  quelconque avec une fréquence  $\omega_j$  dans un signal de  $N$  composantes. La fréquence la plus proche à isoler est éloignée d'une quantité  $d\omega_j$ . Pour résoudre ce problème, on doit faire appel à la résolution fréquentielle de la transformée en ondelettes sur le plan temps-fréquence le long d'une arête de fréquence  $\omega_j$ . D'après la formule (D.42), la localisation fréquentielle qui est

$\left[ \max \left( 0, \omega_j \left( 1 - c_f \frac{\Delta\omega_\psi}{\omega_\psi} \right) \right), \omega_j \left( 1 + c_f \frac{\Delta\omega_\psi}{\omega_\psi} \right) \right]$  doit être incluse dans l'intervalle  $[\omega_j - d\omega_j, \omega_j + d\omega_j]$ . Il en résulte que

$$Q \geq c_f \frac{\omega_j}{2d\omega_j} \quad (\text{D.45})$$

Pour généraliser, on note  $d\omega_j = \min [(\omega_j - \omega_{j-1}), (\omega_{j+1} - \omega_j)]$  pour  $1 \leq j \leq N$  avec  $\omega_0 = 0$  et  $\omega_{N+1} = 2\pi f_{Nyquist}$ . Plus la valeur de  $Q$  augmente, plus l'effet de découplage entre les composantes est bon mais plus l'effet de bord perturbe le plan temps-fréquence. Il faut que le domaine  $D$  défini à la relation (D.44) soit non vide. La deuxième inégalité de la relation est immédiatement vérifiée car  $d\omega_j < \pi f_{Nyquist}$ . Donc, il faut seulement que la deuxième inégalité est un sens. En combinant avec l'inégalité de Heisenberg ( $\mu_\psi \geq \frac{1}{2}$ ), nous avons la condition

$$Q \leq \frac{L\omega_j}{2c_t} \quad (\text{D.46})$$

et finalement, le paramètre  $Q$  doit appartenir à l'intervalle

$$c_f \frac{\omega_j}{2d\omega_j} \leq Q \leq \frac{L\omega_j}{2c_t} \quad (\text{D.47})$$

Une fois que  $Q$  est choisi, les paramètres des ondelettes de Cauchy sont déterminés en fonction de  $Q$  suivant les relations du tableau D.1. Avec la formule (D.47),  $L$  et  $f_{Nyquist}$  sont obtenus à partir

des mesures, les fréquences  $\omega_j$  peuvent être évaluées grossièrement à partir de la TF du signal. Les coefficients  $c_t$  et  $c_f$  doivent satisfaire l'inéquation déduite de (D.47)

$$c_t c_f \leq L d\omega_j \quad (\text{D.48})$$

Le choix de  $Q$  est libre dans l'intervalle donné par la relation (D.47) et dépend aussi du problème traité : plus la valeur de  $Q$  est élevée, plus l'effet de bord est significatif et moins l'effet de couplage est important (Fig. D.5). Dans le cas de modes très proches, c'est à dire  $d\omega_j$  faible, il est nécessaire que  $L$  soit suffisamment grand pour que la valeur de  $Q$  satisfasse la condition (D.47).

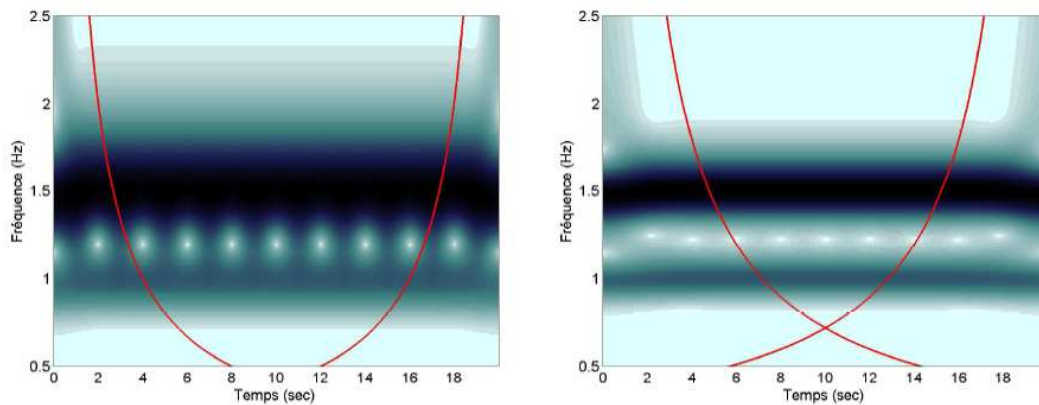


FIGURE D.5: Modules de la TO (Cauchy) d'un signal avec  $Q = 5$  (à gauche) et  $Q = 9$  (à droite), d'après [2].

## D.4 Bibliographie

- [1] Le T.P, Argoul P., *Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response*, Journal of Sound and Vibration, 277(2004) 73-100.
- [2] Nguyen T.M., *Dynamique non linéaire des systèmes mécaniques couplés : Réduction de modèle et Identification*, Thèse, ENPC-MODES, 2007.
- [3] Torrèsani B., *Analyse Continue par Ondelettes*, InterEditions / CNRS Editions, 1995.
- [4] Delprat N., Escudie B., Guillemain P., *Asymptotic wavelet and Gabor analysis : extraction of instantaneous frequencies*, IEEE, 38(1992) 644-664.
- [5] Carmona R., Hwang W.L., Torrèsani B., *Multi-ridge detection and time-frequency reconstruction*, IEEE Transactions on Signal Processing, 47(1999) 480-492.
- [6] Torrèsani B., *Time-frequency and time-scale analysis*, Signal Processing for Multimedia, J. Byrnes Ed. (1999) 37-52.



## Annexe E

# Etude dynamique d'une poutre mince en rotations modérées

Dans cette annexe, nous allons présenter brièvement les résultats obtenus pour l'étude des déplacements axial et transverse d'une poutre mince soumise à des rotations modérées pour d'autres cas de CL (A-A et E-L) que celui présenté au Chapitre 7 (E-E). Les caractéristiques de la poutre restent inchangées par rapport à l'étude du Chapitre 7 et sont rappelées dans le tableau E.1.

Longueur	Epaisseur	Hauteur	Module d'Young	Densité	Inertie
$L(m)$	$e(m)$	$h(m)$	$E(GPa)$	$\rho(kg \cdot m^{-3})$	$I(m^4)$
1.7	0.04	0.003	207	7801	$9 \cdot 10^{-11}$

TABLEAU E.1: Caractéristiques de la poutre

Cette étude va permettre de dégager les similitudes et les différences entre les différents cas de CL de la poutre. L'étude de la convergence des déplacements axial et transverse et de l'angle n'a pas été effectuée pour les cas de CL A-A et E-L. Nous avons donc conservé  $N_u = N_v = 6$ , où  $N_u$  et  $N_v$  sont respectivement le nombre de mode axial et transverse pris en compte dans le calcul. Avec ce nombre de modes choisis, le temps de calcul est nettement plus important que pour le cas E-E et le niveau de flèche maximale pouvant être atteint se limite à  $1mm$ , soit un tiers de l'épaisseur de la poutre.

L'étude des TF des signaux temporels numériques des déplacements axial et transverse est toujours réalisée pour un point particulier de la poutre. Pour la poutre A-A, il est identique à celui de la poutre E-E, soit le point  $X_5$  d'abscisse  $x = 0.5 m$ . Pour la poutre E-L, nous avons choisi le point situé à l'extrémité libre de la poutre que nous nommerons  $X_L$ . Les simulations numériques sont toujours effectuées entre les instants  $t_0$  et  $t_f = 15 s$ , intervalle de temps discrétisé en  $N_t = 3750$  points. L'excitation est également un choc appliqué dans le plan  $(O, x, y)$  au point d'abscisse  $x_0 = 0.5 m$  et à l'instant  $t_0 = 0$ . Le choc est simulé par une demi-sinusoïde dont la durée est égale à  $0.008 s$ .

### E.1 Cas de la poutre A-A

Les signaux temporels des déplacements axial et transverse au point  $X_5$  ainsi que leurs TF et leurs TO sont tracés sur la figure E.1. Pour la TO des signaux temporels, le temps d'arrêt est égal à la durée totale du signal soit  $t_f=15 s$ ,  $Q = 40$  et  $N_{TOC}=400$  points.

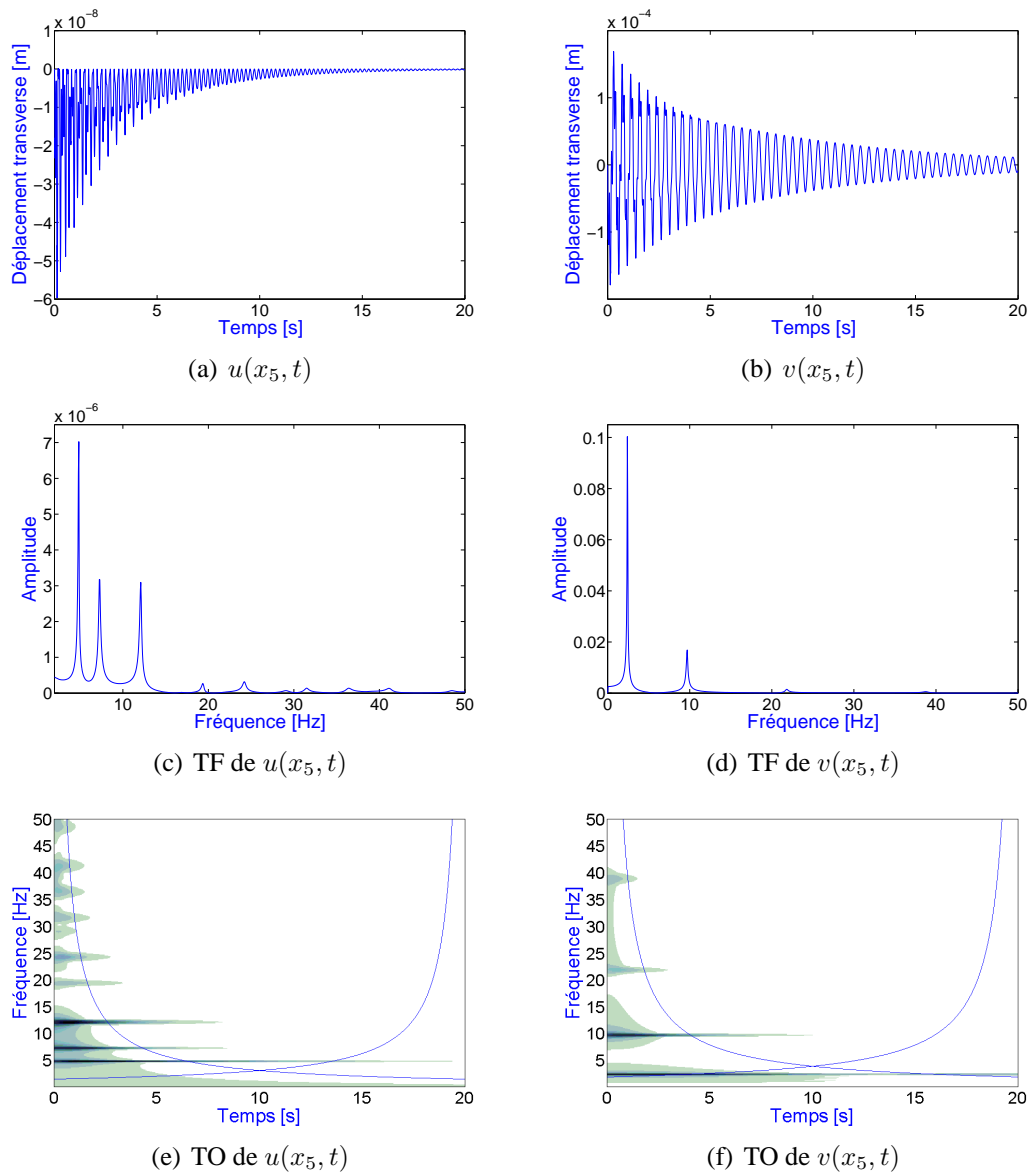


FIGURE E.1: Signaux temporels, TF et TO des déplacements axial et transverse au point  $X_5$  pour la poutre A-A.

Pour le cas de la poutre A-A, le signal temporel du déplacement axial a une forme particulière<sup>1</sup> : il est toujours négatif, c'est-à-dire que la poutre est uniquement en compression. On retrouve le même résultat que pour l'étude en statique (cf 7.3.3).

Ensuite, comme pour la poutre E-E, les fréquences présentes au niveau de la TF du déplacement axial sont des combinaisons linéaires des fréquences du déplacement transverse. Toutefois, l'ordre des fréquences est différent de celui obtenu pour la poutre E-E puisque nous avons notamment la fréquence correspondant à la combinaison  $2f_{1v}$  qui est inférieure à  $f_{2v} - f_{1v}$ . Les arêtes des deux premières fréquences du déplacement axial et des combinaisons de fréquences du déplacement transverse correspondantes sont tracées sur la figure E.2. Afin d'effectuer la comparaison, les mêmes paramètres pour le traitement local des signaux par la TOC ont été pris pour toutes les fréquences ( $f_{1v}$ ,  $f_{2v}$ ,  $f_{1u}$  et  $f_{2u}$ ). Le temps d'arrêt est égal à  $t_f = 15$  s,  $Q = 10$  et  $N_{TOC} = 400$  points/Hz.

<sup>1</sup>Ici nous n'avons représenté que le signal temporel d'un seul point mais le même type de signal est observé pour tous les autres points de la poutre.

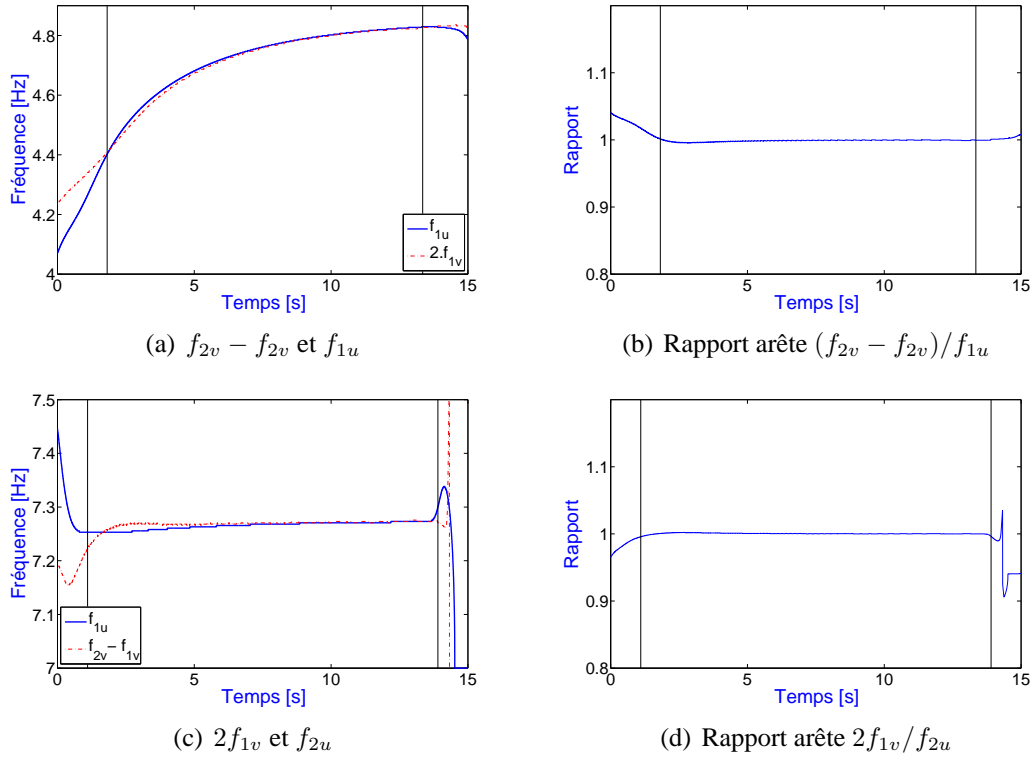


FIGURE E.2: Identification des fréquences de la TF de  $u(x_5, t)$  à partir de celles de la TF de  $v(x_5, t)$  à l'aide des fréquences instantanées déterminées avec la la TOC, pour la poutre A-A.

Là encore, la comparaison des arêtes issues du déplacement axial et des combinaisons d'arêtes issues du déplacement transverse correspondantes est plutôt satisfaisante (rappelons que les écarts importants au début du signal sont dûs aux effets de bord).

Pour l'étude de l'influence du niveau de force, les équations non linéaires du système régissant le comportement de la poutre sont résolues pour plusieurs niveaux de force : 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3 et 3.5 N.

La figure E.3 présente, en fonction du niveau de force, l'évolution des amplitudes temporelles maximales des déplacements axial et transverse en fonction de l'abscisse  $x$ ,  $v_{\max}(x)$  et  $u_{\max}(x)$  (Fig. E.3(a) et E.3(c)), ainsi que les amplitudes maximales des déplacements axial et transverse au niveau de la poutre,  $V_{\max}$  et  $U_{\max}$  (Fig. E.3(b) et E.3(d)). Pour la figure E.3(d), l'amplitude maximale du déplacement transverse au niveau de la poutre,  $V_{\max}$ , est tracée en fonction de la force obtenue pour le cas G et comparée à celle obtenue pour le cas L.

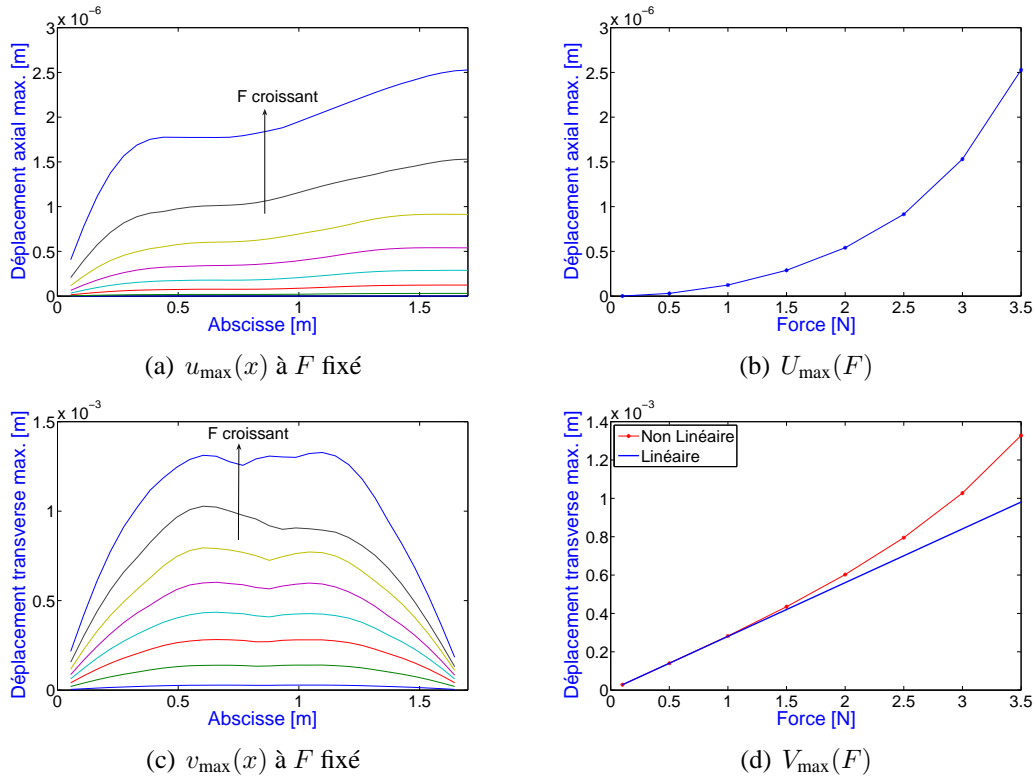


FIGURE E.3: Déplacements axial et transverse maximum en fonction du niveau de force pour la poutre A-A.

Du fait des CL<sup>1</sup>, le profil du déplacement axial est différent de celui de la poutre E-E. Il sera maximum au niveau de l'extrémité droite et minimum à l'extrémité gauche.

Comme pour la poutre E-E, l'amplitude maximale du déplacement axial a une évolution quadratique en fonction de la force (Fig. E.3(b)), par contre la flèche maximale de la poutre n'évolue pas linéairement comme c'était le cas pour la poutre E-E (Fig. E.3(d)).

Pour la comparaison entre la flèche maximale obtenue pour les cas L et G en fonction du niveau de force (Fig. E.3(d)), contrairement à l'étude statique et au cas de la poutre E-E, la flèche maximale obtenue pour le cas G est supérieure à celle obtenue pour le cas L. Par ailleurs, on note que jusqu'à une force de 1 N correspondant à une flèche maximale de 0.3 mm (un dixième de l'épaisseur de la poutre), les flèches maximales obtenues pour les cas L et G se superposent et qu'ensuite l'écart entre les deux augmente assez rapidement. On peut donc considérer qu'à partir de ce niveau de flèche, l'utilisation du modèle linéaire n'est plus valide.

Regardons maintenant les TF des déplacements axial et transverse au point d'abscisse  $X_5$  pour quatre niveaux de force particuliers : 0.1, 1, 2 et 3 N. Les TF obtenues à partir des déplacements axial et transverse au point  $X_5$  pour ces valeurs de force sont tracées sur la figure E.4. L'évolution de l'amplitude des pics, respectivement pour les trois premières fréquences du déplacement axial et les deux premières fréquences du déplacement transverse, est tracée en fonction du niveau de force sur la figure E.5. Pour la figure E.5(b), l'amplitude des pics de la TF du déplacement transverse en fonction de la force, obtenue pour le cas G, est comparée à celle obtenue pour le cas L.

<sup>1</sup>ddl axial bloqué à l'extrémité gauche et libre à l'extrémité droite



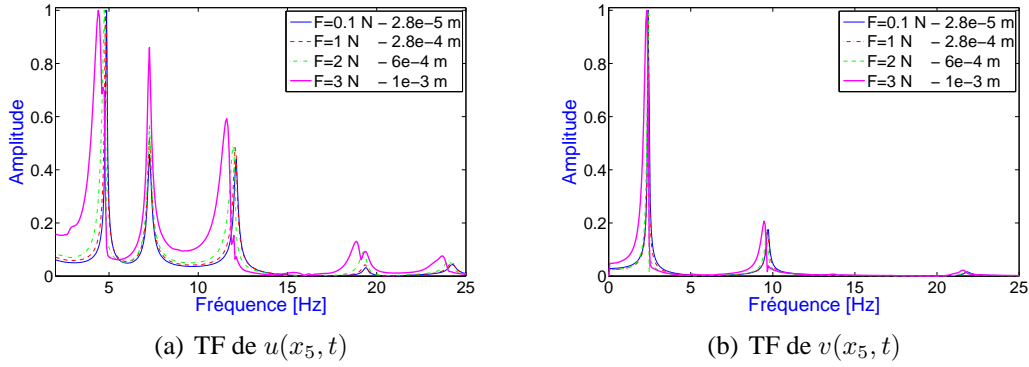


FIGURE E.4: TF des déplacements axial et transverse au point  $X_5$  pour différents niveaux de force pour la poutre A-A.

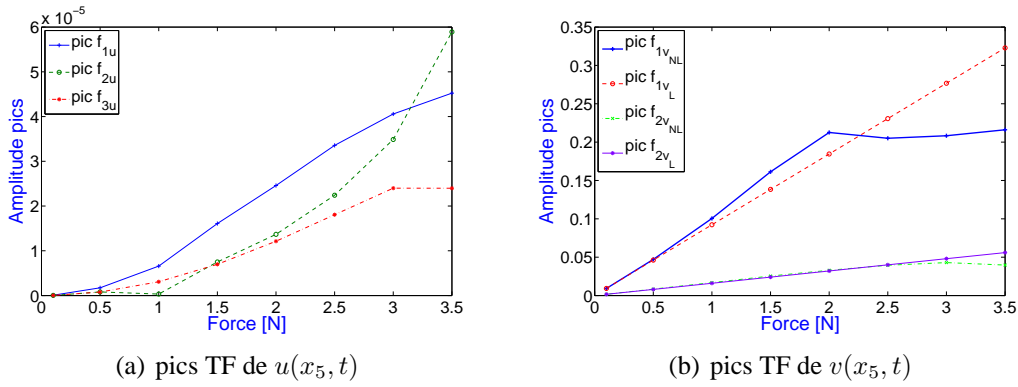


FIGURE E.5: Amplitude des pics des TF des déplacements axial et transverse au point  $X_5$  pour la poutre A-A pour différents niveaux de force.

Comparée à la poutre E-E, l'évolution de l'amplitude des pics pour le déplacement axial est très différente. En effet, l'ordre des amplitudes maximales des pics n'est pas conservé :  $\text{pic } f_{1u} > \text{pic } f_{2u} > \text{pic } f_{3u}$ . Par contre, pour le déplacement transverse, l'évolution est similaire au cas de la poutre E-E.

Les TF de la figure E.4 montrent que l'augmentation du niveau de force a également pour effet d'élargir les pics de fréquence (l'amortissement est donc plus important), qui deviennent fortement dissymétriques et se décalent en fréquence. Cependant, contrairement au cas E-E, les pics de fréquence ont une forte pente à droite et l'évolution du décalage fréquentiel est la même pour tous les pics, aussi bien pour le déplacement axial que transverse. Pour ce cas de CL, tous les pics de fréquence se décalent vers la gauche, c'est-à-dire que les fréquences diminuent avec la force. Ce comportement est dit «softening» : la raideur de la poutre devient moins importante avec les fortes excitations.

L'analyse par ondelettes des deux premiers modes transverses,  $f_{1v}$  et  $f_{2v}$ , et des deux premiers modes axiaux,  $f_{1u} = 2f_{1v}$  et  $f_{2u} = f_{2v} - f_{1v}$ , confirme ces observations. Les résultats sont présentés sur la figure E.6 et les paramètres du traitement des signaux temporels par la TOC sont répertoriés dans le tableau E.2. Comme pour le cas E-E, l'évolution des fréquences instantanées (ou arêtes) montre que, lorsque le signal s'amortit suffisamment, le comportement de la poutre redevient linéaire.

Modes	Plage de fréquence (Hz)	$N_{TOC}$	$Q$	$t_f$ (s)
$f_{1v}$	[2 3]	400	5	15
$f_{2v}$	[9 10]	400	10	7
$f_{1u}$	[4 5]	400	10	15
$f_{1u}$	[7 8]	400	10	7

TABLEAU E.2: Paramètres de la TOC pour le traitement local des deux premières fréquences des signaux numériques des déplacements axial et transverse au point  $X_5$ .

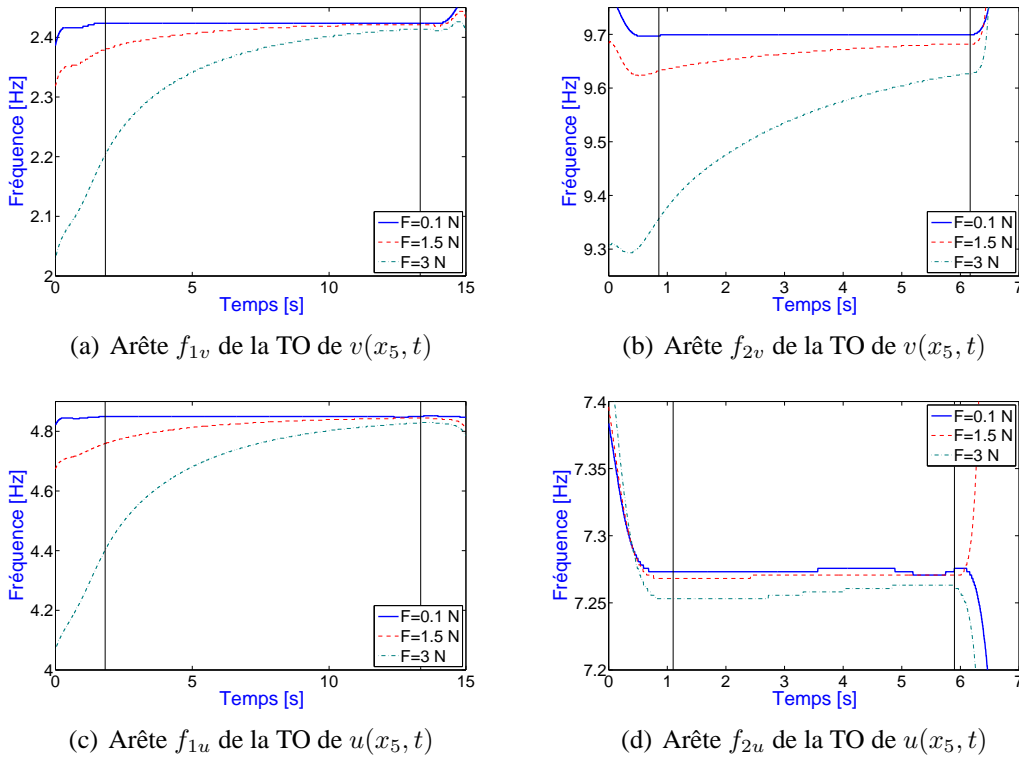


FIGURE E.6: Arêtes des deux premières fréquences des déplacements axial et transverse pour la poutre A-A et différents niveaux de force.

## E.2 Cas de la poutre E-L

Les signaux temporels des déplacements axial et transverse au point  $X_L$  ainsi que leurs TF et leurs TO sont tracés sur la figure E.7. Pour la TO des signaux temporels, le temps d'arrêt est égal à la durée totale du signal soit  $t_f=15$  s,  $Q = 40$  et  $N_{TOC}=400$  points.

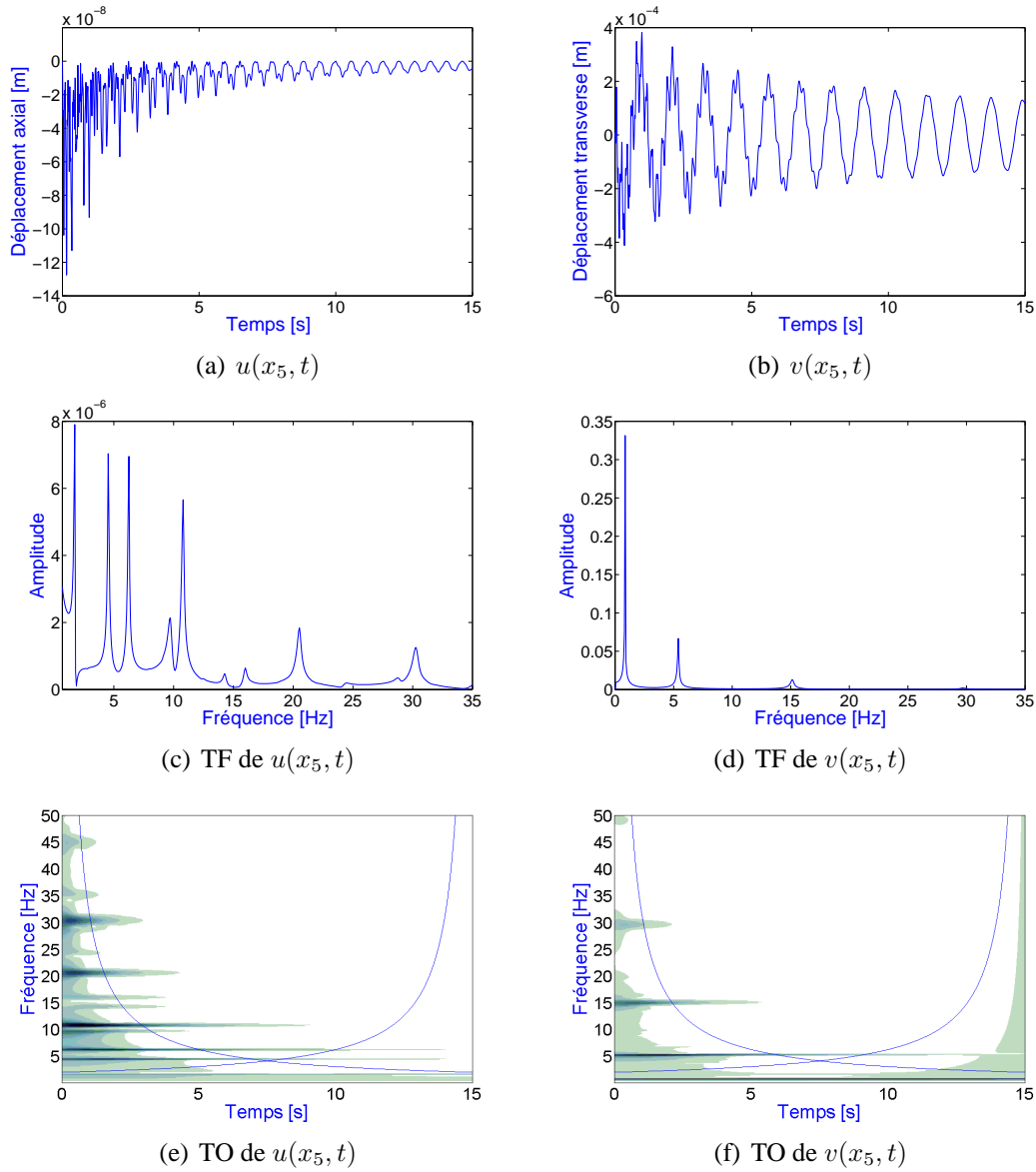
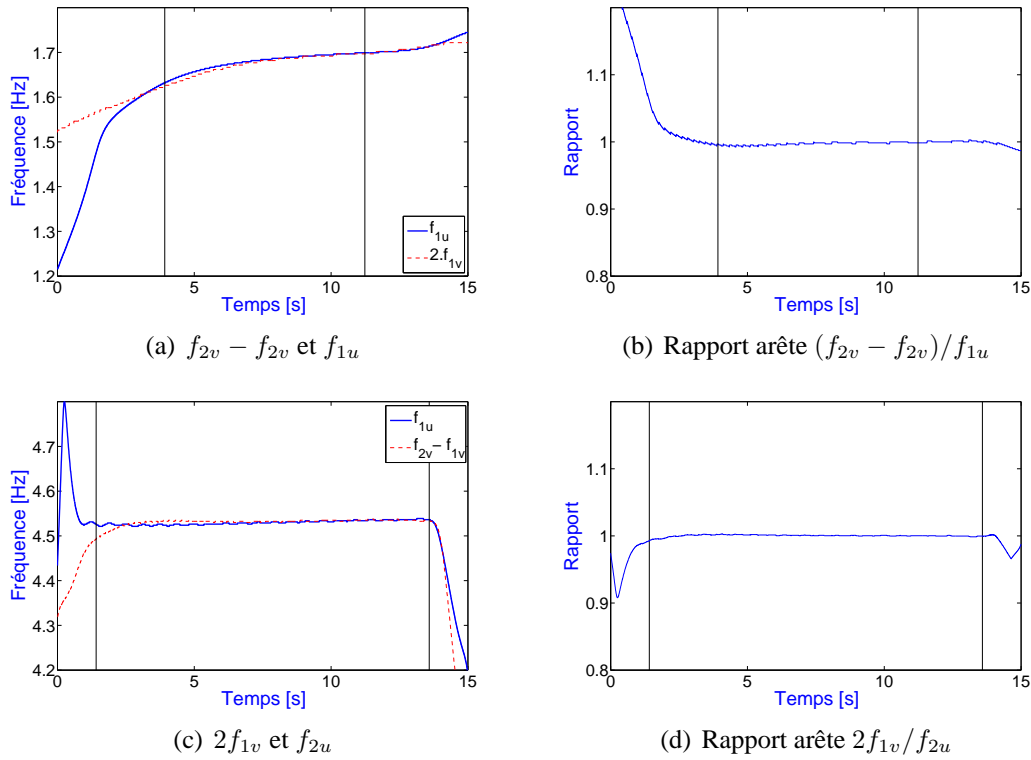


FIGURE E.7: Signaux temporels, TF et TO des déplacements axial et transverse au point  $X_L$  pour la poutre E-L.

Comme pour le cas de la poutre A-A, la poutre est uniquement en compression (Fig. E.7(a)).

Les arêtes des deux premières fréquences du déplacement axial et des combinaisons de fréquences du déplacement transverse correspondantes sont tracées sur la figure E.8. Afin d'effectuer la comparaison, les mêmes paramètres pour le traitement local des fréquences des signaux numériques par la TOC ont été pris pour toutes les fréquences ( $f_{1v}$ ,  $f_{2v}$ ,  $f_{1u}$  et  $f_{2u}$ ). Le temps d'arrêt est égal à  $t_f = 15$  s,  $Q = 8$  et  $N_{TOC} = 400$  points/Hz.



**FIGURE E.8:** Identification des fréquences de la TF  $u(x_L, t)$  à partir de celles de la TF de  $v(x_L, t)$  à l'aide des fréquences instantanées déterminées avec la TOC, pour la poutre E-L.

La comparaison des arêtes issues du déplacement axial et des combinaisons d'arêtes issues du déplacement transverse correspondantes est également satisfaisante pour la poutre E-L.

Pour l'étude de l'influence du niveau de force, les équations non linéaires du système régissant le comportement de la poutre sont résolues pour plusieurs niveaux de force : 0.1, 0.5, 1, 1.5 et 2 N.

La figure E.9 présente, en fonction du niveau de force, l'évolution des amplitudes temporelles maximales des déplacements axial et transverse en fonction de l'abscisse  $x$ ,  $v_{\max}(x)$  et  $u_{\max}(x)$  (Fig. E.9(a) et E.9(c)), ainsi que les amplitudes maximales des déplacements axial et transverse au niveau de la poutre,  $V_{\max}$  et  $U_{\max}$  (Fig. E.9(b) et E.9(d)). Pour la figure E.9(d), l'amplitude maximale du déplacement transverse au niveau de la poutre,  $V_{\max}$ , est tracée en fonction de la force obtenue pour le cas G et comparée à celle obtenue pour le cas L.

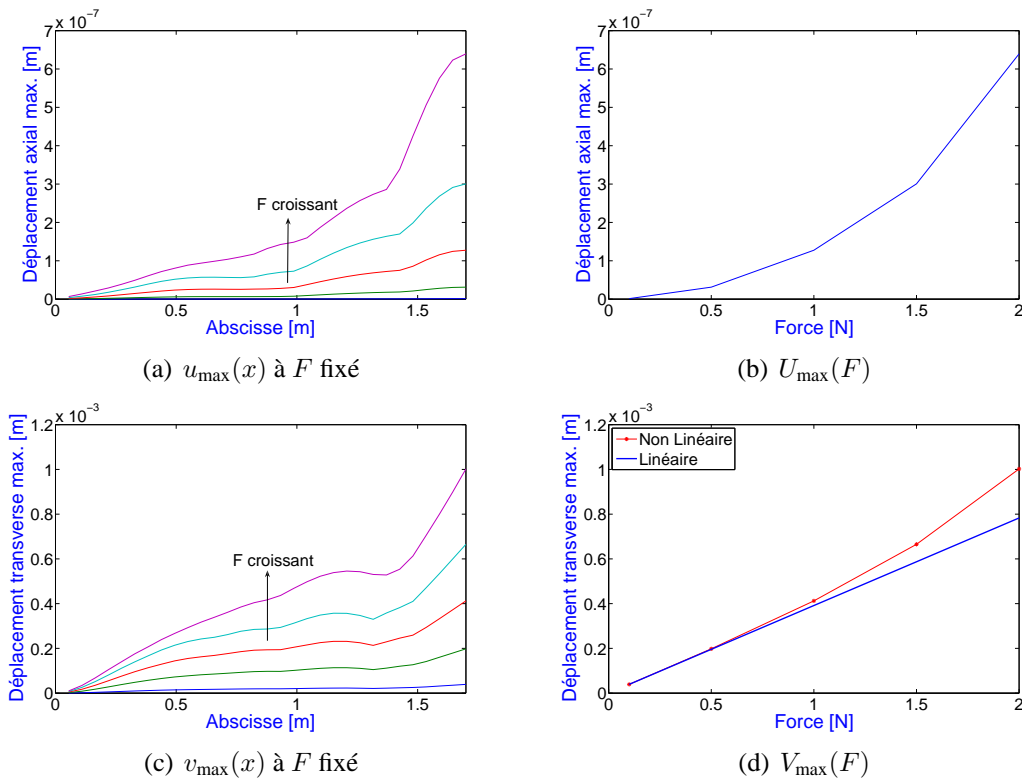


FIGURE E.9: Déplacements axial et transverse maximum en fonction du niveau de force pour la poutre E-L.

Pour ce cas de CL, les profils des maxima des déplacements axial et transverse sont similaires (à un facteur multiplicatif près, environ  $2 \cdot 10^3$ ). Comme pour les autres cas de CL, l'amplitude maximale du déplacement axial a une évolution quadratique en fonction de la force (Fig. E.3(b)). La flèche maximale de la poutre n'évolue pas linéairement à c'était le cas pour la poutre E-E (Fig. E.3(d)).

Pour la comparaison entre la flèche maximale obtenue pour les cas L et G en fonction du niveau de force (Fig. E.3(d)), contrairement à l'étude statique et au cas de la poutre E-E, la flèche maximale obtenue pour le cas G est supérieure à celle obtenue pour le cas L. Par ailleurs, on note que, jusqu'à une force de  $0.5 \text{ N}$  correspondant à une flèche maximale de  $0.2 \text{ mm}$  (environ un dixième de l'épaisseur de la poutre), les flèches maximales obtenues pour les cas L et G se superposent et qu'ensuite l'écart entre les deux augmentent assez rapidement. A partir de ce niveau de flèche, l'utilisation du modèle linéaire n'est plus valide.

Regardons maintenant les TF des déplacements axial et transverse au point d'abscisse  $X_L$  pour trois niveaux de force particuliers :  $0.1$ ,  $1$  et  $2 \text{ N}$ . Les TF obtenues à partir des déplacements axial et transverse pour ces valeurs de force sont tracées sur la figure E.10. L'évolution de l'amplitude des pics, respectivement pour les trois premières fréquences du déplacement axial et les deux premières fréquences du déplacement transverse, au point  $X_5$  ont été tracées en fonction du niveau de force sur la figure E.11. Pour la figure E.11(b), l'amplitude des pics de la TF du déplacement transverse en fonction de la force, obtenue pour le cas G, est comparée à celle obtenue pour le cas L.

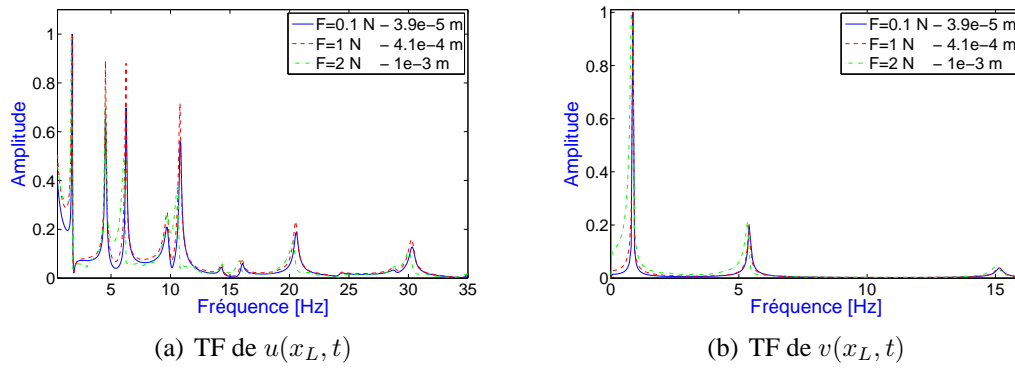


FIGURE E.10: TF des déplacements axial et transverse au point  $X_L$  pour la poutre E-L et différents niveaux de force.

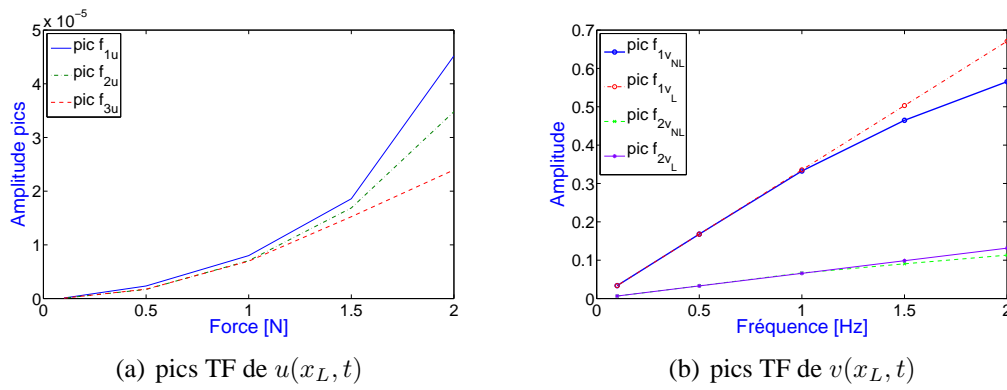


FIGURE E.11: Amplitude des pics des TF des déplacements axial et transverse au point  $X_L$  pour la poutre E-L et différents niveaux de force.

L'évolution de l'amplitude des pics pour les déplacement axial (quadratique) et transverse (plutôt linéaire) est similaire au cas de la poutre E-E.

Les TF de la figure E.10 montrent que l'on retrouve les mêmes résultats que pour le cas de la poutre A-A : les fréquences diminuent avec la force, le comportement est «softening». L'analyse par ondelettes des deux premiers modes transverses,  $f_{1v}$  et  $f_{2v}$ , et des deux premiers modes axiaux,  $f_{1u} = 2f_{1v}$  et  $f_{2u} = f_{2v} - f_{1v}$ , le confirme.

Les résultats sont présentés sur la figure E.12 et les paramètres du traitement des signaux temporels par la TOC sont répertoriés dans le tableau E.3.

Modes	Plage de fréquence (Hz)	$N_{TOC}$	$Q$	$t_f$ (s)
$f_{1v}$	[0.5 1.5]	400	3	15
$f_{2v}$	[5 6]	400	10	12
$f_{1u}$	[1 2]	400	3	15
$f_{1u}$	[4 5]	400	10	15

TABLEAU E.3: Paramètres de la TOC pour le traitement local des deux premières fréquences des signaux numériques des déplacements axial et transverse au point  $X_L$ .

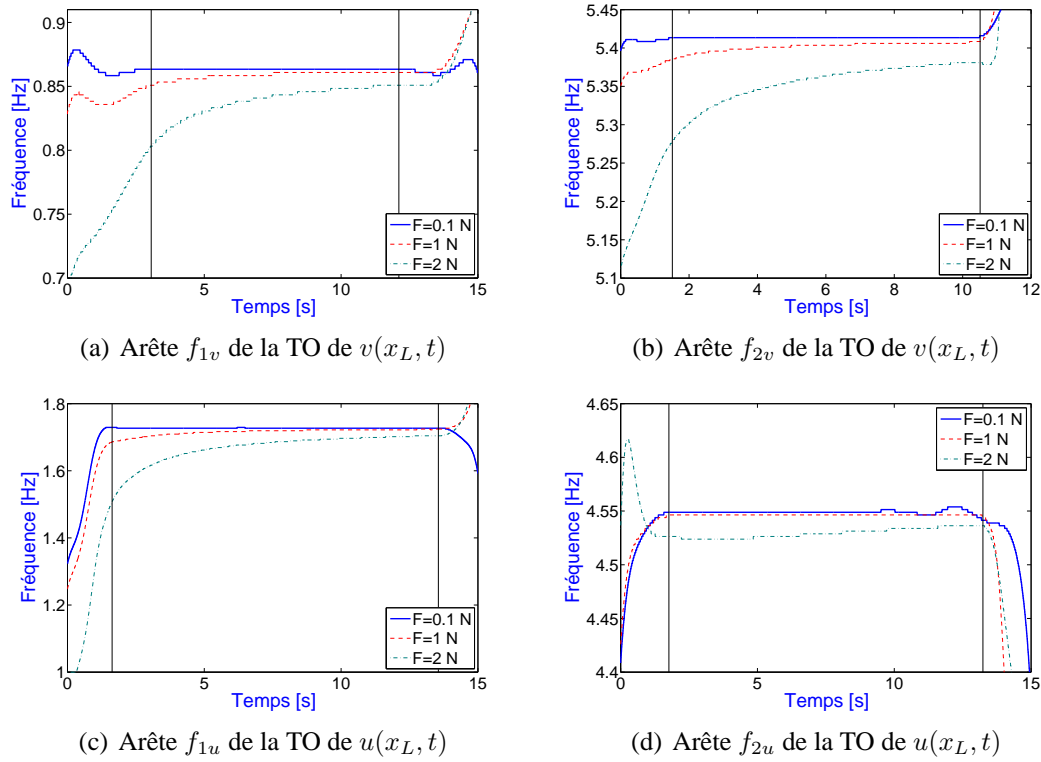


FIGURE E.12: Arêtes des deux premières fréquences des déplacements axial et transverse pour la poutre EL et différents niveaux de force.

L'étude dynamique des différentes CL a permis de montrer que le déplacement axial avait peu d'influence sur le déplacement transverse. Par contre, l'inverse n'est pas vrai puisque les fréquences prépondérantes présentes dans le spectre du signal temporel du déplacement axial sont des combinaisons des fréquences (double, somme et différence) issues du déplacement transverse.

L'étude en fonction du niveau de force révèle que l'amplitude des pics de la TF du déplacement axial augmente beaucoup plus rapidement que celle du déplacement transverse. Elle a également permis de mettre en évidence, suivant les cas de CL, les différents comportements pour la composante transverse : «hardening» pour la poutre E-E et «softening» pour la poutre A-A et E-L.

Enfin, pour la comparaison des résultats obtenus entre les cas L et G pour la flèche maximale de la poutre, contrairement au cas statique pour la poutre A-A et E-L, la flèche maximale de la poutre est plus importante pour le cas G que pour le cas L. De plus, pour les caractéristiques de la poutre choisies, il apparaît que pour une flèche maximale supérieure au dixième de l'épaisseur de la poutre, l'utilisation du modèle linéaire n'est plus valide.





## Annexe F

# Mesure de l'ELB-CA pour une poutre mince en rotations modérées

Dans cette annexe, les résultats obtenus en statique et en dynamique pour l'étude de la mesure réalisée par un ELB-CA sur une poutre soumise à des rotations modérées sont présentés pour d'autres cas de CL (A-A et E-L) que celui présenté au Chapitre 8 (E-E).

Les caractéristiques de la poutre restent inchangées par rapport à l'étude du Chapitre 8 et sont rappelées dans le tableau F.1.

Longueur	Hauteur	Epaisseur	Module d'Young	Densité	Inertie
$L(m)$	$h(m)$	$e(m)$	$E(GPa)$	$\rho(kg \cdot m^{-3})$	$I(m^4)$
1.7	0.04	0.003	207	7801	$9 \cdot 10^{-11}$

TABLEAU F.1: Caractéristiques de la poutre.

Cette étude va permettre de dégager les similitudes et les différences de la mesure réalisée par l'ELB-CA en non-linéaire suivant les différents cas de CL.

### F.1 Etude statique

Comme pour le cas de la poutre E-E, présenté au Chapitre 8, nous allons nous intéresser localement, en statique dans un premier temps, à l'amplitude maximale des termes composant la mesure de l'ELB-CA pour les cas de CL de la poutre A-A et E-L. Les courbes représentant ces termes en fonction de l'abscisse de la poutre sont obtenues pour différents niveaux de force avec les cas L et G et sont comparées. Enfin, les mesures numériques statiques d'ELB-CA sont tracées pour plusieurs niveaux de force (ou rapports  $R = v_{\max}/h$ ).

#### F.1.1 Cas de la poutre A-A

La figure F.1 présente l'allure des termes composant la mesure simplifiée de l'ELB-CA, définie en (8.3), obtenus avec les cas L et G pour la poutre A-A. Les paramètres de l'étude sont identiques à ceux de l'étude réalisée pour la poutre E-E. Les mêmes conclusions que pour la poutre E-E sont faites, à savoir que la principale différence entre les termes obtenus avec les cas L et G est la valeur de

la dérivée première du déplacement axial  $u'$ . L'écart est encore plus important que pour le cas E-E (de l'ordre  $10^{-8}$  pour le cas L, contre  $10^{-3}$  pour le cas G). Comme pour la poutre E-E, la déformation de l'axe neutre va se résumer au seul terme  $v'^2/2$  pour le cas L (Fig. F.1(f)) qui va devenir prépondérant pour le calcul de la déformation au niveau de la surface de la poutre (Fig. F.1(j)), lorsque la flèche de la poutre augmente, devant le terme  $-(h/2)v''$ .

Pour la poutre A-A, le degré de liberté axial est libre au niveau de l'extrémité droite de la poutre, ainsi la symétrie de la configuration observée pour la poutre E-E avec les paramètres de l'étude disparaît et l'allure des différents termes n'est donc plus symétrique. Par ailleurs, l'allure des termes  $u'$  et  $v'^2/2$  est similaire mais opposée en signe (Fig. F.1(a) et F.1(c)). Les deux termes vont donc se compenser (Fig. F.1(e)). En effet, la déformation au niveau de l'axe neutre, qui est la somme de ces deux termes, est de l'ordre de  $10^{-5}$  contre  $10^{-3}$  pour chacun des deux termes pris séparément. Par rapport au cas L, l'allure des termes issus du déplacement transverse,  $v'^2/2$  et  $-(h/2)v''$ , est légèrement différente, notamment au niveau de l'extrémité droite (le couplage y est plus important du fait que le degré de liberté axial soit libre), et leur amplitude est plus faible (divisé par  $\approx 1.4$  pour  $-(h/2)v''$  et  $v'^2/2$ ). Pour le cas de la poutre A-A, la déformation de l'axe neutre ( $u' + v'^2/2$ ) n'est pas quasi-constante en fonction de l'abscisse de la poutre comme prévu par la théorie. Des oscillations apparaissent cependant, étant donné que les amplitudes sont faibles ( $10^{-5}$ ), il se peut que cela provienne de la précision du calcul numérique des différents termes. Contrairement au cas E-E, il apparaît sur les figures F.1(g) et F.1(i) que la contribution de l'axe neutre au niveau de la déformation de la surface de la poutre est négligeable devant celle du terme de courbure  $-(h/2)v''$ .

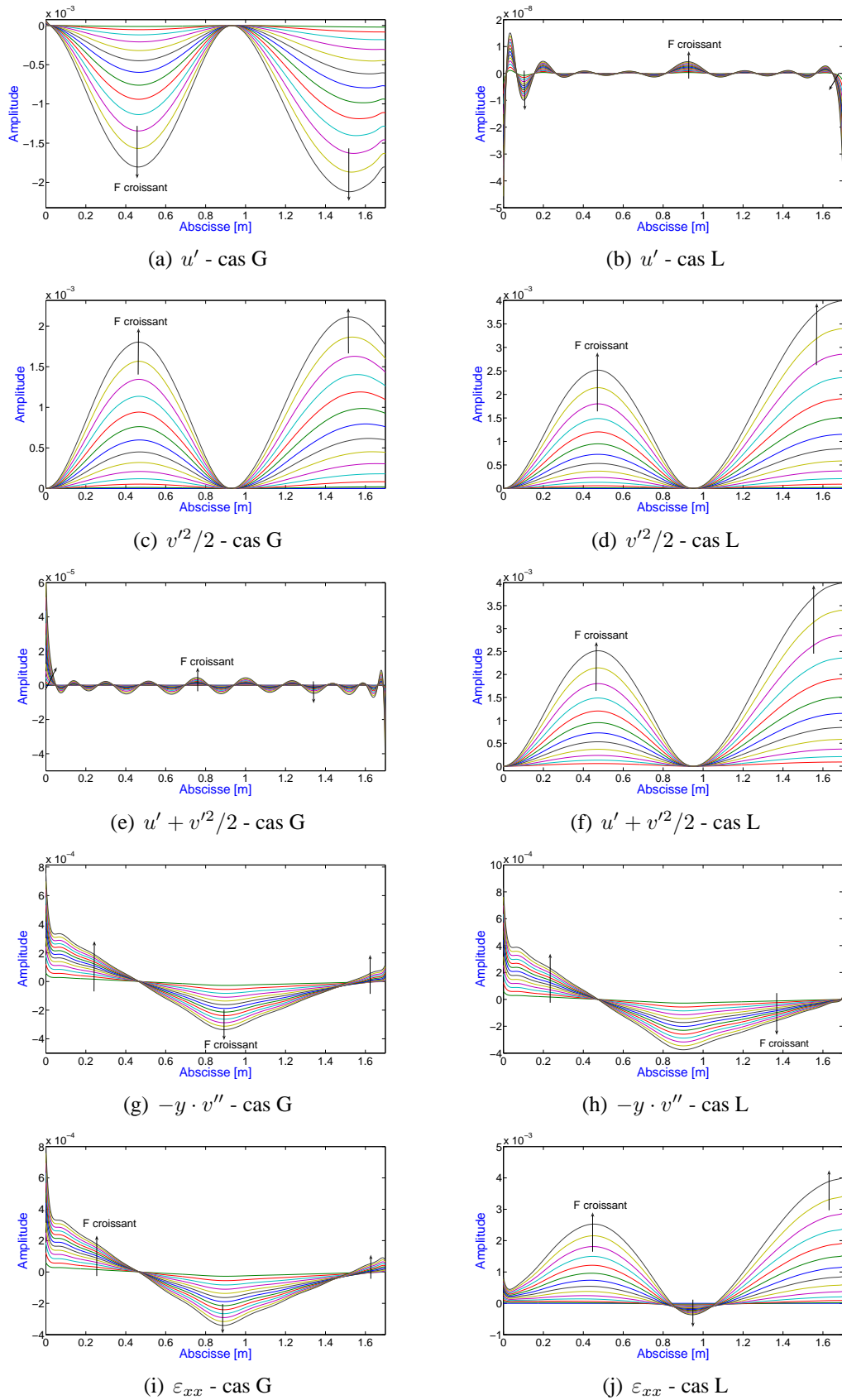


FIGURE F.1: Evolution des termes composant l'expression de la mesure de l'ELB-CA obtenus pour la poutre A-A et différents niveaux de force avec les cas L et G.

La simulation numérique des mesures d'ELB-CA en fonction du rapport  $R$ , présentée sur la figure F.2, a été faite pour la poutre A-A instrumentée avec cinq ELB-CA uniformément répartis, ainsi que pour différentes hauteurs à l'axe neutre  $y$ . Le placement des ELB-CA est le même que pour la poutre E-E (Tab. 8.2).

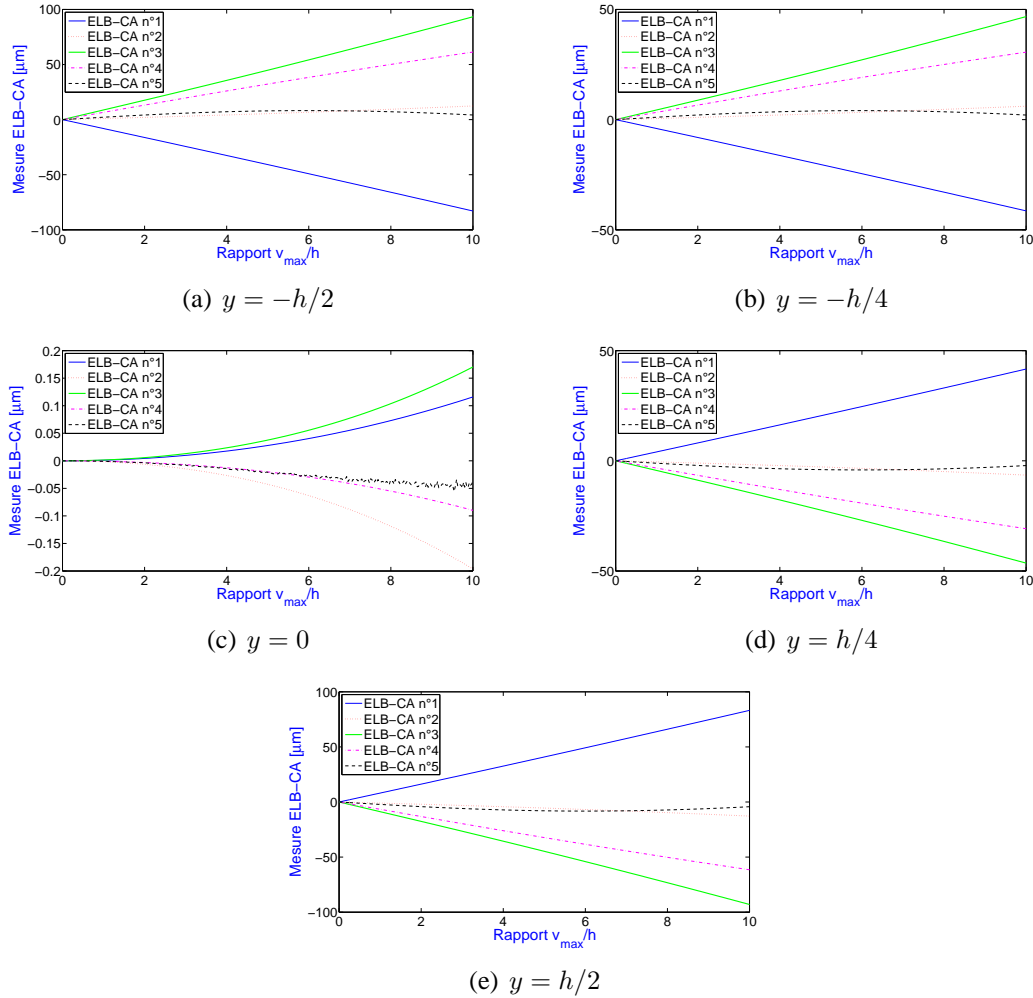


FIGURE F.2: Mesures numériques statiques d'ELB-CA en fonction du rapport  $R$ , obtenues pour plusieurs hauteurs à l'axe neutre  $y$  et pour la poutre A-A.

La déformation n'étant plus symétrique au niveau de la poutre, les mesures numériques obtenues pour les différents ELB-CA diffèrent toutes les unes des autres quelle que soit la hauteur à l'axe neutre  $y$ . Sur la figure 8.11(c), la déformation de l'axe neutre n'étant plus quasi-constante au niveau de la poutre, les mesures obtenues à partir des cinq ELB-CA ne sont plus confondues. Cependant, contrairement au cas E-E où l'allongement des ELB-CA était de quelques  $\mu m$ , il est ici beaucoup plus faible ( $< 0.2 \mu m$ , il est même tellement faible pour l'ELB-CA n°5 que la mesure obtenue est bruitée numériquement du fait de la précision du calcul). Comme le degré de liberté axial de l'extrémité droite est libre, la poutre n'est plus contrainte et peut donc se déplacer librement suivant la direction axiale au niveau de l'extrémité droite, lorsqu'on lui applique une force. Ainsi, l'axe neutre de la poutre se déforme très peu et sa contribution dans la mesure de la déformation est négligeable devant le terme de courbure  $-(h/2)v''$ .

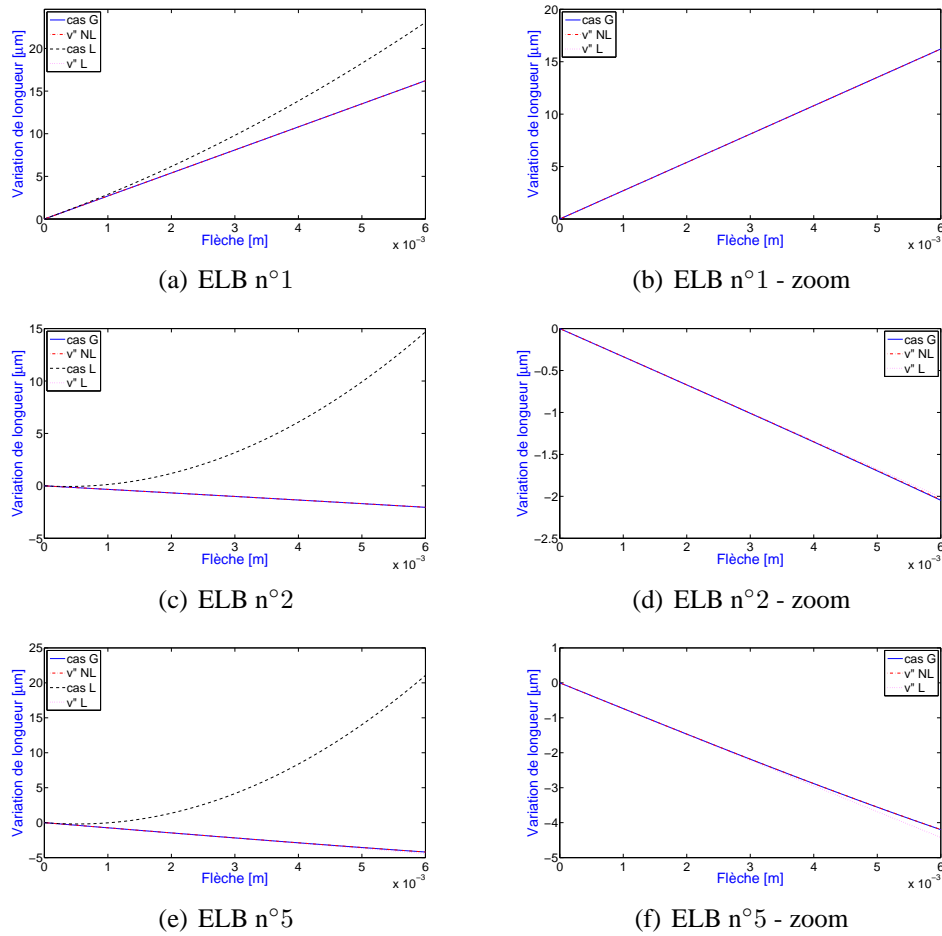
Comme pour le cas E-E, l'ordre des capteurs est également inversé entre les hauteurs  $h/2$ ,  $h/4$  et  $-h/4$ ,  $-h/2$ . Par contre, les zones de traction et de compression varient beaucoup moins avec l'augmentation du niveau de force. En effet, aucun ELB-CA étant en traction ou compression initialement ( $R$  faible) ne change de comportement lorsque  $R$  augmente. Cependant au niveau de l'ELB-CA n°5, la tendance (traction ou compression croissante) s'inverse mais seulement pour des valeurs de  $R$  assez élevées ( $\approx 8$ ).

Les mesures numériques obtenues pour les ELB-CA n°2 et n°5 restent faibles lorsque  $R$  augmente car leurs placements sont symétriques par rapport aux noeuds de la déformation (Fig. F.1(i)) situés aux alentours des abscisses  $x=0.5 \text{ m}$  et  $x=1.5 \text{ m}$ . Pour l'ELB-CA n°5, le changement de tendance observé est dû au fait que le noeud proche de l'extrémité droite de la poutre se déplace lorsque  $R$  augmente, ce qui n'est pas le cas de l'autre noeud qui reste stable. Du coup, la tendance observée pour l'ELB-CA n°2 reste la même.

Pour la comparaison de la mesure obtenue, en fonction du niveau de flèche, pour les ELB-CA n°1, n°2 et n°5 avec  $y = h/2$  à partir des différentes expressions présentées dans le manuscrit, les expressions comparées sont les mêmes que pour le cas E-E : le cas L (3.77), le cas G simplifié (8.3), l'état de l'art (3.97). Pour l'expression de l'état de l'art, nous avons regardé les résultats obtenus en prenant le terme  $v''$  déterminé à partir des équations des cas L et G, soit  $v_L''$  et  $v_G''$ . Les expressions de la mesure de l'ELB-CA comparées sont

$$\begin{array}{ll} \text{cas L} & \Delta D_{AB}^1(t) = \int_a^b \left( \frac{1}{2} v_L'^2 - y v_L'' \right) dx \\ \text{cas G} & \Delta D_{AB}(t) = \int_a^b \left( u_G' + \frac{1}{2} v_G'^2 - y v_G'' \right) dx \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Etat de l'art L} & \Delta D_{AB}^2(t) = -y \int_a^b v_L'' dx \\ \text{Etat de l'art G} & \Delta D_{AB}^3(t) = -y \int_a^b v_G'' dx \end{array}$$

Les résultats obtenus à partir de ces expressions sont présentés sur la figure F.3.



**FIGURE F.3: Comparaison des différentes expressions de la mesure de l'ELB-CA en fonction de  $R$  pour différents ELB-CA et pour la poutre A-A.**

Les graphes obtenus pour les différents ELB-CA sur la figure F.3 montrent que les résultats sont identiques pour les trois ELB-CA : les mesures obtenues à partir des expressions de l'état de l'art sont équivalentes à celles obtenues à partir du cas G, tandis que pour le cas L elles diffèrent fortement. Le déplacement axial étant libre à l'extrémité droite de la poutre, il aura peu d'influence sur le calcul du déplacement transverse  $v$  ainsi que sur celui du terme de courbure  $v''$ . De plus,  $u'$  et  $v'^2/2$  se compensent. En conséquence, les résultats obtenus pour les expressions de l'état de l'art et le cas G sont identiques, puisque le seul terme prépondérant de la mesure de déformation est  $-(h/2)v''$ . Pour le cas L,  $u'$  étant très faible, il ne va pas compenser  $v'^2/2$  qui va devenir prépondérant devant  $-(h/2)v''$  lorsque  $R$  augmente, d'où l'écart important entre les résultats obtenus à partir des cas L et G.

*Pour la poutre A-A, le seul domaine de validité du cas L, quel que soit l'emplacement de l'ELB-CA, est pour de faibles valeurs de flèche ( $v_{max}$  de l'ordre de  $10^{-4}$  m). Les autres expressions sont sensiblement équivalentes jusqu'à des valeurs de flèche beaucoup plus importantes.*

### F.1.2 Cas de la poutre E-L

La figure F.4 présente l'allure des termes composant la mesure simplifiée de l'ELB-CA (8.3) obtenue avec les cas L et G pour la poutre E-L. Les paramètres de l'étude sont les mêmes que pour les autres cas de CL.

Comme pour la poutre E-E et A-A, la principale différence entre les cas L et G est la valeur du déplacement axial, qui est ici encore plus importante que pour les cas E-E et A-A (de l'ordre  $10^{-8}$  pour le cas L contre  $10^{-2}$  pour le cas G). Pour le cas L, la déformation de l'axe neutre se résume donc au seul terme  $v'^2/2$  (Fig. F.4(f)), qui va devenir prépondérant devant le terme  $-(h/2)v''$ , lorsque  $R$  augmente, pour le calcul de la déformation au niveau de la surface de la poutre (Fig. F.4(j)).

Les degrés de liberté axial et transverse étant libres au niveau de l'extrémité droite de la poutre, comme pour le cas A-A, la symétrie de la configuration disparaît et l'allure des termes n'est plus symétrique. L'allure des termes  $u'$  et  $v'^2/2$  est similaire mais opposée en signe, les deux termes vont donc se compenser (Fig. F.4(e)) : la déformation au niveau de l'axe neutre est de l'ordre de  $10^{-3}$  contre  $10^{-2}$  pour chacun des deux termes. Par rapport au cas L, l'allure des termes issus du déplacement transverse,  $v'^2/2$  et  $-(h/2)v''$ , est légèrement différente notamment au niveau de l'extrémité droite (le couplage est plus important du fait que l'extrémité soit libre) et leurs amplitudes sont inférieures (divisées par  $\approx 1.2$  pour  $-(h/2)v''$  et  $v'^2/2$ ). Pour le cas de la poutre E-L comme pour le cas A-A, la déformation de l'axe neutre  $u' + v'^2/2$  n'est pas quasi-constante en fonction de l'abscisse de la poutre. Par ailleurs, il apparaît que la contribution de l'axe neutre au niveau de la déformation de la surface de la poutre n'est pas négligeable devant celle du terme de courbure  $-(h/2)v''$  (Fig. F.4(g) et F.4(i)).

Cependant, nous avons montré en 8.3.3, en nous basant sur le niveau maximum des termes composant la mesure de l'ELB-CA, qu'à partir d'un certain niveau de force le terme  $u'^2/2$  n'est plus négligeable et doit être pris en compte dans le calcul de la mesure de déformation. D'après le graphe F.4(a), le terme  $u'^2/2$  est de l'ordre de  $10^{-3}$  et positif. Il sera alors du même ordre de grandeur que  $u' + v'^2/2$  (Fig. F.4(e)) et de signe opposé. Ainsi, d'après l'étude locale des différents termes, l'expression simplifiée à utiliser pour la poutre E-L est celle définie en (8.4) et ce quelle que soit la valeur de  $R$ .

Pour les autres cas de CL, le terme  $u'^2/2$  peut bien être négligé localement devant  $u' + v'^2/2$  et  $-(h/2)v''$ . Pour la poutre A-A, il est de l'ordre de  $10^{-6}$  contre  $10^{-5}$  pour  $u' + v'^2/2$ , qui est déjà négligeable devant  $-(h/2)v''$ , il peut donc également être négligé. Pour la poutre E-E, il est de l'ordre de  $10^{-10}$  contre  $10^{-5}$  pour  $u' + v'^2/2$ , donc négligeable.

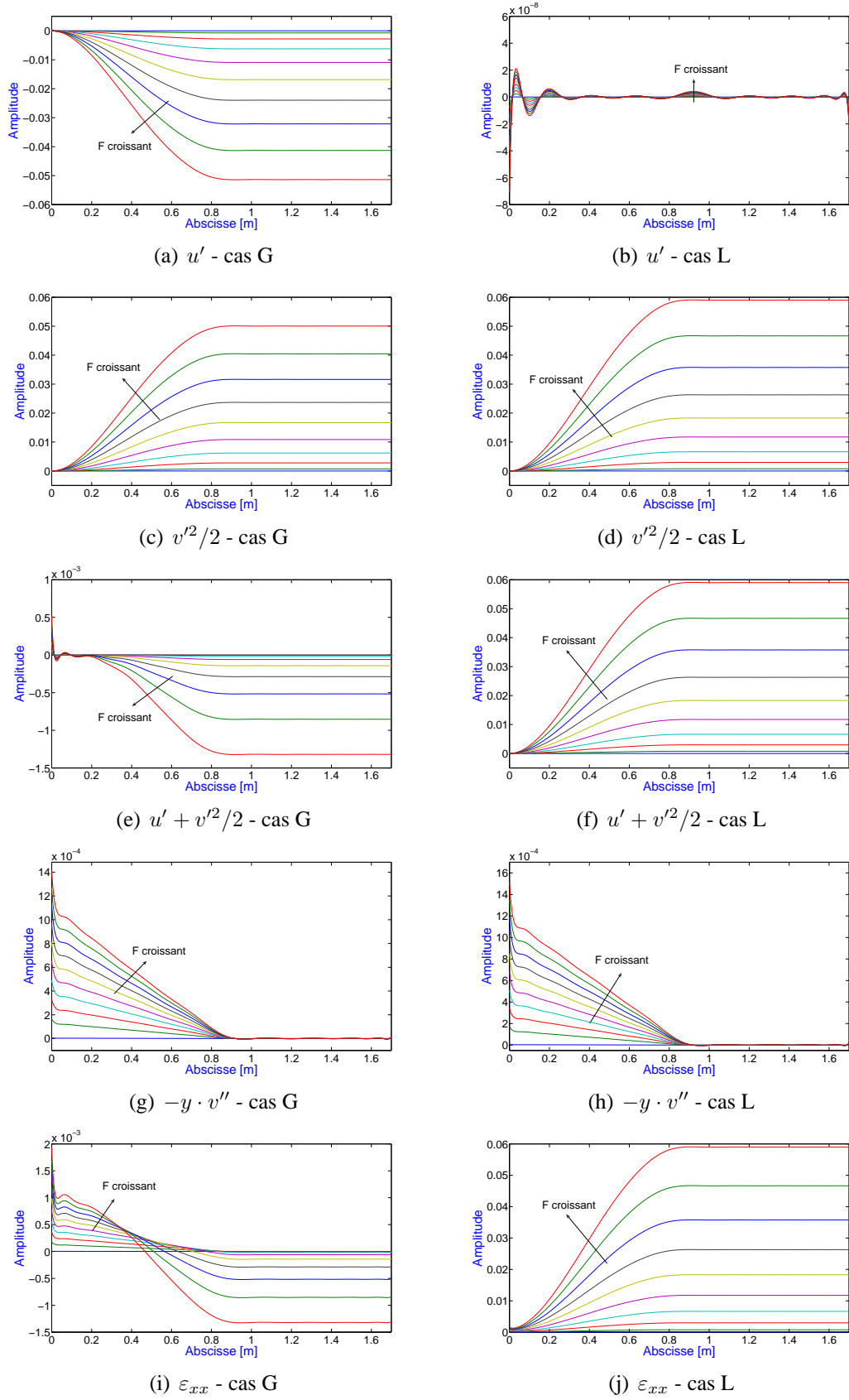
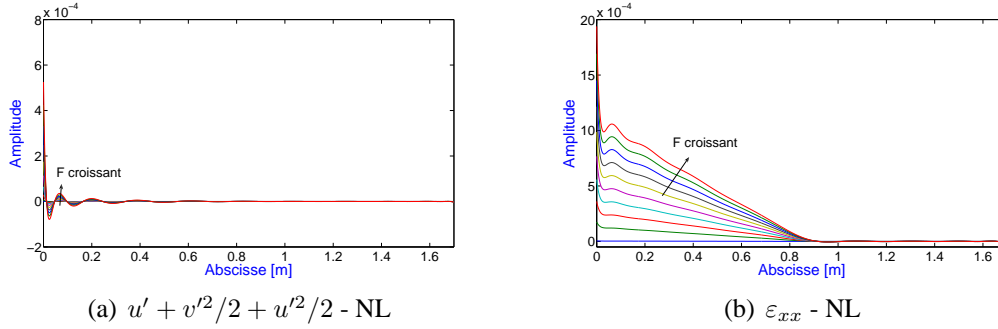


FIGURE F.4: Evolution des termes composant l'expression de la mesure de l'ELB-CA obtenus pour la poutre E-L et différents niveaux de force avec les cas L et G.



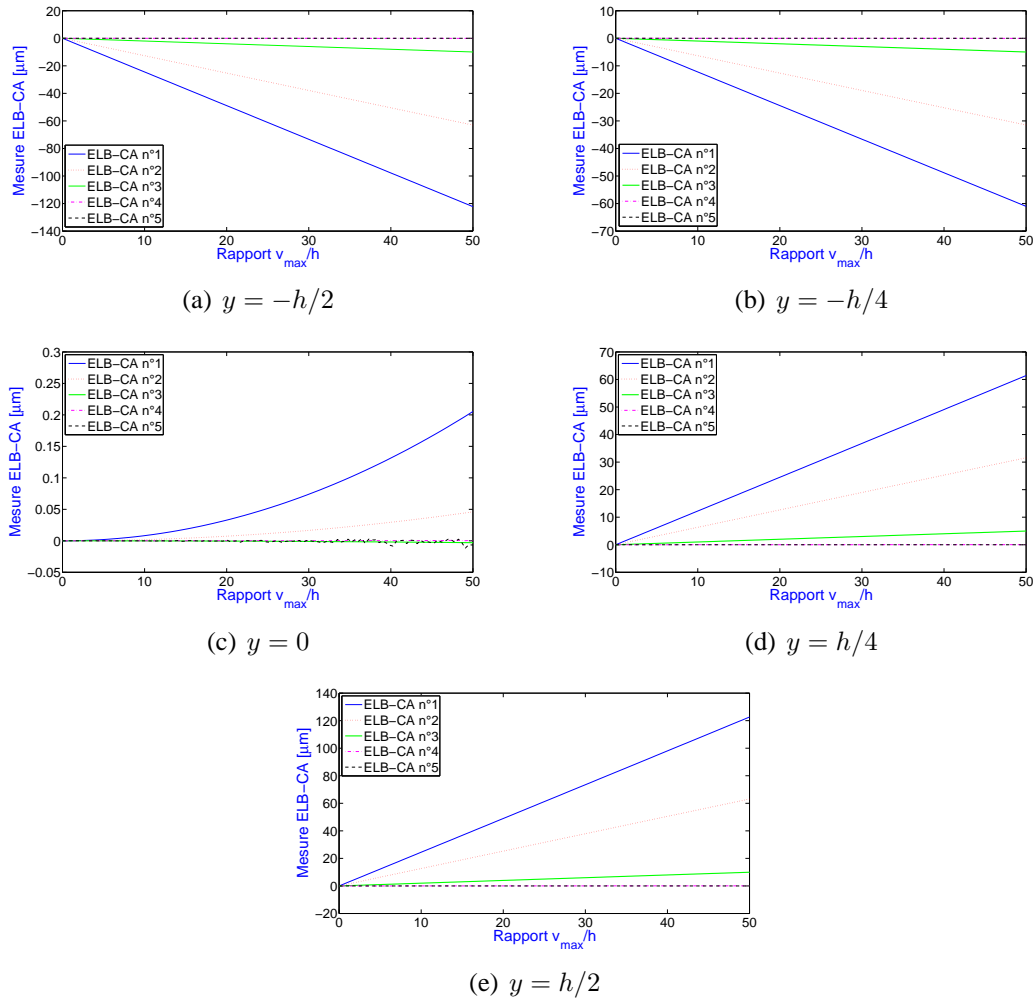
La figure F.5 présente la déformation au niveau de l'axe neutre et à la surface de la poutre E-L pour plusieurs niveaux de force, corrigées par l'ajout du terme  $u'^2/2$ . La déformation de l'axe neutre, obtenue à partir de l'expression non corrigée (8.3), qui était de l'ordre de  $10^{-3}$  sur l'ensemble de la poutre, passe alors à  $10^{-4}$  dans la zone proche de l'extrémité gauche et devient quasiment nulle ailleurs. Alors, la déformation de l'axe neutre devient négligeable devant le terme  $-(h/2)v''$ .



**FIGURE F.5: Déformation de l'axe neutre et à la surface de la poutre corrigée pour la poutre E-L.**

Par ailleurs, la déformation au niveau de la surface de la poutre est nulle à partir de l'abscisse  $x=0.88 \text{ m}$  qui est le lieu d'application de la force. Ainsi, la partie de la poutre située entre le point d'application de la force et l'encastrement va se déformer sous l'effet de la force, au contraire de la zone située entre le point d'application de la force et l'extrémité libre, ce qui est un résultat classique de RDM. C'est pour cette raison que les amplitudes de tous les termes sont constantes à partir de l'abscisse  $x=0.88 \text{ m}$  (Fig. F.4).

La simulation numérique des mesures d'ELB-CA en fonction du rapport  $R$ , présentée sur la figure F.6, a été réalisée pour la poutre E-L instrumentée avec cinq ELB-CA uniformément répartis, ainsi que pour différentes hauteurs à l'axe neutre  $y$ . Le placement des ELB-CA est le même que pour les autres cas de CL (Tab. 8.2).



**FIGURE F.6: Mesures numériques statiques d'ELB-CA en fonction du rapport  $R$ , obtenues pour plusieurs hauteurs à l'axe neutre  $y$  et pour la poutre E-L.**

Comme la déformation pour une ligne de la poutre est nulle à partir de l'abscisse  $x=0.88\text{ m}$ , la mesure numérique des ELB-CA n°4 et n°5, situés dans cette zone, est également nulle. La déformation n'étant plus symétrique au niveau de la poutre, les mesures numériques obtenues à partir des autres ELB-CA diffèrent toutes les unes des autres, quelle que soit la hauteur à l'axe neutre  $y$ .

La figure F.5(a) montre que la zone où la déformation de l'axe neutre est nulle est encore plus importante que celle de la déformation de la surface de la poutre. Ainsi, la mesure de l'ELB-CA n°3 est également nulle pour  $y = 0$ . Comme pour le cas A-A, l'allongement des ELB-CA est très faible ( $<0.2\text{ }\mu\text{m}$ ) au niveau de l'axe neutre et peut être bruitée numériquement (ELB-CA n°5). L'axe neutre de la poutre E-L se déforme donc très peu.

Comme pour les autres cas de CL, l'ordre des capteurs est également inversé entre les hauteurs  $h/2$ ,  $h/4$  et  $-h/4$ ,  $-h/2$ . Par contre, les zones de traction et de compression n'évoluent pas étant donné que, à part le cas de l'axe neutre (Fig. F.6(c)), l'évolution des mesures des ELB-CA n°1, n°2 et n°3 est linéaire en fonction de  $R$  même pour des valeurs élevées.

Pour la comparaison de la mesure obtenue pour les ELB-CA n°1, n°2 et n°5 avec  $y = h/2$  en fonction du niveau de flèche à partir des différentes expressions présentées dans le manuscrit (Fig.

F.7), les expressions comparées sont les mêmes que pour les autres cas de CL.

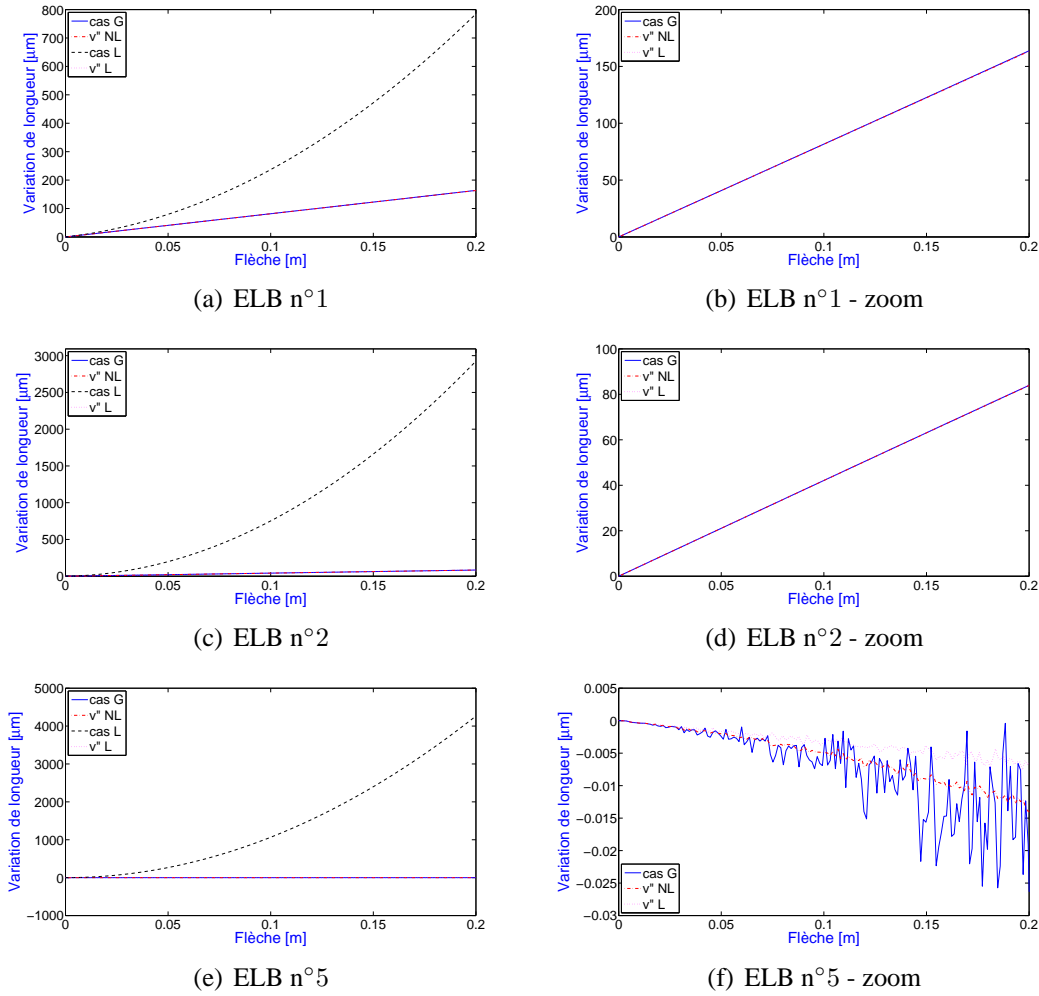


FIGURE F.7: Comparaison des différentes expressions de la mesure de l'ELB-CA en fonction de  $R$  pour différents ELB-CA et pour la poutre E-L.

Les graphes de la figure F.7 montrent que les résultats obtenus sont les mêmes pour tous les ELB-CA. En effet, comme pour la poutre A-A, quel que soit le placement de l'ELB-CA, les expressions venant de l'état de l'art donnent les mêmes résultats que le cas G alors que le cas L diffère fortement. Le déplacement axial étant libre à l'extrémité droite de la poutre, il va avoir peu d'influence sur le calcul du déplacement transverse et par suite du terme  $v''$ . Par ailleurs, la déformation de l'axe neutre, égale à  $u' + v'^2/2 + u'^2/2$ , est presque nulle. Ainsi, les résultats obtenus à partir des expressions de l'état de l'art et du cas G sont équivalentes, puisque le seul terme prépondérant de la déformation est alors  $-(h/2)v''$ . Pour le cas L,  $u'$  est très faible et ne va donc pas compenser  $v'^2/2$  qui va devenir prépondérant devant  $-(h/2)v''$  lorsque la flèche de la poutre augmente, d'où l'écart important entre les résultats obtenus à partir des cas L et G.

*Pour la poutre E-L, le seul domaine de validité du cas L, quel que soit l'emplacement de l'ELB-CA, est pour de faibles valeurs de flèche. Les autres expressions sont équivalentes jusqu'à des valeurs de flèche beaucoup plus importantes (ici au moins jusqu'à 0.2 m).*

En statique pour les différentes CL, il apparaît que l'écart entre les formulations L et G est assez important notamment pour la dérivée du déplacement axial  $u'(x)$  (de l'ordre de  $10^{-8}$  contre  $10^{-2}$ - $10^{-5}$  suivant le cas de CL, quel que soit le niveau de force appliqué). Pour les autres termes,  $v'^2/2$  et  $v''$ , l'écart entre les résultats obtenus à partir des cas L et G sera d'autant plus important que les CL seront contraintes (dans l'ordre E-E > A-A > E-L)

Pour le cas L, le terme prépondérant de la déformation au niveau de l'axe neutre et de la surface de la poutre lorsque le niveau de force augmente est le terme  $v'^2/2$ . Le cas L n'est donc pas adapté puisque nous avons montré, pour tous les cas de CL, qu'au niveau de la poutre  $u'$  est du même ordre de grandeur que  $v'^2/2$  et que ces deux termes se compensent. Cependant, l'un de ces deux termes peut être prépondérant devant l'autre localement.

Au niveau de la mesure réalisée par l'ELB-CA, moins la poutre est contrainte par les CL, plus la mesure est linéaire en fonction du niveau de force, plus  $u'$  et  $v'^2/2$  se compensent (moins l'axe neutre de la poutre se déforme) et plus le terme  $v''$  déterminé à partir des cas L et G est similaire. Ainsi, pour la poutre A-A et E-L, le terme prépondérant dans la mesure de déformation est  $-yv''$  et les résultats obtenus à partir du cas G et de l'expression de l'état de l'art sont identiques, ce qui n'est pas le cas pour la poutre E-E.

## F.2 Etude dynamique

Nous allons maintenant étudier la mesure dynamique réalisée par un ELB-CA sur une poutre soumise à des rotations modérées pour les cas de CL de la poutre A-A et E-L. La même démarche que celle utilisée pour l'étude du cas E-E présentée au Chapitre 8 en 8.5 va être employée : la même étude numérique que celle effectuée pour le cas L au Chapitre 6 est réalisée afin de voir si des pics supplémentaires apparaissent au niveau de la TF du signal de l'ELB-CA lorsque la flèche de la poutre augmente. Si des pics supplémentaires sont présents dans le spectre de la TF de l'ELB-CA, nous chercherons à en déterminer l'origine et à définir la sensibilité de l'ELB-CA aux non-linéarités géométriques vis-à-vis de sa configuration (longueur et placement) sur la poutre.

Enfin, les résultats numériques obtenus pour la mesure de l'ELB-CA avec le cas G sont comparés à ceux obtenus à partir des différentes expressions de la mesure (cas L, état de l'art), ainsi qu'à d'autres quantités plus classiques à savoir le déplacement  $v$  (étudié au Chapitre 7), la vitesse  $\dot{v}$  et l'accélération  $\ddot{v}$ .

Les paramètres choisis (dimensions de la poutre, abscisse du choc, discrétisation temporelle...) sont les mêmes que pour l'étude dynamique réalisée dans le Chapitre 7 en 7.4 : notamment  $N_u = N_v = 6$  et  $t=[0\ 15]\ s$ , intervalle de temps discrétisé en  $N_t = 3750$  points.

### F.2.1 Cas de la poutre A-A

Pour la poutre A-A, les équations non linéaires du système régissant le comportement de la poutre sont résolues pour plusieurs niveaux de force :  $F=0.1, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$  et  $3.5\ N$ . Les valeurs du rapport  $R$  correspondantes sont :  $R=0.009, 0.05, 0.09, 0.15, 0.2, 0.26, 0.34$  et  $0.44$ . Le placement des ELB-CA est identique au cas de la poutre E-E (Tab. 8.3).

La figure F.8 présente les TF obtenues à partir des mesures numériques des dix ELB-CA pour trois rapport  $R$  : 0.05, 0.09 et 0.2

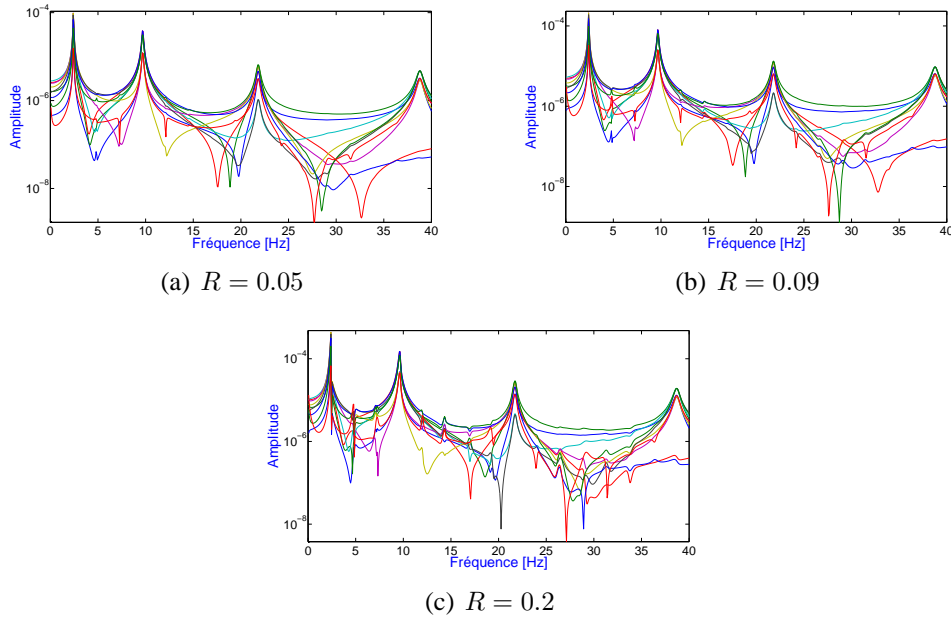


FIGURE F.8: TF des mesures numériques des ELB-CA pour différents rapports  $R$  pour la poutre A-A.

Comme pour la poutre E-E, on observe l'apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF des ELB-CA, dont l'amplitude devient plus importante lorsque  $R$  augmente. Pour connaître la sensibilité des différents ELB-CA aux non-linéarités géométriques pour la poutre A-A, nous avons calculés les termes  $\mathcal{M}_{T_{axe}}(x_k)$  et  $\mathcal{M}_{T_C}(x_k)$  définis en (8.5). La figure F.9 présente l'allure de ces termes pour plusieurs niveaux de force.

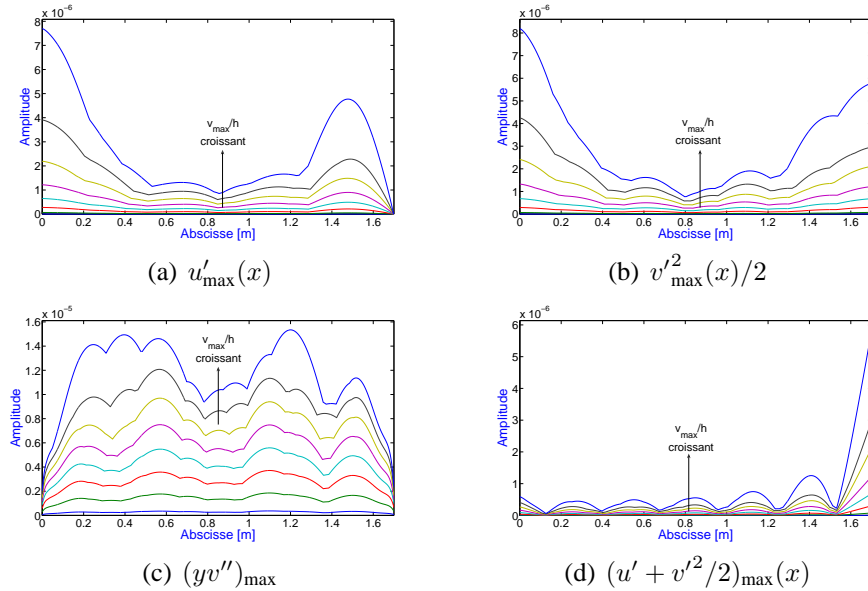


FIGURE F.9: Maximum des termes prépondérants de la mesure de l'ELB-CA suivant l'abscisse de la poutre A-A et pour plusieurs niveaux de force.

Sur la figure F.10, les termes  $\mathcal{M}_{T_{axe}}(x_k)$  et  $\mathcal{M}_{T_C}(x_k)$  sont tracés pour les trois mêmes valeurs de  $R$  que la figure F.8. Les valeurs  $M_{T_{axe}}$  et  $M_{T_C}$  sont également tracées pour  $a \leq x_k \leq b$  correspondant à l'emplacement des ELB-CA et le facteur  $\chi$  associé est répertorié dans le tableau F.2.

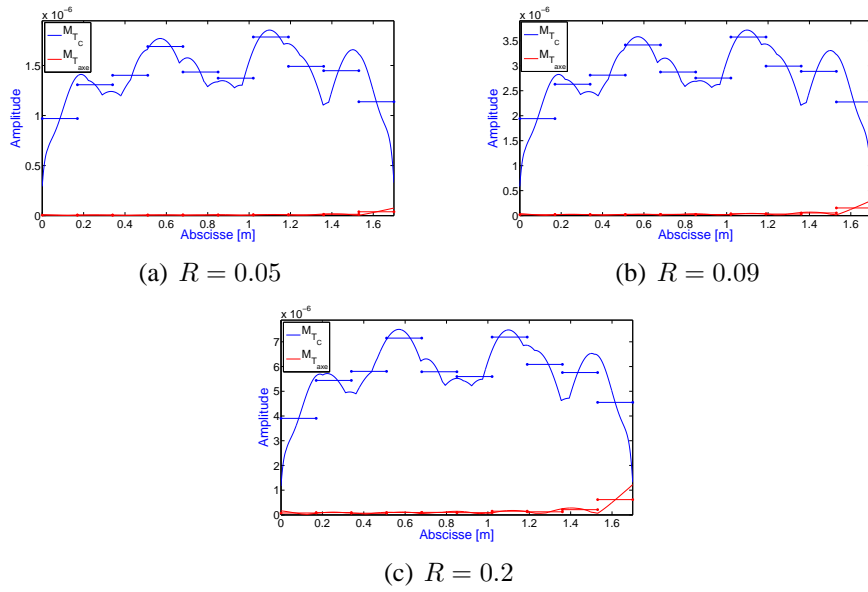


FIGURE F.10: Comparaison des quantités  $\mathcal{M}_{T_{axe}}$  et  $\mathcal{M}_{T_C}$  pour la poutre A-A et différents rapports flèche/épaisseur  $R$ .

$\chi$	ELB n°1	ELB n°2	ELB n°3	ELB n°4	ELB n°5	ELB n°6	ELB n°7	ELB n°8	ELB n°9	ELB n°10
$R = 0.05$	213	231	337	279	229	240	190	194	108	29
$R = 0.09$	106	116	169	142	115	121	95	97	54	15
$R = 0.2$	51	57	84	72	56	61	48	49	27	7
$R = 0.44$	27	34	53	36	26	31	22	27	11	2.8

TABLEAU F.2:  $Mx$  pour les ELB-CA pour la poutre A-A.

Les résultats du tableau F.2 et la figure F.10 montrent que, pour la poutre A-A, la zone sensible aux non-linéarités géométriques est l'extrémité droite de la poutre, c'est-à-dire l'extrémité de la poutre où le degré de liberté axial est libre. L'ELB-CA situé à l'extrémité droite de la poutre, l'ELB-CA n°10, sera donc particulièrement sensible par rapport aux autres ELB-CA.

La figure F.11 présente la TF de la mesure de l'ELB-CA n°10 obtenue pour  $R = 0.2$  ainsi que les TF de la mesure de l'ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre  $\Delta D_{axe}$  et du terme de courbure  $D_{AB}^{h/2}$ . Rappelons que :

$$\Delta D_{AB}(t) = \Delta D_{AB}^{axe} + D_{AB}^y(t)$$

$$\text{avec } D_{AB}^y(t) = -y \int_a^b v'' dx \text{ et } \Delta D_{AB}^{axe} = \int_a^b (u' + \frac{1}{2}v'^2) dx.$$

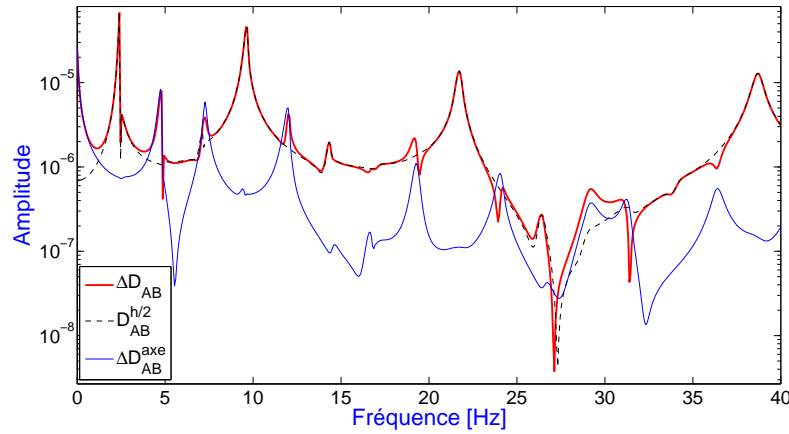


FIGURE F.11: Décomposition de la mesure d'un ELB-CA pour la poutre A-A.

Les contributions des deux termes,  $\Delta D_{axe}$  et  $D_{AB}^{h/2}$ , sont visibles sur la figure F.11. Comme pour la poutre E-E, la majorité des pics supplémentaires qui apparaissent au niveau de la TF de la mesure de l'ELB-CA proviennent de la mesure de l'ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre, c'est-à-dire de la déformation de l'axe neutre, et les pics des fréquences propres transverses de la poutre proviennent du terme de courbure  $D_{AB}^{h/2}$ .

Nous avons également étudié l'influence de la hauteur à l'axe neutre  $y$  au niveau de l'ELB-CA le moins sensible vis-à-vis des non-linéarités géométriques, l'ELB-CA n°1. La figure F.12 présente la TF de la mesure de l'ELB-CA n°1 pour trois valeurs différentes de  $y$  :  $h/2$ ,  $(3h)/10$  et  $h/10$ .

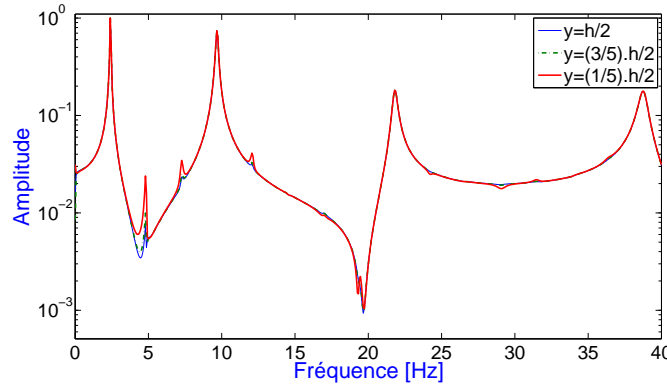


FIGURE F.12: Mesure de l'ELB-CA n°1 pour différentes valeurs de la hauteur à l'axe neutre  $y$ .

Comme pour la poutre E-E, il apparaît sur la figure 8.20 que, plus l'ELB-CA sera proche de l'axe neutre, plus l'amplitude des pics supplémentaires apparaissant dans la TF de la mesure de l'ELB-CA sera importante.

Les TF obtenues à partir du calcul de la mesure issue des différentes expressions (cas G, cas L et état de l'art) ont été comparées. La figure F.13 présente les TF obtenues avec deux ELB-CA à partir des différentes expressions pour  $F = 0.1 \text{ N}$  ( $R = 0.009$  pour les cas L et G) et  $2 \text{ N}$  ( $R = 0.2$  pour

le cas G et 0.19 pour le cas L) : le plus sensible et le moins sensible aux non-linéarités géométriques, respectivement les ELB-CA n°10 et n°1.

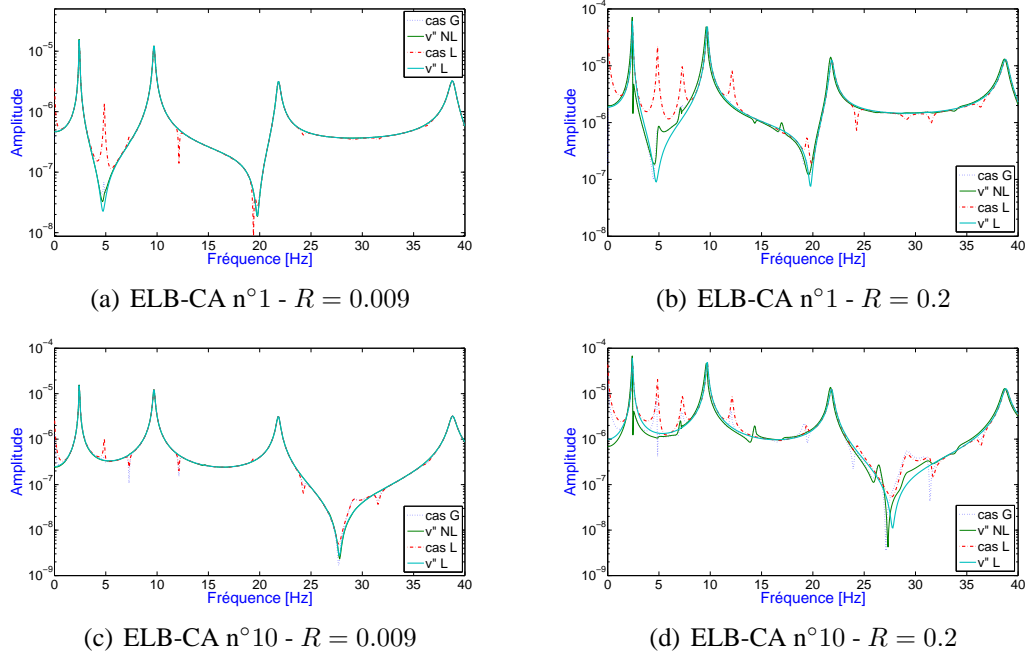


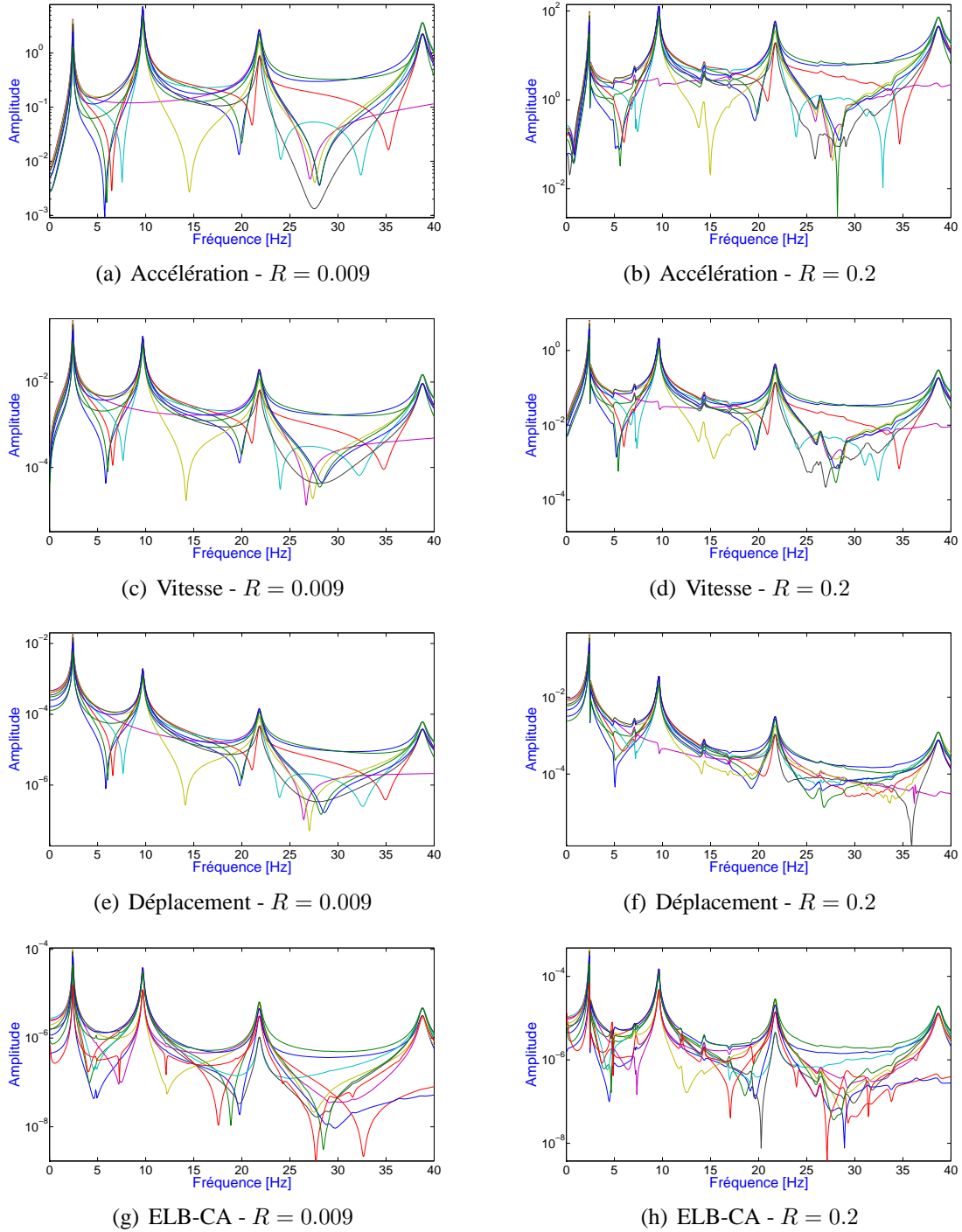
FIGURE F.13: Comparaison des TF obtenues à partir des différentes expressions de la mesure de l'ELB-CA.

Lorsque  $R$  est faible, il n'y a presque aucune différence entre les expressions de l'état de l'art et le cas G pour l'ELB-CA n°1 (Fig. F.13(a)). Par contre, le cas L présente déjà un pic supplémentaire important, du fait que  $u'$  soit très petit et ne compense pas  $v'^2/2$ , qui a déjà une amplitude importante pour cette valeur de  $R$ . Pour l'ELB-CA n°10, les résultats obtenus pour les cas L et G sont similaires. En effet, au niveau de l'emplacement du capteur,  $u'$  est faible (Fig. F.10) ce qui fait que  $v'^2/2$  sera alors prépondérant comme pour le cas L.

Lorsque  $R$  augmente, les expressions du cas G et de l'état de l'art avec  $v''_G$  sont équivalentes pour l'ELB-CA n°1 car, au niveau de l'emplacement du capteur, les termes  $u'$  et  $v'^2/2$  se compensent : les pics supplémentaires introduits le sont par l'intermédiaire du terme  $v''_G$ . L'expression de l'état de l'art avec  $v''_L$  ne présente pas de pics car elle est complètement linéaire et l'expression du cas L en présente mais ils sont dus au terme  $v'^2/2$  non compensé par  $u'$ . Pour l'ELB-CA n°10, les résultats obtenus pour les cas L et G sont similaires, pour la même raison que précédemment, et l'expression de l'état de l'art avec  $v''_G$  correspond en fait à la contribution de  $D_{AB}^y$  dans la mesure de l'ELB-CA (Fig. F.11).

Nous nous sommes également intéressés aux TF obtenues à partir d'autres quantités issues du calcul EF : le déplacement  $v$  (étudié au Chapitre 7), la vitesse  $\dot{v}$  et l'accélération  $\ddot{v}$ . L'emplacement des points de mesure de ces quantités se situent au niveau des bornes des ELB-CA comme pour la poutre E-E. La figure F.14 présente les TF obtenues pour  $R = 0.009$  et  $R = 0.2$  à partir des mesures numériques des ELB-CA, des déplacements, des vitesses et des accélérations.





**FIGURE F.14: Comparaison des TF obtenus à partir des signaux numériques d'accélération, de vitesse de déplacement et d'élongation (ELB) pour différents rapports  $R = v_{\max}/h$  pour la poutre A-A.**

La figure F.14 montre que, pour la poutre A-A, des pics de faible amplitude apparaissent au niveau des TF des déplacements, vitesses et accélérations, même entre les deux premiers pics de fréquences, ce qui n'était pas le cas de la poutre E-E (ces pics se situent aux fréquences  $2f_1$  et  $f_2 - f_1$ ). L'amplitude des pics est comparable à celles observées sur les TF obtenues à partir des mesures des ELB-CA, qui reste cependant plus sensibles aux non-linéarités géométriques, notamment l'ELB-CA n°10 situé à l'extrémité droite de la poutre.

Le traitement des deux premiers modes de vibration transverse de la poutre à l'aide de la TOC (Fig. F.15) permet de montrer que les fréquences instantanées obtenues à partir des signaux numériques de tous les types de mesure coïncident.

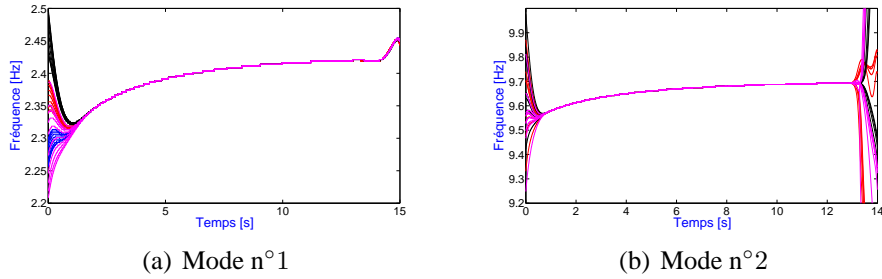


FIGURE F.15: Comparaison des résultats obtenus pour les deux premiers mode de la poutre A-A à l'aide de la TOC pour les signaux numériques d'accélération, de vitesse de déplacement et d'élongation (ELB) pour  $R = 0.2$ .

## F.2.2 Cas de la poutre E-L

Les paramètres de l'étude numérique sont toujours les mêmes. Pour la poutre E-L, les équations non linéaires du système régissant le comportement de la poutre sont résolues pour cinq niveaux de force :  $F=0.1, 0.5, 1, 1.5$  et  $2N$ . Les valeurs du rapport  $R$  correspondantes sont :  $R=0.01, 0.07, 0.14, 0.22$  et  $0.33$ . Le placement des ELB-CA est identique aux cas de la poutre E-E et A-A (Tab. 8.3).

La figure F.16 présente les TF obtenues à partir des mesures numériques des dix ELB-CA pour trois valeurs du rapport  $R$  :  $0.07, 0.14$  et  $0.22$ .

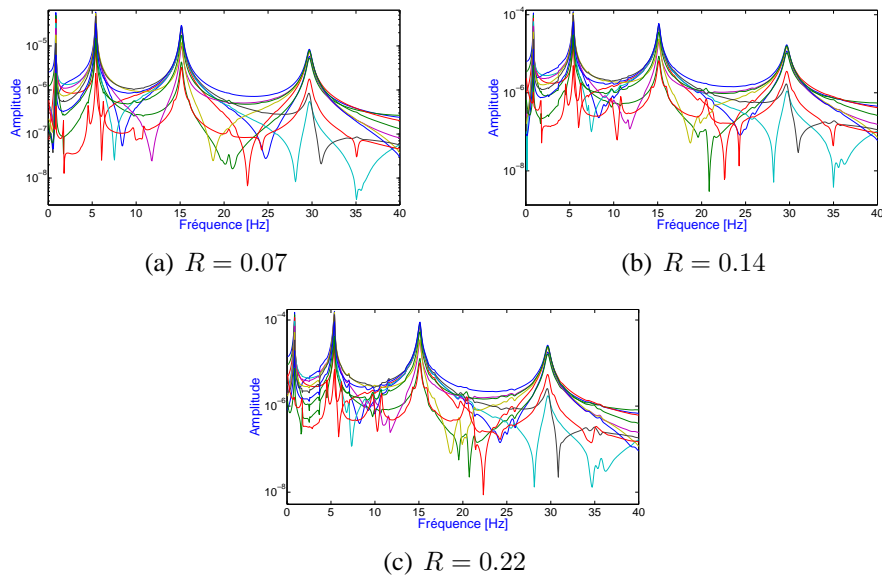


FIGURE F.16: TF des mesures numériques des ELB-CA pour différents rapports  $R$  pour la poutre E-L.

Comme pour les autres cas de CL, on observe l'apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF des ELB-CA, dont l'amplitude devient plus importante lorsque  $R$  augmente. Comme pour la

poutre A-A, un seul ELB-CA semble sensible aux non linéarités géométriques. Pour déterminer la sensibilité des différents ELB-CA aux non-linéarités géométriques pour la poutre E-L, nous avons calculés les termes  $\mathcal{M}_{T_{axe}}(x_k)$  et  $\mathcal{M}_{T_C}(x_k)$  définis en (8.5). La figure F.17 présente l'allure des termes composant la mesure de l'ELB-CA pour plusieurs niveaux de force.

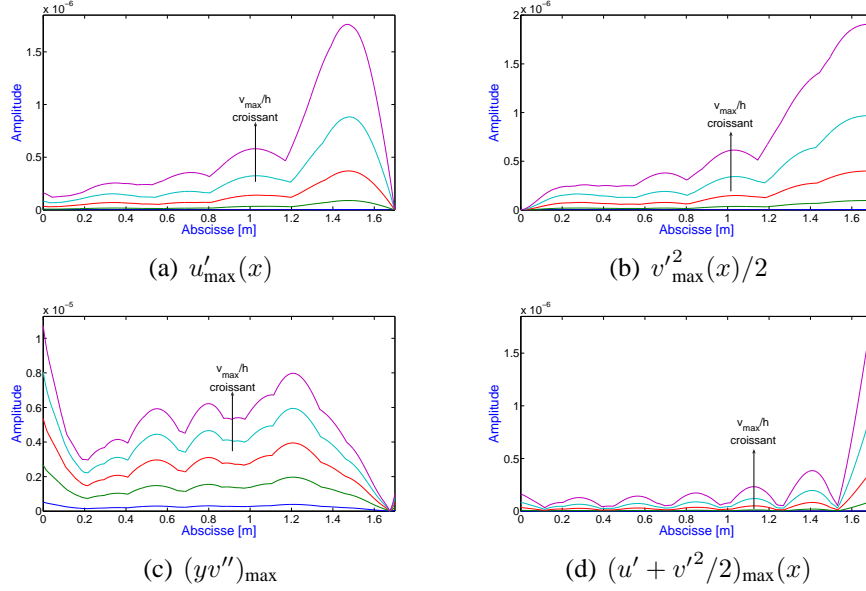


FIGURE F.17: Maximum des termes prépondérants de la mesure de l'ELB-CA suivant l'abscisse de la poutre E-L et pour plusieurs niveaux de force.

Sur la figure F.18, les termes  $\mathcal{M}_{T_{axe}}(x_k)$  et  $\mathcal{M}_{T_C}(x_k)$  sont tracés pour les trois mêmes valeurs de  $R$  que sur la figure F.16. Les valeurs  $M_{T_{axe}}$  et  $M_{T_C}$  sont également tracées pour  $a \leq x_k \leq b$  correspondant à l'emplacement des ELB-CA et le facteur  $\chi$  associé est répertorié dans le tableau F.3.

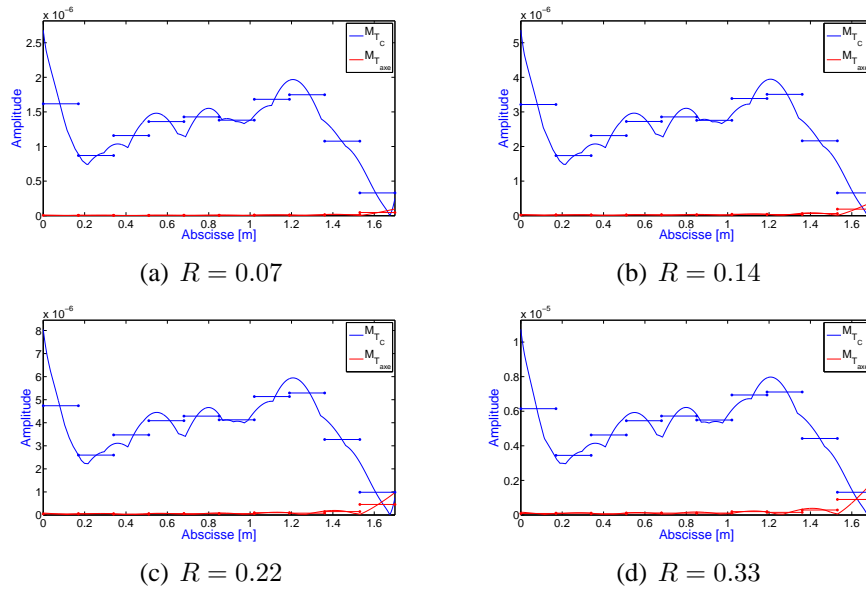


FIGURE F.18: Comparaison des quantités  $\mathcal{M}_{T_{axe}}$  et  $\mathcal{M}_{T_C}$  pour la poutre E-L et différents rapports flèche/épaisseur  $R$ .

$v_{max}/h$	ELB n°1	ELB n°2	ELB n°3	ELB n°4	ELB n°5	ELB n°6	ELB n°7	ELB n°8	ELB n°9	ELB n°10
$R = 0.07$	343	150	307	222	245	222	165	217	71	7
$R = 0.14$	165	73	150	107	119	109	81	106	35	3.5
$R = 0.22$	102	46	96	67	75	70	51	67	22	2.2
$R = 0.33$	69	32	67	46	52	50	36	47	15	1.5

TABLEAU F.3:  $Mx$  pour les ELB-CA pour la poutre E-L.

Pour la poutre E-L, les résultats du tableau F.3 et la figure 8.19 montrent que, comme pour la poutre A-A, la zone sensible aux non-linéarités géométriques est l'extrémité droite de la poutre (les degré de liberté axial et transverse sont libres). Le capteur situé à l'extrémité droite de la poutre, c'est-à-dire l'ELB-CA n°10, sera donc particulièrement sensible.

La figure F.19 présente la TF de la mesure de l'ELB-CA n°10 obtenue pour  $R = 0.2$  ainsi que les TF de la mesure de l'ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre  $\Delta D_{axe}$  et du terme de courbure  $D_{AB}^{h/2}$ .

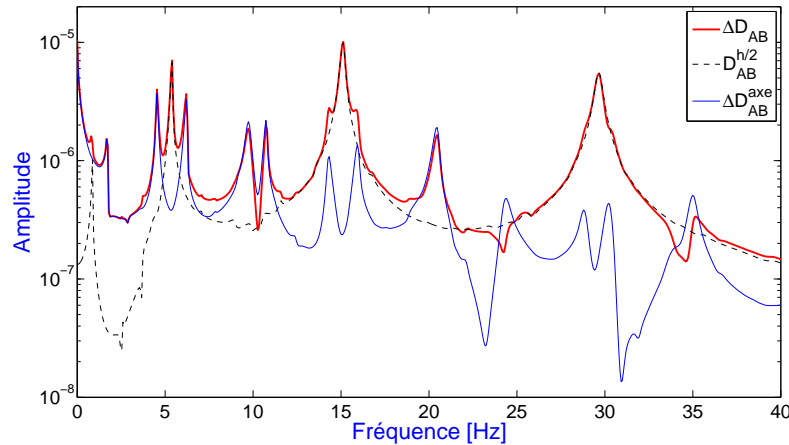


FIGURE F.19: Décomposition de la mesure d'un ELB-CA pour la poutre E-L.

La figure F.19 fait ressortir les contributions des deux termes,  $\Delta D_{axe}$  et  $D_{AB}^{h/2}$ . Comme pour les autres cas de CL, la majorité des pics supplémentaires qui apparaissent au niveau de la TF de la mesure de l'ELB-CA proviennent de la mesure de l'ELB-CA situé au niveau de l'axe neutre, c'est-à-dire de la déformation de l'axe neutre, et les pics des fréquences propres transverses de la poutre proviennent du terme de courbure  $D_{AB}^{h/2}$ . Pour la poutre E-L, au niveau de l'extrémité libre de la poutre,  $M_{T_{axe}}$  est tellement proche de  $M_{T_C}$  (i.e  $\chi$  faible) que les pics provenant de la contribution du terme de l'axe neutre deviennent prépondérants devant ceux provenant du terme de courbure. Ainsi le pic de fréquence  $f_1$  n'est presque pas observable.

Nous avons également étudié l'influence de la hauteur à l'axe neutre  $y$  au niveau des ELB-CA n°5 et n°10. La figure F.20 présente la TF de la mesure des ELB-CA n°5 et n°10 pour trois valeurs différentes de  $y$  :  $h/2$ ,  $(3h)/10$  et  $h/10$ .

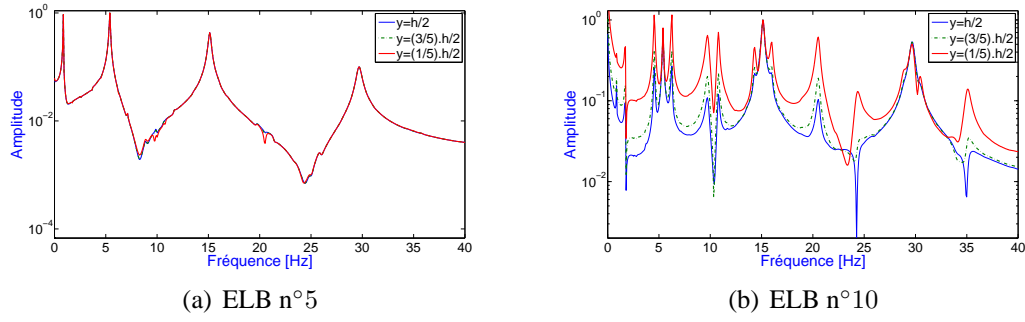


FIGURE F.20: Mesure des ELB-CA n°5 et n°10 pour différentes valeurs de la hauteur à l'axe neutre  $y$ .

Contrairement aux autres CL, il apparaît sur la figure F.20 que pour l'ELB-CA n°5, le terme de l'axe neutre est tellement faible que même en se rapprochant de l'axe neutre, les pics supplémentaires n'apparaissent pas. Par contre pour l'ELB-CA n°10, sensible aux non-linéarités géométriques, plus on se rapproche de l'axe plus des pics supplémentaires apparaissent dans la TF de la mesure de l'ELB-CA et leurs amplitudes augmentent.

Les TF obtenues à partir du calcul de la mesure issue des différentes expressions (cas G, cas L et état de l'art) ont été comparées. La figure F.21 présente les TF obtenues avec deux ELB-CA à partir des différentes expressions pour  $F = 0.5 N$  ( $R = 0.066$  pour le cas G et  $0.065$  pour le cas L) et  $1.5 N$  ( $R = 0.22$  pour le cas G et  $0.2$  pour le cas L) : le plus sensible et le moins sensible aux non-linéarités géométriques, respectivement les ELB-CA n°10 et n°1.

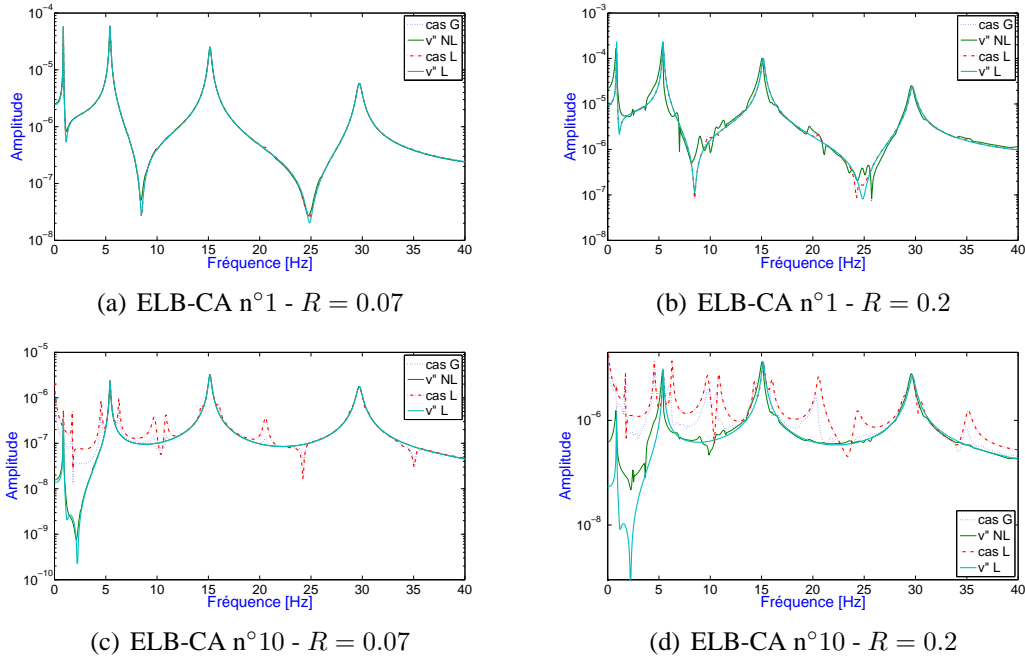


FIGURE F.21: Comparaison des TF obtenues à partir des différentes expressions de la mesure de l'ELB-CA.

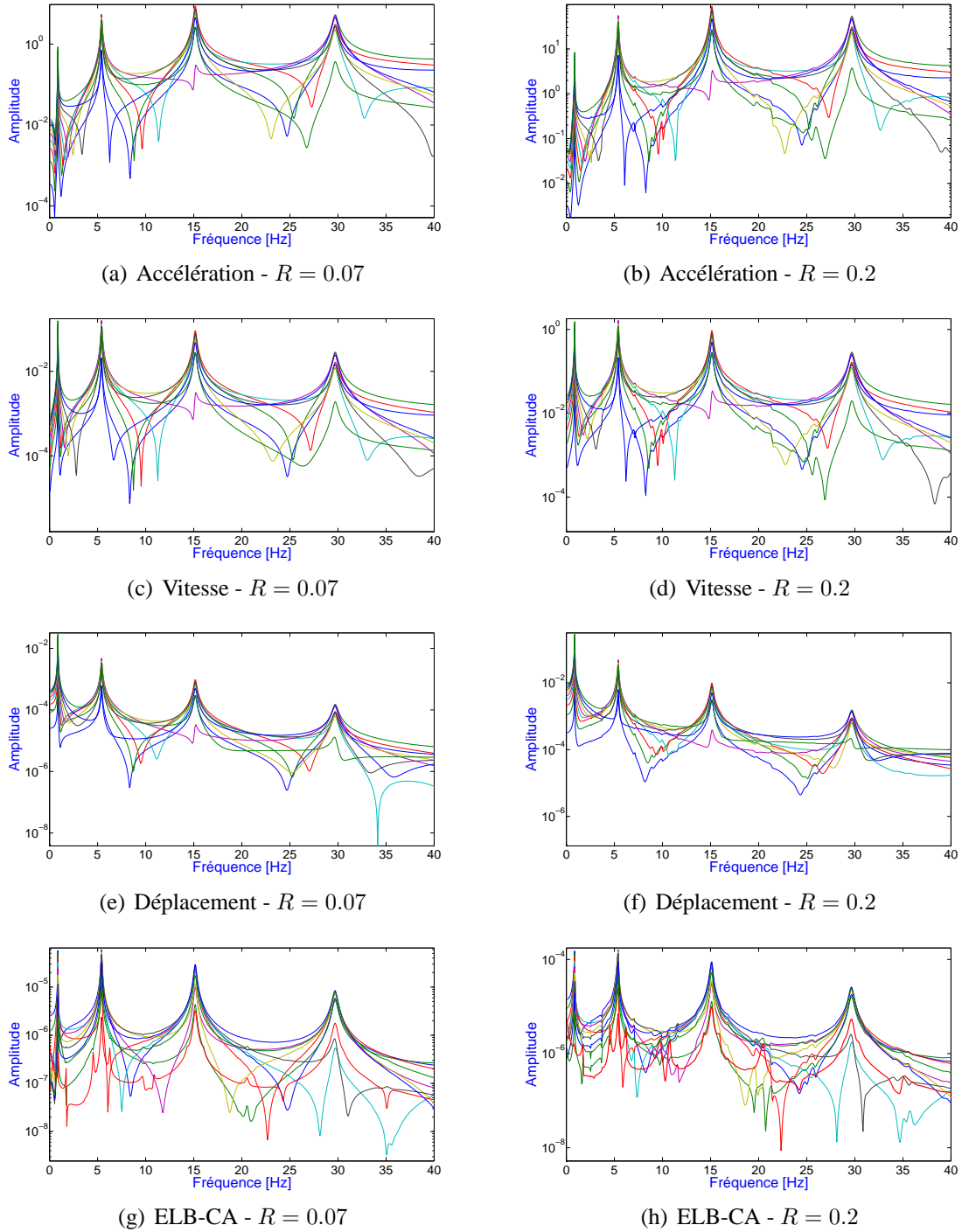
Lorsque  $R$  est faible, les résultats obtenus pour l'ELB-CA n°1 à partir de toutes les expressions se superposent presque parfaitement. Au niveau du capteur, la déformation de l'axe neutre est tellement faible que le seul terme restant est alors  $v''$  et donc toutes les expressions sont presque équivalentes.

Pour l'ELB-CA n°10, les résultats obtenus pour les cas L et G ont les mêmes tendances. En effet, au niveau de l'emplacement du capteur,  $u'$  est assez faible (Fig. F.10) ce qui fait que  $v'^2/2$  sera alors prépondérant comme pour le cas L. Cependant pour le cas G, du fait du couplage,  $v$  est plus faible que pour le cas L, donc  $v'^2/2$  l'est également ainsi que sa contribution au niveau de la TF du capteur.

Lorsque  $R$  augmente, la déformation de l'axe neutre pour l'ELB-CA n°1 est encore très faible et le seul terme prépondérant dans la mesure de l'ELB-CA est alors  $v''$ . Ainsi, le cas G est équivalent à l'expression de l'état de l'art avec  $v''_G$ . Pour le résultat obtenu avec le cas L, le seul terme prépondérant dans la déformation de l'axe neutre est  $v'^2/2$ . La figure F.21(b) montre alors que ce terme est faible au niveau du capteur puisqu'aucun pics supplémentaires n'est présent dans la TF. Pour l'ELB-CA n°10, les résultats obtenus pour les cas L et G sont similaires, pour la même raison que précédemment, et l'expression de l'état de l'art avec  $v''_G$  correspond en fait à la contribution dans la mesure de l'ELB-CA de  $D_{AB}^{h/2}$  (cf Fig. F.19).

Nous nous sommes également intéressé aux TF obtenues à partir des autres quantités issues du calcul EF : le déplacement  $v$  (étudié au Chapitre 7), la vitesse  $\dot{v}$  et l'accélération  $\ddot{v}$ . L'emplacement des points de mesure de ces quantités se situent au niveau des bornes des ELB-CA comme pour les autres CL.

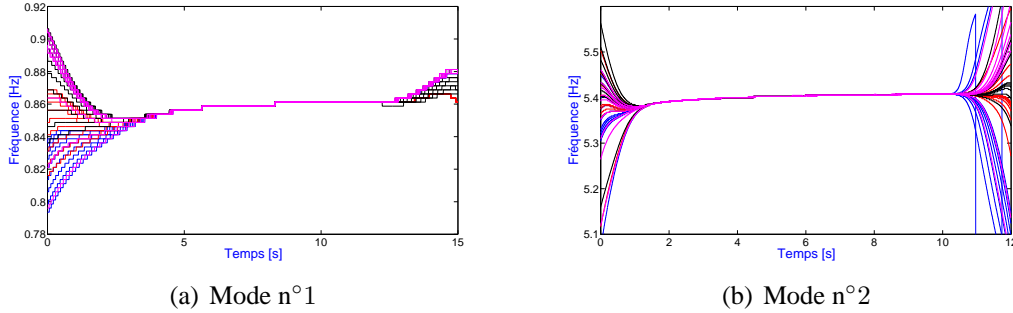
La figure F.22 présente les TF obtenues pour  $R = 0.07$  et  $R = 0.2$  à partir des mesures numériques des ELB-CA, des déplacements, des vitesses et des accélérations.



**FIGURE F.22:** Comparaison des TF obtenus à partir des signaux numériques d'accélération, de vitesse de déplacement et d'élongation (ELB) pour différents rapports  $R = v_{\max}/h$  pour la poutre E-L.

Pour la poutre E-L, la figure F.22 montre que des pics de faible amplitude apparaissent au niveau des TF des déplacements, vitesses et accélérations, même entre les deux premiers pics de fréquences. L'amplitude des pics est comparable à celles observées sur les TF des ELB-CA hormis pour l'ELB-CA n°10 situé au niveau de l'extrémité libre de la poutre, plus sensible aux non-linéarités géométriques.

Le traitement des deux premiers modes à l'aide de la TOC (Fig. F.23) permet de montrer que les fréquences instantanées obtenues à partir des signaux numériques de tous les types de mesure coïncident, comme pour les autres cas de CL.



**FIGURE F.23:** Comparaison des résultats obtenus pour les deux premiers mode de la poutre E-L à l'aide de la TOC pour les signaux numériques d'accélération, de vitesse de déplacement et d'élongation (ELB) pour  $R = 0.22$ .

Pour les autres cas de CL (A-A et E-L) comme pour la poutre E-E, l'apparition de pics supplémentaires au niveau de la TF des ELB-CA est due à la déformation de l'axe neutre qui vaut  $\varepsilon_{axe} = u' + v'^2/2$  et les fréquences propres transverses du spectre proviennent du terme de courbure  $-yv''$ . Par contre, la zone sensible aux non-linéarités géométriques sera très locale et se situera au niveau de l'extrémité où les degrés de liberté sont libres (à droite dans notre cas). Il est également possible d'augmenter la sensibilité de l'ELB-CA aux non-linéarités géométriques en diminuant la hauteur  $y$  de l'ELB-CA par rapport à l'axe neutre. Cependant, pour la poutre E-L, l'axe neutre se déforme si peu que, pour les capteurs situés hors de la zone sensible, les pics supplémentaires n'apparaissent pas au niveau de la TF et ce même en se rapprochant de l'axe neutre de la poutre.

Pour la poutre E-L, les TF des mesures numériques de l'ELB-CA, obtenues à partir des cas L et G et des expressions de l'état de l'art, sont également identiques pour de faibles niveaux de flèche et des zones de la poutre où l'ELB-CA est peu sensible aux non-linéarités géométriques. Pour la poutre A-A, par contre, le cas L est valide pour de très faibles niveaux de flèche de la poutre. Autrement, pour des niveaux de flèches plus élevées ou des ELB-CA situés dans la zone sensible aux non-linéarités géométriques, le cas L et l'expression de l'état de l'art ne permettent plus de décrire correctement le comportement dynamique de l'ELB-CA pour une poutre soumise à des rotations modérées.



**Titre :** Extensomètres à fibre optique Longue Base (ELB) pour l'évaluation dynamique des structures.

**Résumés :** La thèse s'inscrit dans le développement de systèmes d'instrumentation pour les structures intelligentes du génie civil. Elle dresse un panorama des capacités d'un nouveau capteur pour l'évaluation dynamique des ouvrages : l'Extensomètre à fibre optique de Longue Base de mesure Continûment Attaché (ELB-CA). Un modèle analytique complet de la mesure des capteurs est déterminé et appliqué au cas des poutres d'Euler-Bernoulli. Les divers traitements et études (par exemple par analyse en ondelettes) réalisés sur les réponses numériques et expérimentales de l'ELB-CA ont permis de dégager quelques caractéristiques des ELB-CA. Certaines sont spécifiques à la base de mesure du capteur : filtrage de modes pour le contrôle des structures et détection de défauts à partir de la courbure modale. D'autres, comme la détection de non-linéarités géométriques ou l'obtention de formes modales différentes, sont liées au type de mesure réalisée et peuvent s'appliquer à tous les extensomètres.

**Mots clés :** dynamique des structures, fibre optique, extensomètres longue base, détection d'endommagements, non-linéarités géométriques, rotations modérées, analyse modale, poutre d'Euler-Bernoulli, analyse en ondelettes, mesure interférométrique.

**Title :** Long-gage fiber optic extensometers for dynamic structural monitoring.

**Summary :** The thesis falls under a new set of themes born from a new sensor's appearance : Continuously Attached Long-Gage fiber optic Extensometer (CA-LGE). The manuscript draws up a first panorama of CA-LGE capacities for dynamic structural monitoring. A complete analytical model of the sensors measurement is determined and applied to the case of Euler-Bernoulli beams. The various numerical and experimental studies then undertaken (for example signal processing with wavelet transform), make it possible to establish some characteristics of the CA-LGE. Some are specific to the sensor measurement base length : modes' filtering for structural control and damage detection from modal curvature. Others, like geometrical nonlinearities detection or ways for obtaining different modal forms, are related to the measurement type carried out, which is extensometric, and can thus be applied to other extensometers. This work's prospects are numerous, as well experimental as calculative.

**Key words :** structural dynamics, optical fiber, long gage extensometers, damage detection, geometrical nonlinearities, moderate rotations, modal analysis, Euler-Bernoulli beam, wavelet transform, interferometric measurement.